المملكة العربية السعودية

وزارة التعليم
Ministry of Education

قررت وزارة التعليم تدريس
هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

الرياضيات 1

التعليم الثانوي - نظام المسارات

السنة الأولى المشتركة

قام بالتأليف والمراجعة

فريق من المتخصصين

طبعة 1445-2023

يوزع مجانًا ولا يُباع

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

ح وزارة التعليم ، ١٤٤٤هـ

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر
وزارة التعليم
الرياضيات ١ - التعليم الثانوي - نظام المسارات - السنة الأولى المشتركة. / وزارة التعليم.- الرياض ، ١٤٤٤هـ
٥٢٤ ص ؛ ٢٧.٥ x ٢١سم
ردمك : ٠- ٤٠٨- ٥١١- ٦٠٣- ٩٧٨

١-الرياضيات - كتب دراسية ٢- التعليم الثانوي - السعودية
أ. العنوان
ديوي ٥١٠ ١٤٤٤/٧٩٦٦

رقم الإيداع : ١٤٤٤/٧٩٦٦
ردمك : ٠- ٤٠٨- ٥١١- ٦٠٣- ٩٧٨

مواد إثرائية وداعمة على "منصة عين الإثرائية"

ien.edu.sa

أعزاءنا المعلمين و المعلمات، والطلاب و الطالبات، وأولياء الأمور ، وكل مهتم بالتربية و التعليم:
يسعدنا تواصلكم؛ لتطوير الكتاب المدرسي، ومقترحاتكم محل اهتمامنا.

fb.ien.edu.sa

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

بسم الله الرحمن الرحيم

نبذة عن نظام المسارات في المرحلة الثانوية

عزيزي الطالب:

إنّ تقدم الدول وتطورها يقاس بمدى قدرتها على الاستثمار في التعليم، ومدى استجابة نظامها التعليمي لمتطلبات العصر ومتغيراته. وحرصًا من وزارة التعليم على ديمومة تطوير أنظمتها التعليمية، واستجابة لرؤية المملكة العربية السعودية 2030 فقد بادرت إلى اعتماد مشروع تطوير نظام التعليم الثانوي إلى نظام "المسارات" بهدف إحداث تغيير حقيقي وشامل في المرحلة الثانوية.

ما الذي سيقدمه لك نظام المسارات في المرحلة الثانوية ؟

إن نظام المسارات يقدم أنموذجًا تعليميًا متميزًا وحديثًا للتعليم الثانوي بالمملكة العربية السعودية يسهم بكفاءة فيما يلي:

- تعزيز قيم المواطنة لديك من خلال التركيز عليها في جميع المواد؛ استجابة لمطالب التنمية المستدامة العالمية، والخطط التنموية في المملكة التي تؤكد على ترسيخ ثنائية القيم والهوية، وتقوم على تعاليم الإسلام، والوسطية، ومفهوم المواطنة، والانتماء.
- تأهيلك بما يتوافق والتخصصات المستقبلية في الجامعات والكليات أو المهن المطلوبة؛ لضمان مواءمة مخرجات التعليم مع متطلبات سوق العمل بشكل وثيق وحقيقي.
- تمكينك من متابعة تعليمك في المسار المفضل لديك في مراحل مبكرة وبخطط مركزة ومرتبطة، وفق ميولك وقدراتك.
- تمكينك من الالتحاق بالتخصصات العلمية والإدارية النوعية المرتبطة بسوق العمل ووظائف المستقبل.
- دمجك في بيئة تعليمية ممتعة ومحفزة داخل المدرسة قائمة على فلسفة بنائية، وممارسات تطبيقية ضمن مناخ تعليمي نشط.
- نقلك عبر رحلة تعليمية متكاملة من المرحلة الابتدائية حتى الجامعة، قائمة على امتداد منطقي للمسارات التخصصية منذ مرحلة التأسيس حتى نهاية المرحلة الثانوية.
- تسهيل عملية الانتقال إلى مرحلة ما بعد التعليم العام، حيث تتواءم المسارات مع التخصصات في مرحلة ما بعد الثانوية، ومع متطلبات سوق العمل، مما يجعل انتقالك للمرحلة اللاحقة يسيرًا وأكثر كفاءة.
- تزويدك بالمهارات التقنية المعينة لك على التعامل مع الحياة والتجاوب مع متطلبات سوق العمل.
- توسيع الفرص أمامك عبر خيارات متنوعة غير الجامعات مثل: الحصول على شهادات مهنية، والالتحاق بالكليات التطبيقية، والحصول على دبلومات وظيفية.

ما الجديد في مشروع تطوير المرحلة الثانوية (المسارات)؟

نظام المسارات نظام تعليمي قائم على التعلّم عبر المستويات الدراسية، ويتكوّن من تسعة فصول دراسية تُدرَّس في ثلاث سنوات، تتضمن سنة أولى مشتركة يدرس فيها الطالب مجالات علمية وإنسانية متنوّعة، تليها سنتان تخصصيتان، يُسكَّن الطالب بها في مسار عام وأربعة مسارات تخصصية تتسق مع ميوله وقدراته، وهي: المسار الشرعي، مسار إدارة الأعمال، مسار علوم الحاسب والهندسة، مسار الصحة والحياة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

ما الذي يجعل نظام المسارات الأفضل لك؟

1. **وجود مواد دراسية جديدة**: تتسق مع متطلبات الثورة الصناعية الرابعة والخطط التنموية، ورؤية المملكة 2030؛ تدرسها ضمن مسارك، وتهدف لتنمية مهارات التفكير العليا وحل المشكلات، وتنمية مهاراتك البحثية.
2. **برامج المجال الاختياري في المسار العام**: ويكون مبنيًا على احتياجات سوق العمل، حيث يمكنك الالتحاق بمجال اختياري محدد وفق مصفوفة مهارات وظيفية؛ لتحصل على شهادة مهنية بإتقان تلك المهارات بعد إتمامها.
3. **مقاييس فرز وتوجيه**: تضمن تحقيق كفاءتك وفاعليتك، وتساعدك على تحديد اتجاهك وميولك ومكامن القوة لديك؛ مما ينعكس على نجاحك في المستقبل.
4. **العمل التطوعي**: يعد أحد متطلبات تخرجك، مما يساعدك على توطيد علاقاتك الإنسانية، وبناء وتنمية وتماسك مجتمعك.
5. **التجسير**: تستطيع الانتقال من مسار إلى آخر وفق آليات محددة، فيمكنك حتى بعد نهاية السنة الثانية تغيير تخصصك.
6. **حصص الإتقان**: تطوير مستواك التحصيلي ومهاراتك من خلال تقديم حصص الإتقان الإثرائية والعلاجية.
7. **خيارات التعليم عن بعد والتعلم المدمج**: التي بنيت في نظام المسارات على أسس من المرونة والملاءمة والتفاعل والفعالية.
8. **خطة التسريع للمتطلبات الجامعية**: تقديم مقررات تغني عن دراستك لها في الجامعات.
9. **مشروع التخرّج**: يشترط أن تقدم مشروع تخرج في مجال تخصصك؛ لدمج خبراتك النظرية مع ممارساتك التطبيقية.
10. **شهادات مهنية ومهارية**: تمنح لك بعد إنجاز مهام محددة واختبارات معيّنة بالشراكة مع جهات تخصصية.

كيف أستطيع تحديد توجهي بعد السنة المشتركة؟

يُمنح الطالب الفرصة للانخراط في مجالات التعلم التي يستطيع أن يبدع ويتميز بها عبر مجموعة من المقاييس تساعده على اختيار التخصص المناسب له، والكشف عن ميوله بوقت مبكر وفق مهاراته وقدراته.

بماذا ينفرد بناء الخطة الدراسية في نظام المسارات؟

- تحقيق تعليم عادل ومتكافئ لجميع الطلاب، لذا فقد صمم الجدول الدراسي ليكون أكثر ثباتًا؛ مما يقلل الهدر والضغط النفسي لدى الطالب.
- بنيت الخطة وفق رؤية تكاملية للمرحلتين ما قبل وبعد التعليم الثانوي، بحيث تضمن للطالب رحلة تعليمية متكاملة.
- بنيت بشكل متوازن ووزِّعت على شكل مواد دراسية يكمل بعضها بعضاً؛ لتساعد الطالب على إبراز طاقاته، وتنمية ميوله ومواهبه.
- تتصف بالثبات، فهي موحدة بين الثانويات بشكل عام؛ مما يسهل انتقال الطالب من مدرسة إلى أخرى دون هدر.

المقدمة

الحمد لله والصلاة والسلام على نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين، وبعد:

تعد مادة الرياضيات من المواد الدراسية الأساسية التي تهيّئ للطالب فرص اكتساب مستويات عُليا من الكفايات التعليمية، مما يتيح له تنمية قدرته على التفكير وحل المشكلات، ويساعده على التعامل مع مواقف الحياة وتلبية متطلباتها.

ومن منطلق الاهتمام الذي توليه حكومة خادم الحرمين الشريفين بتنمية الموارد البشرية، وعيًا بأهمية دورها في تحقيق التنمية الشاملة، كان توجه وزارة التعليم نحو تطوير المناهج الدراسية وفي مقدمتها مناهج الرياضيات، بدءًا من المرحلة الابتدائية، سعيًا للارتقاء بمخرجات التعليم لدى الطلاب، والوصول بهم إلى مصاف أقرانهم في الدول المتقدمة.

وتتميز هذه الكتب بأنها تتناول المادة بأساليب حديثة، تتوافر فيها عناصر الجذب والتشويق، التي تجعل الطالب يقبل على تعلمها ويتفاعل معها، من خلال ما تقدمه من تدريبات وأنشطة متنوعة، كما تؤكد هذه الكتب على جوانب مهمة في تعليم الرياضيات وتعلمها، تتمثل فيما يأتي:

- الترابط الوثيق بين محتوى الرياضيات وبين المواقف والمشكلات الحياتية.
- تنوع طرائق عرض المحتوى بصورة جذابة مشوقة.
- إبراز دور المتعلم في عمليات التعليم والتعلم.
- الاهتمام بالمهارات الرياضية، والتي تعمل على ترابط المحتوى الرياضي وتجعل منه كلاً متكاملاً، ومن بينها: مهارات التواصل الرياضي، ومهارات الحس الرياضي، وحل المشكلات، ومهارات التفكير العليا.
- الاهتمام بتوظيف التقنية في المواقف الرياضية المختلفة.
- الاهتمام بتوظيف أساليب متنوعة في تقويم الطلاب بما يتناسب مع الفروق الفردية بينهم.

ولمواكبة التطورات العالمية في هذا المجال، فإن المناهج المطوَّرة والكتب الجديدة سوف توفر للمعلم مجموعة متكاملة من المواد التعليمية المتنوعة التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب، بالإضافة إلى البرمجيات والمواقع التعليمية، التي توفر للطالب فرصة توظيف التقنيات الحديثة والتواصل المبني على الممارسة، مما يؤكد دوره في عملية التعليم والتعلم.

ونحن إذ نقدّم هذه الكتب لأعزائنا الطلاب، لنأمل أن تستحوذ على اهتمامهم، وتلبي متطلباتهم وتجعل تعلمهم لهذه المادة أكثر متعة وفائدة.

والله ولي التوفيق

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

فهرس أقسام الكتاب

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

إليك عزيزي الطالب

ستركز في دراستك هذا العام على عدة موضوعات هندسية، تشمل ما يأتي:

- **المنطق الرياضي** واستعماله في البراهين الهندسية والجبرية.
- **العلاقات** بين **الزوايا والمستقيمات**.
- **العلاقات** في **المثلث**، وتطابق المثلثات، وتشابهها.
- **التحويلات الهندسية** والتماثل في الأشكال الثنائية والثلاثية الأبعاد.
- **خواص** **الأشكال الرباعية** ونظريات **الدائرة**.

وفي أثناء دراستك، ستتعلم طرائق لحل المسائل الهندسية وتمثيلها بصور متعددة وسوف تفهم لغة الرياضيات وتستعمل أدواتها، وتنمي قدراتك الذهنية وتفكيرك الرياضي.

كيف تستعمل كتاب الرياضيات؟

- **اقرأ** فقرة **فيما سبق** لتعرف ارتباط هذا الدرس بما درسته من قبل، ولتعرف أفكار الدرس الجديد اقرأ فقرة **والآن** .
- **ابحث** عن **المفردات** المظللة **باللون الأصفر** باللغتين العربية والإنجليزية ، واقرأ تعريف كل منها.
- **راجع** المسائل الواردة في **مثال** والمحلولة بخطوات تفصيلية؛ لتوضيح أفكار الدرس الرئيسة.
- **ارجع** إلى **إرشادات للدراسة** حيث تجد معلومات وتوجيهات تساعدك في متابعة الأمثلة المحلولة.
- **ارجع** إلى فقرة **قراءة الرياضيات** ؛ لتتذكر نُطق بعض الرموز والمصطلحات الرياضية.
- **اربط** بين المعنى اللغوي والمعنى الرياضي للمفردة، من خلال فقرة **ربط المفردات**
- **تذكَّر** بعض المفردات التي تعلَّمتها من قبل، بالرجوع إلى فقرة **مراجعة المفردات**
- **ارجع** إلى فقرة **تنبيه!** دائمًا لتعرف الأخطاء الشائعة التي يقع فيها كثير من الطلاب حول بعض المفاهيم الرياضية فتجتنبها.
- **ارجع** إلى **الصيغ والرموز** في آخر الكتاب لتعرف الرموز التي تعلمتها في المرحلة المتوسطة وما يقابلها في المرحلة الثانوية، ولتعرف أيضًا أهم الصيغ والرموز التي وردت في هذا الكتاب.
- **ارجع** إلى المثال المشار إليه مقابل بعض التمارين في فقرتي **تأكد** و **تدرب وحل المسائل** ليساعدك على حل هذه التمارين وما شابهها.
- **نفِّذ** **اختبار الفصل** في نهاية كل فصل، بعد أن تُراجع أفكار الدرس الرئيسة في **دليل الدراسة والمراجعة** . أو بعد مراجعة ما دوَّنته من أفكار في **المطويات**
- **استعن** بصفحتَي **الإعداد للاختبارات** ؛ لتتعرف أنواع أسئلة الاختبارات وبعض طرق حلِّها.
- **نفذ** **الاختبار التراكمي** في نهاية كل فصل لمراجعة الأفكار الرئيسة للفصل وماقبله من فصول.

القسم الأول

الفهرس

الفصل 1 التبرير والبرهان

الفهرس

الفصل 2 التوازي والتعامد

الفصل **1**

التبرير والبرهان
Reasoning and Proof

فيما سبق:

درستُ القطع المستقيمة وعلاقات الزوايا.

والآن:

- أكتب تخمينات، وأجد أمثلة مضادة للعبارات.
- أستعمل التبرير الاستنتاجي للتوصل إلى نتيجة صحيحة.
- أكتب براهين تتضمَّن نظريات القطع المستقيمة والزوايا.

لماذا؟

العلوم والطبيعة: يستعمل علماء الأحياء التبريرات الاستنتاجية والاستقرائية لاتخاذ القرارات، ووضع الاستنتاجات المنطقية عن مملكة الحيوانات.

المطويات منظم أفكار

التبرير والبرهان: اعمل هذه المطوية؛ لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول الفصل 1، مبتدئًا بورقة من دفتر الملاحظات.

1 **اطوِ** الورقة طوليًّا، بحيث تكون حافتها بمحاذاة الثقوب الجانبية.

2 **قص** خمسة أشرطة كما يظهر في الشكل أدناه.

3 **عنوِن** الأشرطة كما في الشكل أدناه.

التهيئة للفصل 1

تشخيص الاستعداد:

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي عند قيمة x المُعطاة.

1) $4x + 7 , x = 6$
2) $180 (x - 2) , x = 8$
3) $5x^2 - 3x , x = 2$
4) $\frac{x(x-3)}{2} , x = 6$
5) $x + (x + 1) + (x + 2) , x = 3$

اكتب كل تعبير لفظي مما يأتي على صورة عبارة جبرية:

6) أقل من خمسة **أمثال** عدد بثمانية.
7) أكثر من مربع عدد بثلاثة.

حل كل معادلة فيما يأتي:

8) $8x - 10 = 6x$
9) $18 + 7x = 10x + 39$
10) $3(11x - 7) = 13x + 25$
11) $\frac{3}{2}x + 1 = 5 - 2x$
12) **قراءة:** اشترت عائشة 4 كتب بقيمة 52 ريالًا؛ لتقرأها في أثناء الإجازة الصيفية. إذا كانت الكتب متساوية السعر، فاكتب معادلة لإيجاد ثمن الكتاب الواحد، ثم حُلَّها.

استعمل الشكل المجاور في مثال 3 للإجابة عما يأتي:

13) عيِّن زاويتين منفرجتين متقابلتين بالرأس.
14) عيِّن زاويتين متتامتين.
15) عيِّن زاويتين متجاورتين متكاملتين في آن واحد.
16) إذا كان: $m\angle DXB = 116°$ و $m\angle EXA = (3x + 2)°$، فأوجد قيمة x.
17) إذا كان: $m\angle CXD = (6x - 13)°$ و $m\angle DXE = (10x + 7)°$، فأوجد قيمة x.

مراجعة سريعة

مثال 1

أوجد قيمة $x^2 - 2x + 11$ إذا كانت $x = 6$.

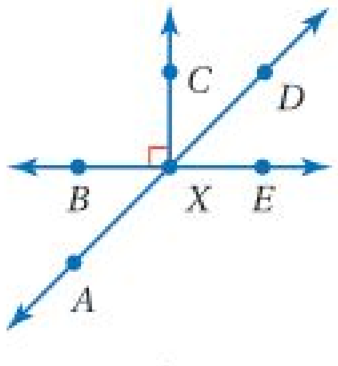
$x^2 - 2x + 11$	العبارة المعطاة
$= (6)^2 - 2(6) + 11$	عوِّض
$= 36 - 2(6) + 11$	أوجد قيم القوى
$= 36 - 12 + 11$	اضرب
$= 35$	بسِّط

مثال 2

حل المعادلة $36x - 14 = 16x + 58$.

$36x - 14 = 16x + 58$	المعادلة المعطاة
$36x - 14 - 16x = 16x + 58 - 16x$	اطرح $16x$ من الطرفين
$20x - 14 = 58$	بسِّط
$20x - 14 + 14 = 58 + 14$	اجمع 14 للطرفين
$20x = 72$	بسِّط
$\frac{20x}{20} = \frac{72}{20}$	اقسم الطرفين على 20
$x = 3.6$	بسِّط

مثال 3



إذا كان: $m\angle BXA = (3x + 5)°$ ، $m\angle DXE = 56°$، فأوجد قيمة x.

$m\angle BXA = m\angle DXE$	زاويتان متقابلتان بالرأس
$3x + 5 = 56$	عوِّض
$3x = 51$	اطرح 5 من الطرفين
$x = 17$	اقسم الطرفين على 3

1-1 التبرير الاستقرائي والتخمين
Inductive Reasoning and Conjecture

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ استعمال البيانات لإيجاد أنماط والتوصل إلى توقعات.

(مهارة سابقة)

والآن:

- أكتب تخمينات مبنية على التبرير الاستقرائي.
- أجد أمثلة مضادة.

المفردات:

التبرير الاستقرائي
inductive reasoning

التخمين
conjecture

المثال المضاد
counterexample

مراجعة المفردات

المتتابعة
هي مجموعة من الأعداد أو الأشياء المنظمة بترتيبٍ معينٍ.

تاريخ الرياضيات

أبو علي الحسن بن الهيثم
354 - 430 هـ
عالم موسوعي من أعظم علماء الرياضيات والفيزياء، اعتمد في بحوثه على منهجين هما: الاستقراء، والاستنباط وفي الحالتين كان يعتمد على التجربة والملاحظة.

لماذا؟

في أبحاث التسويق، يتم تحليل إجابات مجموعة من الأشخاص عن أسئلة محددة حول المنتج، ثم يتم البحث عن نمطية معينة في الإجابات حتى الوصول إلى نتيجة. وتسمى هذه العملية التبرير الاستقرائي.

التخمين: **التبرير الاستقرائي** هو تبرير تُستعمل فيه أمثلة محددة للوصول إلى نتيجة. وعندما تفترض استمرار نمط على نفس الوتيرة، فإنك تستعمل التبرير الاستقرائي، وتُسمّى العبارة النهائية التي توصلت إليها باستعمال التبرير الاستقرائي **تخمينًا**.

مثال 1 الأنماط والتخمين

اكتب تخمينًا يصف النمط في كلٍّ من المتتابعات الآتية، ثم استعمله لإيجاد الحد التالي في كلٍّ منها.

a) مواعيد وصول الحافلات إلى محطة الركوب هي: 8:30 صباحًا، 9:10 صباحًا، 9:50 صباحًا، 10:30 صباحًا، ......

الخطوة 1: ابحث عن نمط.

8:30 صباحًا، 9:10 صباحًا، 9:50 صباحًا، 10:30 صباحًا ......

40 دقيقة 40 دقيقة 40 دقيقة

الخطوة 2: ضع تخمينًا: يزيد موعد وصول الحافلة 40 دقيقة عن موعد وصول الحافلة التي سبقتها.

الخطوة 3: جد الحدّ التالي:

موعد وصول الحافلة التالية سوف يكون 10:30 صباحًا + 40 دقيقة = 11:10 صباحًا.

الحد التالي هو: 11:10 صباحًا.

b)

4 10 18 28 40 ......

الخطوة 1: ابحث عن نمط

4 10 18 28 40

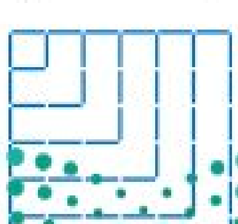
+6 +8 +10 +12

تزداد أعداد القطع المستقيمة بمقدار ...... ,12 ,10 ,8 ,6

الخطوة 2: ضع تخمينًا: يزيد عدد القطع المستقيمة في كل شكل عن الشكل الذي يسبقه بمقدار الزيادة السابقة مضافًا لها 2.

الخطوة 3: جد الحدّ التالي: يزيد عدد القطع المستقيمة في الشكل التالي على سابقه بمقدار 12 + 2 أي 14 قطعة مستقيمة.

الحد التالي هو شكل يحتوي على 54 قطعة مستقيمة، وهو:



تحقق: ارسم الشكل التالي؛ لكي تتحقق من صحة تخمينك. ✓

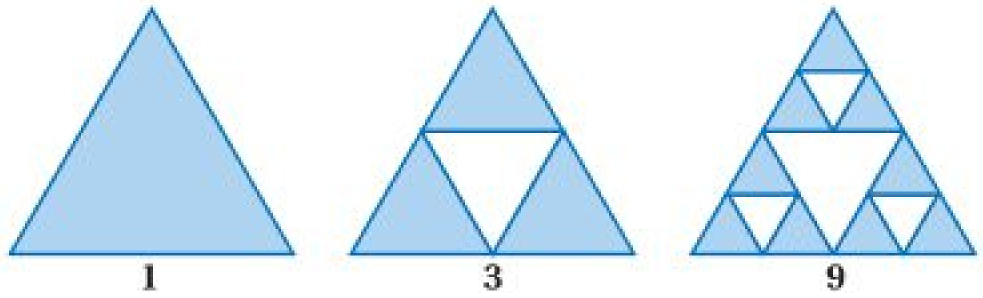
✓ تحقق من فهمك

اكتب تخمينًا يصف النمط في كلٍّ من المتتابعات الآتية، ثم استعمله لإيجاد الحد التالي في كلٍّ منها.

1A) متتابعة أشهر: صفر، رجب، ذو الحجة، جمادى الأولى، ......

1B) $10, 4, -2, -8, \ldots\ldots$

1C)



....

> **إرشادات للدراسة**
>
> اختبر جميع العمليات الحسابية الأساسية بما فيها الجذور والقوى عند البحث عن قاعدة تحدد النمط، وقد تتضمن القاعدة، استعمال عمليتين حسابيتين.

لوضع تخمينات جبرية أو هندسية يجب أن تقدم أمثلة.

مثال 2 التخمينات الجبرية والهندسية

ضع تخمينًا لكل قيمة أو علاقة هندسية لكلٍّ مما يأتي، وأعطِ أمثلة عددية أو ارسم أشكالًا تساعد على الوصول لهذا التخمين.

a) ناتج جمع عددين فرديين.

الخطوة 1: اكتب أمثلة.

$$1 + 3 = 4\ ,\ 1 + 5 = 6\ ,\ 3 + 5 = 8\ ,\ 7 + 9 = 16$$

الخطوة 2: ابحث عن نمط.

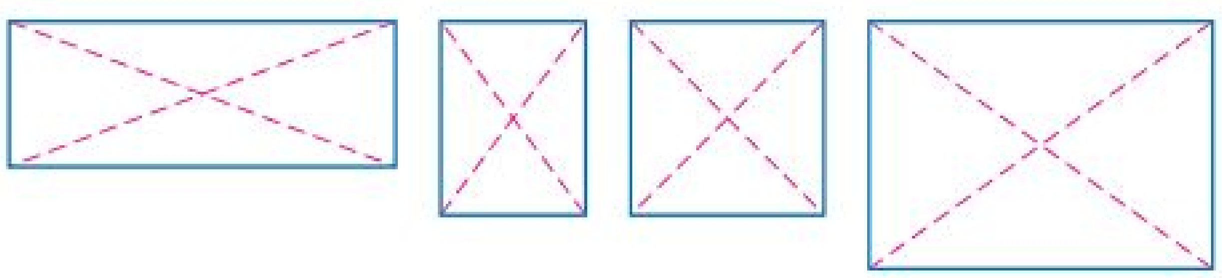
لاحظ أن الأعداد 16 ,8 ,6 ,4 جميعها زوجية.

الخطوة 3: ضع تخمينًا.

ناتج جمع عددين فرديين هو عدد زوجي.

b) القطعتان المستقيمتان الواصلتان بين كل رأسين متقابلين في المستطيل.

الخطوة 1:



الخطوة 2: لاحظ أن أطوال القطع المستقيمة الواصلة بين كل رأسين متقابلين في كل مستطيل تبدو متساوية. استعمل المسطرة أو الفرجار للتحقق من ذلك.

الخطوة 3: التخمين: القطعتان المستقيمتان الواصلتان بين كل رأسين متقابلين في المستطيل متطابقتان.

> **إرشادات للدراسة**
>
> **الأمثلة المؤيدة والبراهين**
> الأمثلة المؤيدة للتخمين ليست كافية لإثبات صحته، ولإثبات صحة تخمين جبري أو هندسي، يجب تقديم مبررات صحيحة في صورة تعريفات أو نظريات أو مسلمات تسمى برهانًا. وسوف تتعلم المزيد عن البرهان في الدرس **1-5**.

✓ تحقق من فهمك

2A) ناتج جمع عددين زوجيين.

2B) العلاقة بين AB و EF، إذا كانت: $AB = CD$ و $CD = EF$

2C) مجموع مربعَي عددين كليين متتاليين.

تعتمد التخمينات في المواقف الحياتية على بيانات يتم جمعها حول موضوع التخمين.

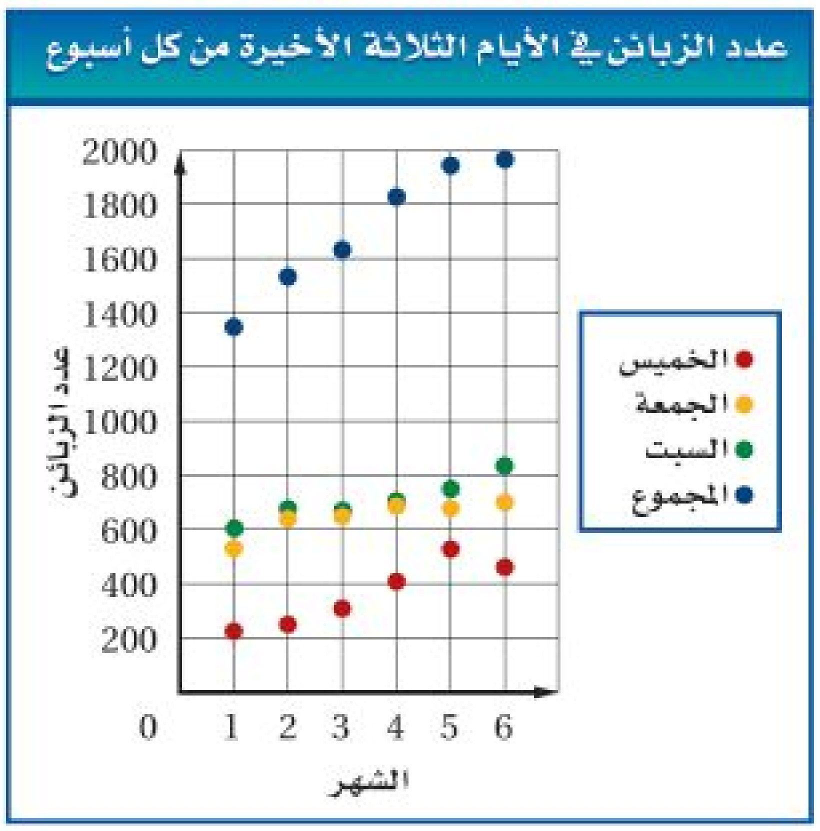
مثال 3 من واقع الحياة — وضع تخمين من مجموعة بيانات

حلاقة: قام صاحب صالون حلاقة بجمع معلومات حول عدد الزبائن الذين يرتادون الصالون أيام الخميس والجمعة والسبت مدة ستة أشهر؛ كي يقرر ما إذا كان يجب زيادة عدد الحلاقين العاملين لديه في الأيام الثلاثة الأخيرة من كل أسبوع.

عدد الزبائن في الأيام الثلاثة الأخيرة من كل أسبوع						
اليوم	الشهر 1	الشهر 2	الشهر 3	الشهر 4	الشهر 5	الشهر 6
الخميس	225	255	321	406	540	450
الجمعة	552	635	642	692	685	705
السبت	603	658	652	712	746	832
المجموع	1380	1548	1615	1810	1971	1987

a) أنشئ التمثيل البياني الأنسب لعرض هذه البيانات.

بما أنك تبحث عن نمط له علاقة بالزمن، إذن استعمل شكل الانتشار لعرض هذه البيانات، بجعل المحور الأفقي يمثل الأشهر والمحور الرأسي يمثل عدد الزبائن. ارسم كل مجموعة من البيانات باستعمال لون مختلف، وضع مفتاحًا للتمثيل البياني.



b) ضع تخمينًا يعتمد على هذه البيانات، مفسرًا كيف يؤيد التمثيل البياني هذا التخمين.

ابحث عن نمط في هذه البيانات. لاحظ أن عدد الزبائن لكلٍّ من الأيام الثلاثة يبدو آخذًا في الازدياد بمرور الأشهر، كما أن المجموع الكلي يزداد كل شهر عن الشهر السابق.

بيانات هذا المسح تؤيد تخمين صاحب صالون الحلاقة بأن العمل في الأيام الثلاثة الأخيرة من كل أسبوع يزداد؛ مما يتطلب زيادة عدد الحلاقين العاملين لديه في هذه الأيام.

الربط مع الحياة

يتطلب العمل في صالونات الحلاقة مراعاة شروط صحية تضمن عدم انتقال الأمراض، ومنها غسل اليدين وتعقيم الأدوات المستخدمة بعد كل عملية حلاقة، وعدم الاستعمال الخاطئ للأدوات والمستحضرات.

تحقق من فهمك

3) **أسعار:** يبين الجدول المجاور سعر منتج خلال السنوات من 1414هـ إلى 1439هـ .

السنة	السعر (ريال)
1414	20
1419	22
1424	29
1429	32
1434	37
1439	41

A) أنشئ التمثيل البياني الأنسب لعرض هذه البيانات.

B) ضع تخمينًا لسعر المنتج عام 1444هـ.

C) هل من المنطقي القول بأن هذا النمط سيستمر بمرور الزمن؟ وإذا لم يكن كذلك، فكيف سيتغير؟ فسر إجابتك.

إيجاد أمثلة مضادة: إثبات صحة تخمين معين لكل الحالات، يتطلب تقديمَ برهان لذلك التخمين. بينما لإثبات عدم صحة التخمين يكفي تقديم مثال واحد معاكس للتخمين، وقد يكون عددًا أو رسمًا أو عبارة، وهذا المثال المعاكس يُسمى **المثال المضاد**.

ربط المفردات

المثال المضاد

المعنى اللغوي

المضاد هو المخالف.

المعنى الرياضي

المثال المضاد هو مثال معاكس لمثال مُعطىً.

مثال 4 إيجاد أمثلة مضادة

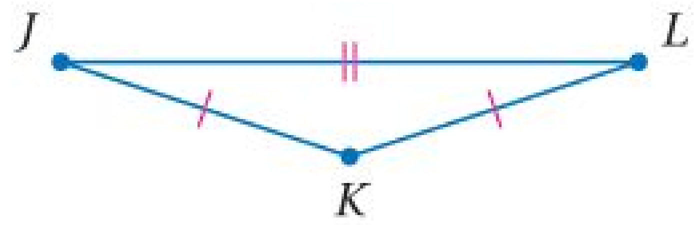
أعط مثالًا مضادًا يبيّن أن كلًّا من التخمينات الآتية خاطئة.

a) إذا كان n عددًا حقيقيًّا، فإن $n^2 > n$.

إذا كان n يساوي 1، فإن التخمين خاطئ؛ لأن $1^2 \ngtr 1$

b) إذا كان $JK = KL$، فإن K منتصف $\overline{JL}$.

عندما لا تقع J, K, L على استقامة واحدة، يكون التخمين خاطئًا. ففي الشكل المجاور $JK = KL$، ولكن K ليست نقطة منتصف $\overline{JL}$.



تحقق من فهمك

4A) إذا كان n عددًا حقيقيًّا، فإن $-n$ يكون سالبًا.

4B) إذا كان: $\angle ABE \cong \angle DBC$، فإن $\angle ABE$ و $\angle DBC$ متقابلتان بالرأس.

قراءة الرياضيات

يرمز للنقطة بحرف كبير مثل: $A, B, C, \ldots$، ويرمز للقطعة المستقيمة التي طرفاها A, B بالرمز $\overline{BA}$ أو $\overline{AB}$، ويرمز للمسافة بين النقطتين A, B بالرمز AB

تأكد

المثال 1

اكتب تخمينًا يصف النمط في كل متتابعة مما يأتي، ثم استعمله لإيجاد الحد التالي في كلٍّ منها:

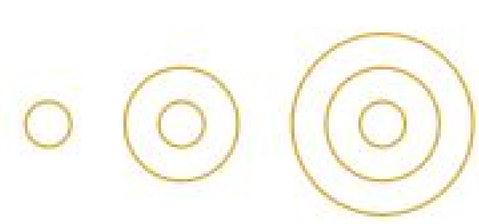
1) التكلفة: 4.50 ريالاتٍ، 6.75 ريالاتٍ، 9.00 ريالاتٍ، ......

2) مواعيد انطلاق الحافلات: 10:15 صباحًا، 11:00 صباحًا، 11:45 صباحًا، ......

3)

....

4)



....

5) 3, 3, 6, 9, 15, ...

6) 2, 6, 14, 30, 62, ...

المثال 2

ضع تخمينًا لكل قيمة أو علاقة هندسية مما يأتي:

7) ناتج ضرب عددين زوجيين.

8) العلاقة بين العددين a و b إذا كان $a + b = 0$.

9) العلاقة بين مجموعة النقاط في المستوى التي تبعد المسافة نفسها عن النقطة A.

10) العلاقة بين $\overline{AP}$ و $\overline{PB}$ إذا كانت M نقطة منتصف $\overline{AB}$ والنقطة P نقطة منتصف $\overline{AM}$.

المثال 3 **11)** **إنتاج مصنع:** استعمل الجدول المجاور الذي يبين عدد القطع المنتجة في مصنع لبعض السنوات.

a) أنشئ التمثيل البياني الأنسب لعرض هذه البيانات.

b) ضع تخمينًا لعدد القطع في سنة 2022م .

عدد القطع المنتجة لمصنع

السنة	عدد القطع (بالملايين)
2012	5
2013	7.2
2014	9.2
2015	14.1
2016	19.7
2017	28.4

المثال 4 **أعطِ مثالًا مضادًّا يبين أن كلًّا من التخمينات الآتية خاطئة.**

12) إذا كانت $\angle A$ و $\angle B$ متتامتين، فإن لهما ضلعًا مشتركًا.

13) إذا قطع نصف مستقيم قطعةً مستقيمةً عند منتصفها، فإنه يعامدها.

تدرب وحل المسائل

المثال 1 **اكتب تخمينًا يصف النمط في كل متتابعة مما يأتي، ثم استعمله لإيجاد الحد التالي في كلٍّ منها.**

14) $0, 2, 4, 6, 8$

15) $3, 6, 9, 12, 15$

16) $4, 8, 12, 16, 20$

17) $2, 22, 222, 2222$

18) $1, 4, 9, 16$

19) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$

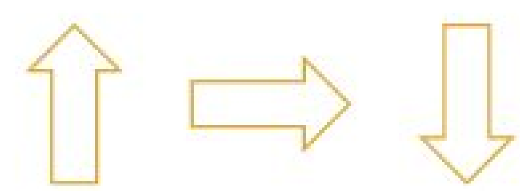
20) مواعيد الوصول: 10:00 صباحًا، 12:30 مساءً ، 3:00 مساءً، ......

21) النسبة المئوية للرطوبة: 100% , 93% , 86% , ...

22) أيام العمل: الأحد، الثلاثاء، الخميس، ......

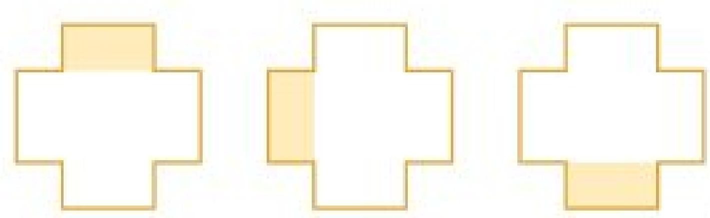
23) اجتماعات النادي: المحرّم، ربيع أول، جمادى الأولى، ......

24)



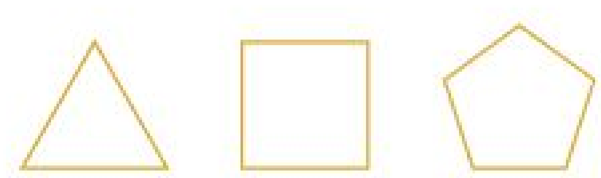
......

25)



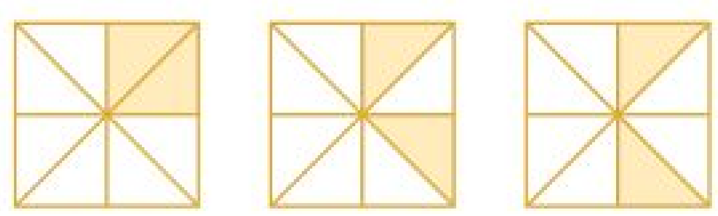
......

26)



......

27)



......

28) **رياضة:** بدأ ماجد تمارين الجري السريع قبل خمسة أيام. فركض في اليوم الأول 0.5 km . وفي الأيام الثلاثة التالية 0.75 km, 1 km, 1.25 km . إذا استمر تمرينه على هذا النمط، فما المسافة التي يقطعها في اليوم السابع؟

المثال 2 **ضع تخمينًا لكل قيمة أو علاقة هندسية مما يأتي:**

29) ناتج ضرب عددين فرديين.

30) ناتج ضرب عدد في اثنين، مضافًا إليه واحد.

31) العلاقة بين العددين a و b ، إذا كان $ab = 1$.

32) العلاقة بين $\overline{AB}$ ومجموعة النقاط التي تبعد مسافات متساوية عن A و B .

33) العلاقة بين حجم المنشور وحجم الهرم اللذين لهما القاعدة نفسها والارتفاع نفسه.

المثال 3

34) **مدارس:** يبين الجدول المجاور عدد الطلاب في إحدى المدارس الثانوية خلال الفترة من 1435هـ إلى 1438هـ.

السنة	عدد الطلاب
1435	190
1436	210
1437	240
1438	260

a) أنشئ التمثيل البياني الأنسب لعرض هذه البيانات.

b) ضع تخمينًا معتمدًا على بيانات الجدول، واشرح كيف يؤيِّد تمثيلك البياني هذا التخمين.

المثال 4

حدد ما إذا كان أيٌّ من التخمينات الآتية صحيحًا أو خاطئًا، وإذا كان التخمين خاطئًا، فأعط مثالًا مضادًّا.

35) إذا كان n عددًا أوليًّا، فإن $n + 1$ ليس أوليًّا.

36) إذا كان x عددًا صحيحًا، فإن $-x$ عدد موجب.

37) في المثلث ABC إذا كان: $(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$، فإن $\triangle ABC$ قائم الزاوية.

38) إذا كانت مساحة مستطيل تساوي $20\ m^2$، فإن طوله يساوي $10\ m$، وعرضه $2\ m$.

39) **سكان:** استعمل الجدول أدناه لتعطي مثالًا مضادًّا لكلٍّ من العبارتين الآتيتين:

المنطقة الإدارية	العدد التقريبي للسكان بالمليون	النسبة المئوية من عدد سكان المملكة
الرياض	8.1	24.8%
مكة المكرمة	8.5	26%
المدينة المنورة	2.2	6.7%
الشرقية	5	15.3%

المصدر: مسح الخصائص السكانية 2017م - الهيئة العامة للإحصاء.

a) النسبة المئوية لمجموع عدد سكان المناطق الإدارية الأربع الواردة في الجدول أقل من 25% من سكان المملكة العربية السعودية.

b) يزيد عدد سكان أيٍّ من المناطق الإدارية الأربع على ثلاثة ملايين نسمةٍ.

الربط مع الحياة

منطقة مكة المكرمة هي أكثر مناطق المملكة تعدادًا للسكان، وتضم 12 محافظة هي: مكة المكرمة وجدة والطائف والقنفذة والليث ورابغ والجموم وخليص والكامل والخرمة ورنية وتربه.

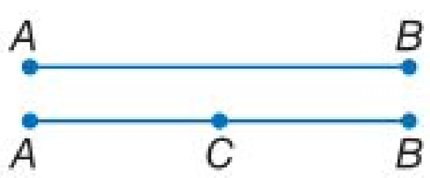
المصدر: الهيئة العامة للإحصاء.

40) **تخمين جولدباخ:** ينص تخمين جولد باخ على أنه يمكن كتابة أي عدد زوجي أكبر من 2 على صورة مجموع عددين أوليين. فعلى سبيل المثال: $4 = 2 + 2, 6 = 3 + 3, 8 = 3 + 5$.

a) أثبت أن التخمين صحيح للأعداد الزوجية من 10 إلى 20

b) إذا أُعطيت التخمين الآتي: يمكن كتابة أي عدد فردي أكبر من 2 على صورة مجموع عددين أوليين. فهل التخمين صحيح أم خاطئ؟ إذا كان خاطئًا، فأعط مثالًا مضادًّا.

41) **هندسة:** النقطتان الواقعتان على مستقيم تشكِّلان قطعة مستقيمة، مثل $\overline{AB}$. إذا أُضيفت نقطة أخرى C على القطعة المستقيمة $\overline{AB}$، فإن النقاط الثلاث تشكِّل ثلاث قطع مستقيمة.



a) ما عدد القطع المستقيمة المختلفة التي تتشكل من أربع نقاط على مستقيم؟ ومن خمس نقاط على مستقيم؟

b) ضع تخمينًا لعدد القطع المستقيمة المختلفة التي تتشكل من n نقطة على مستقيم.

c) اختبر تخمينك بإيجاد عدد القطع المستقيمة المختلفة التي تتشكل من 6 نقاط.

مسائل مهارات التفكير العليا

42) **اكتشف الخطأ:** يتناقش أحمد وعلي في موضوع الأعداد الأولية. فيقول أحمد إن جميع الأعداد الأولية أعداد فردية. في حين يقول عليٌّ: ليست جميع الأعداد الأولية فردية. هل قول أيٍّ منهما صحيح؟ فسِّر إجابتك.

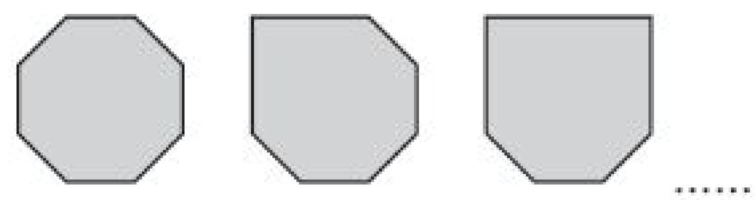
43) **مسألة مفتوحة:** اكتب متتابعة عددية تتبع حدودها نمطين مختلفين، ووضِّح النمطين.

44) **تبرير:** تأمّل التخمين: "إذا كانت نقطتان تبعُدان المسافة نفسها عن نقطة ثالثة معلومة، فإن النقاط الثلاث تقع على استقامة واحدة". هل هذا التخمين صحيح أم خاطئ؟ وإذا كان خاطئًا، فأعط مثالًا مضادًّا.

45) **اكتب:** افترض أنك تُجري مسحًا. اختر موضوعًا واكتب ثلاثة أسئلة يتضمنها مسحُك. كيف تستعمل التبرير الاستقرائي مع البيانات التي تحصل عليها من خلال هذا المسح؟

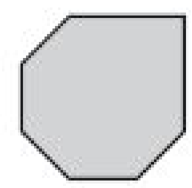
تدريب على اختبار

46) انظر إلى النمط الآتي:

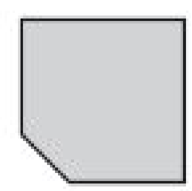


ما الشكل التالي في النمط؟

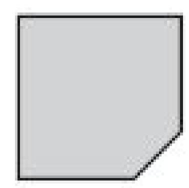
A



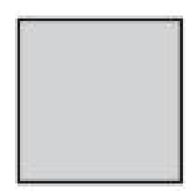
B



C



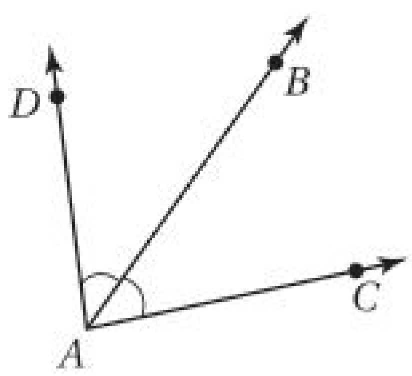
D



47) إذا علمت أن $a = 10$, $b = 1$ ، فما قيمة العبارة الآتية؟

$2b + ab \div (a + b)$

48) في الشكل المجاور، $\overleftrightarrow{AB}$ محور تناظر $\angle DAC$. أيُّ الاستنتاجات الآتية ليس صحيحًا بالضرورة؟



A $\angle DAB \cong \angle BAC$

B $\angle DAC$ زاوية قائمة.

C A و D على استقامة واحدة.

D $2(m\angle BAC) = m\angle DAC$

مراجعة تراكمية

49) **أحواض سمك:** اشترى باسم حوضَ سمكٍ صغير على شكل أسطوانة دائرية قائمة، طول قطر قاعدتها 25 cm ، وارتفاعها 35 cm، أوجد حجم الماء اللازم لِملءِ الحوض. **(مهارة سابقة)**

أوجد محيط $\triangle ABC$ إذا أُعطيت إحداثيات رؤوسه في كلٍّ مما يأتي: **(مهارة سابقة)**

50) $A(1, 6), B(1, 2), C(3, 2)$

51) $A(-3, 2), B(2, -9), C(0, -10)$

52) **جبر:** قياس زاويتين متتامتين يساوي $(16z - 9)°$ و $(4z + 3)°$. أوجد قياس كلٍّ منهما. **(مهارة سابقة)**

53) **جبر:** إذا علمت أن: $x = 3$ و $y = -4$ و $z = -5$، فأوجد قيمة: $5|x + y| - 3|2 - z|$. **(مهارة سابقة)**

استعد للدرس اللاحق

جبر: اكتب كلمة "صح" بجوار العبارة الصحيحة وكلمة "خطأ" بجوار العبارة الخاطئة.

54) كل مربع هو مستطيل

55) $5 - 2 \times 3 = 9$

56) العدد 9 عدد أولي

1-2 المنطق
Logic

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

فيما سبق:
درستُ إيجاد أمثلة مضادة لتخمينات خاطئة.
(الدرس 1-1)

والآن:
- أُعيّن قيم الصواب لعبارة الوصل وعبارة الفصل.
- أمثّل عبارتَي الوصل والفصل باستعمال أشكال فن.

المفردات:
العبارة
statement
قيمة الصواب
truth value
نفي العبارة
negation
العبارة المركبة
compound statement
عبارة الوصل
conjunction
عبارة الفَصل
disjunction
جدول الصواب
truth table

لماذا؟

عند إجابتك عن «أسئلة من النوع صح أو خطأ» في اختبار، فإنك تستعمل مبدأً أساسيًّا في المنطق.
فمثلًا انظر إلى خريطة المملكة العربية السعودية وأجب عن الخبر التالي بصحيح أو خاطئ: أبها مدينة سعودية.
أنت تعرف أنه يوجد إجابة وحيدة صائبة، إما صحيح أو خاطئ.

تحديد قيم الصواب: **العبارة** هي جملة خبرية لها حالتان فقط إما أن تكون صائبة أو تكون خاطئة، ولا تحتمل أي حالة أخرى. وصواب العبارة (T) أو خطؤها (F) يسمى **قيمة الصواب** لها، ويرمز للعبارة برمز مثل p أو q.

p : المستطيل شكل رباعيّ   قيمة الصواب: T

نفي العبارة يفيد معنًى مُضادًّا لمعنى العبارة. وقيمة الصواب له هو عكس قيمة الصواب للعبارة الأصلية، فمثلًا: نفي العبارة p أعلاه هو $\sim p$ ، أو " ليس p " ، حيث:

$\sim p$: المستطيل ليس شكلًا رباعيًّا   قيمة الصواب: F

يمكنك ربط عبارتين أو أكثر باستعمال الرابط (و) ، أو الرابط (أو) لتكوين **عبارة مركبة**. والعبارة المركبة التي تحتوي (و) تُسمى **عبارة وصل**. وتكون عبارة الوصل صائبة فقط عندما تكون جميع العبارات المكونة لها صائبة.

p: المستطيل شكل رباعيّ   قيمة الصواب: T

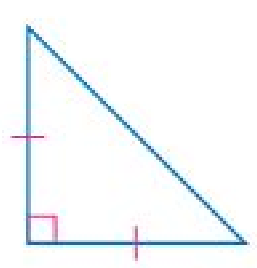
q: المستطيل مضلّع محدّب   قيمة الصواب: T

p و q: المستطيل شكل رباعي والمستطيل مضلع محدّب.

بما أن كلتا العبارتين p و q صائبتان، فإن عبارة الوصل p و q صائبة.
تكتب عبارة الوصل p و q بالرموز على الصورة $p \wedge q$.

مثال 1 قيم الصواب لعبارات الوصل

استعمل العبارات p, q, r والشكل المجاور لكتابة عبارة الوصل في كلٍّ مما يأتي. ثم أوجد قيمة الصواب لها مبررًا إجابتك:



p: الشكل مثلث.
q: في الشكل ضلعان متطابقان.
r: جميع زوايا الشكل حادة.

a) p و r

p و r: الشكل مثلث وجميع زوايا الشكل حادة.
العبارة p صائبة، لكن العبارة r خاطئة، إذن عبارة الوصل p و r خاطئة.

b) $q \wedge \sim r$

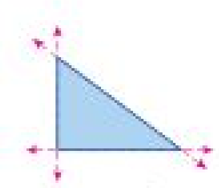
$q \wedge \sim r$: في الشكل ضلعان متطابقان، وليس جميع زوايا الشكل حادة.
بما أن كلا العبارتين q و $\sim r$ صائبتان، فإن عبارة الوصل $q \wedge \sim r$ صائبة.

تحقق من فهمك

1A) $p \wedge q$ **1B)** ليس p و ليس r

إرشادات للدراسة

المضلّع المحدّب أو المقعر:
يكون المضلع محدبًا إذا لم يحوِ امتداد أيٍّ من أضلاعه نقاطًا داخله، وعكس ذلك يكون مقعرًا.


مضلع محدّب


مضلع مقعر

تسمى العبارة المركبة التي تحتوي (أو) **عبارة فصل**.

p: درس مالك الهندسة.

q: درس مالك الكيمياء.

p أو q: درس مالك الهندسة أو درس مالك الكيمياء.

تكون عبارة الفَصْل صائبة إذا كانت إحدى العبارات المكونة لها صائبة، وتكون خاطئة إذا كانت جميع العبارات المكونة لها خاطئة. فإذا درس مالك الهندسة أو الكيمياء أو كليهما، فإن عبارة الفصل p أو q صائبة. وإذا لم يدرس مالك أيًّا من الهندسة والكيمياء، فإن عبارة الفصل p أو q خاطئة.

تكتب عبارة الفصل p أو q بالرموز على الصورة $p \vee q$.

تنبيه !

نفي العبارة

كما أن معكوس العدد الصحيح لا يكون سالبًا دائمًا، فإن نفي العبارة ليس بالضرورة أن يكون خاطئًا، وإنما له عكس قيمة صواب العبارة الأصلية.

مثال 2 قيم الصواب لعبارات الفصل

استعمل العبارات p, q, r والصورة المجاورة؛ لكتابة عبارة الفصل في كلٍّ مما يأتي، ثم أوجد قيمة الصواب لها مبررًا إجابتك.

p: يناير من أشهر فصل الربيع.

q: عدد أيام شهر يناير 30 يومًا فقط.

r: يناير هو أول أشهر السنة الميلادية.

a) q أو r

q أو r: عدد أيام شهر يناير 30 يومًا فقط أو يناير هو أول أشهر السنة الميلادية.

q أو r صائبة لأن العبارة r صائبة. وكون العبارة q خاطئة لا يؤثر.

b) $p \vee q$

$p \vee q$: يناير من أشهر فصل الربيع، أو عدد أيام شهر يناير 30 يومًا فقط.

بما أن كلًّا من العبارتين خاطئة، فإن $p \vee q$ خاطئة.

c) $\sim p \vee r$

$\sim p \vee r$: يناير ليس من أشهر فصل الربيع أو يناير هو أول أشهر السنة الميلادية.

$\sim p \vee r$ صائبة؛ لأن $\sim p$ صائبة و r صائبة أيضًا.

الربط مع الحياة

فصول السنة بالترتيب:

الشتاء: 21 ديسمبر - 20 مارس من العام التالي.

الربيع: 21 مارس - 20 يونيو

الصيف: 21 يونيو - 20 سبتمبر

الخريف: 21 سبتمبر - 20 ديسمبر

تحقق من فهمك

2A) p أو r **2B)** $q \vee \sim r$ **2C)** $p \vee \sim q$

ملخص المفهوم نفي العبارة، عبارة الوصل، عبارة الفَصل

أضف إلى مطويتك

العبارة	التعبير اللفظي	الرموز
نفي العبارة	عبارة تفيد معنًى مضادًا لمعنى العبارة الأصلية، وقيمة الصواب لها عكس قيمة صواب العبارة الأصلية.	$\sim p$، وتُقرأ ليس p
عبارة الوصل	عبارة مركبة ناتجة عن ربط عبارتين أو أكثر باستعمال (و).	$p \wedge q$، وتُقرأ p و q
عبارة الفَصل	عبارة مركبة ناتجة عن ربط عبارتين أو أكثر باستعمال (أو).	$p \vee q$، وتقرأ p أو q

يمكن تنظيم قيم الصواب للعبارات في جداول تسمى **جداول الصواب**. ويمكن استعمال جداول الصواب لتحديد قيم الصواب لنفي العبارة ولعبارتَي الوصل والفصل.

نفي العبارة	
p	$\sim p$
T	F
F	T

عبارة الوصل		
p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

عبارة الفصل		
p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

وكذلك يمكنك استعمال جداول الصواب أعلاه لإنشاء جداول الصواب للعبارات المركبة الأكثر تعقيدًا.

مثال 3 إنشاء جداول الصواب

أنشئ جدول الصواب للعبارة $\sim p \vee q$

1 أنشئ عمودًا لكلٍّ من $p, q, \sim p, \sim p \vee q$

2 ضع جميع حالات قيم صواب p, q

3 استعمل قيم صواب العبارة p لتحديد قيم صواب $\sim p$

4 استعمل قيم صواب $\sim p, q$ لتحديد قيم صواب $\sim p \vee q$

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

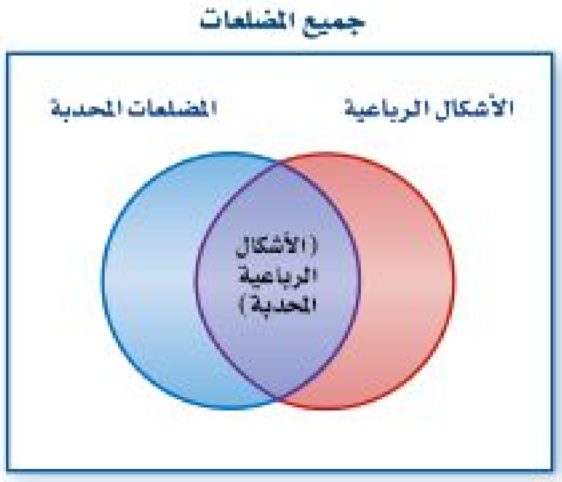
1 (صف العناوين)، 2 (العمودان p و q)، 3 (العمود $\sim p$)، 4 (العمود $\sim p \vee q$)

تحقق من فهمك

3) أنشئ جدول الصواب للعبارة $\sim p \wedge \sim q$.

أشكال ڤن: يمكن تمثيل عبارة الوصل باستعمال أشكال ڤن. عُد إلى عبارة الوصل في بداية الدرس.

p و q: المستطيل شكل رباعي والمستطيل مضلع محدب .



تعلم أن المستطيلات أشكال رباعية، وهي أيضًا مضلعات محدبة، ويبيِّن شكل ڤن أن المستطيلات تقع في منطقة تقاطع مجموعة الأشكال الرباعية ومجموعة المضلعات المحدّبة.

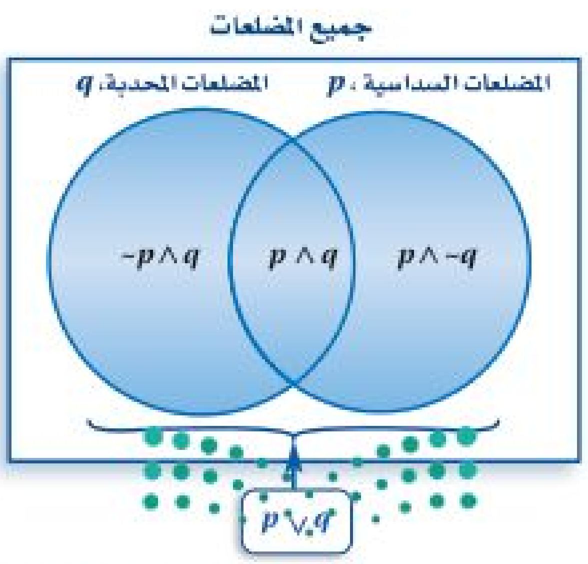
وبمعنى آخر: تقع المستطيلات ضمن مجموعة الأشكال الرباعية، وأيضًا ضمن مجموعة المضلعات المحدبة.

يمكن أيضًا تمثيل عبارة الفَصْل باستعمال أشكال ڤن. إليك العبارات الآتية:

p: الشكل سداسي.

q: الشكل مضلّع محدّب.

p أو q: الشكل سداسي أو مضلّع محدّب.



في شكل ڤن المجاور تمثل عبارة الفَصل باتحاد المجموعتين، ويحوي الاتحاد جميع المضلعات التي هي إما سداسية أو محدبة أو كلاهما.

تتضمن عبارة الفَصْل المناطق الثلاث الآتية:

$p \wedge \sim q$ المضلعات السداسية غير المحدّبة.

$\sim p \wedge q$ المضلعات المحدبة غير السداسية.

$p \wedge q$ المضلعات السداسية المحدبة.

إرشادات للدراسة

جداول الصواب: كي يسهل عليك تذكر جداول الصواب لعبارتَي الوصل والفصْل، تذكر ما يأتي:

- عبارة الوصل تكون صائبة فقط إذا كانت جميع العبارات المكونة لها صائبة.
- عبارة الفصل تكون خاطئة فقط إذا كانت جميع العبارات المكونة لها خاطئة.

إرشادات للدراسة

أشكال ڤن المستطيل الذي يُحيط أشكال ڤن يمثل المجموعة الكلية. شكل ڤن الذي يحوي دائرتين يُقسّم المجموعة الكلية إلى أربع مناطق على الأكثر. أما الشكل الذي يحوي ثلاث دوائر فيقسّم المجموعة الكلية إلى 8 مناطق على الأكثر. ويمكن إثبات أن شكل ڤن الذي يحوي n من الدوائر يقسم المجموعة الكلية إلى 2^n من المناطق على الأكثر.

إرشادات للدراسة

تقاطع المجموعات تقاطع مجموعتين هو مجموعة العناصر المشتركة بينهما.

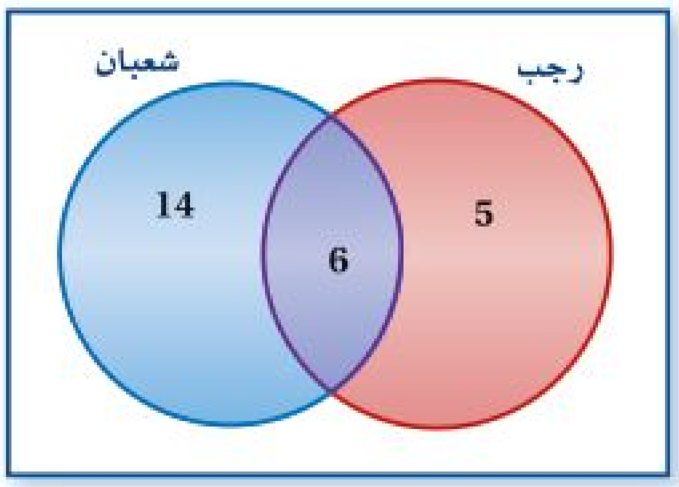
إرشادات للدراسة

اتحاد المجموعات اتحاد مجموعتين هو مجموعة عناصرهما كلها.

مثال 4 من واقع الحياة — استعمال أشكال ڤن

بيئة: يُظهر شكل ڤن المجاور عدد الأشخاص الذين شاركوا في حملة بيئية للتوعية بأهمية الاقتصاد في استعمال الورق أقيمت خلال شهرَي رجب وشعبان.

حملة الاقتصاد في استعمال الورق



a) كم شخصًا شارك في الحملة لشهر رجب أو شعبان؟

اتحاد المجموعتين يمثل الأشخاص الذين شاركوا في الحملة خلال شهري رجب أو شعبان.

فيكون 14 + 6 + 5 أو 25 شخصًا شاركوا في الحملة خلال الشهرين.

b) كم شخصًا شارك في الحملة خلال شهرَي رجب وشعبان؟

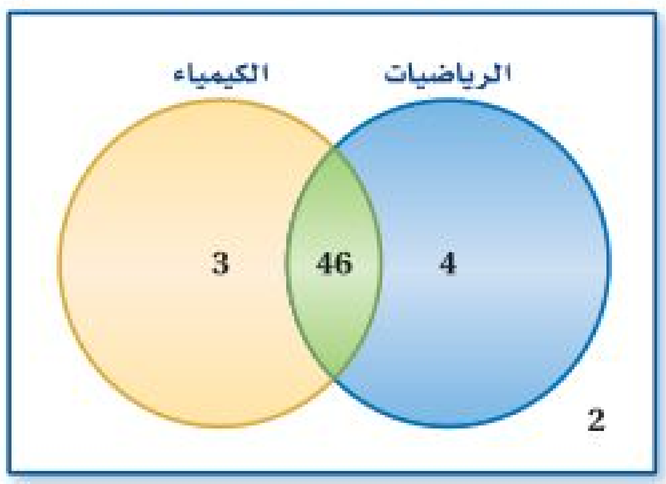
تقاطع المجموعتين يمثل عدد الأشخاص الذين شاركوا في الحملة خلال كلا الشهرين، لذلك هناك 6 أشخاص فقط شاركوا في الحملة خلال كلا الشهرين.

c) ماذا يمثل العدد 14 في الشكل؟

عدد الأشخاص الذين شاركوا في الحملة خلال شهر شعبان، ولم يشاركوا خلال شهر رجب.

✓ تحقق من فهمك

اختباري الرياضيات والكيمياء



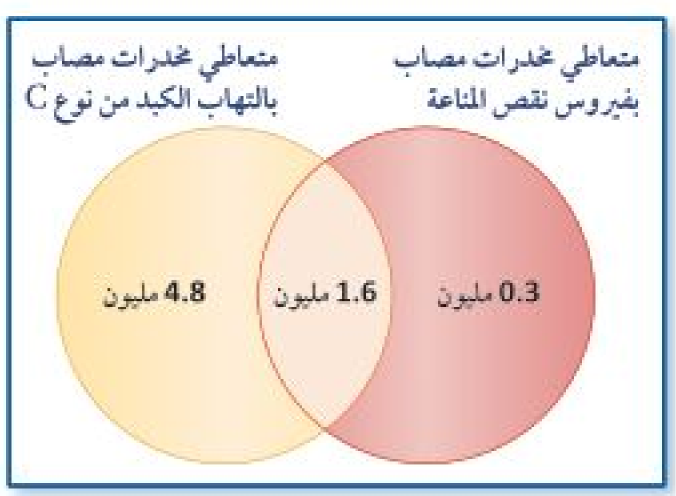
4) اختبارات: يبين شكل ڤن المجاور عدد طلاب الصف الأول الثانوي الذين نجحوا والذين لم ينجحوا في اختباري الرياضيات أو الكيمياء.

A) ما عدد الطلاب الذين نجحوا في اختبار الرياضيات، ولم ينجحوا في اختبار الكيمياء؟

B) ما عدد الطلاب الذين نجحوا في اختبار الرياضيات واختبار الكيمياء؟

C) ما عدد الطلاب الذين لم ينجحوا في أيٍّ من الاختبارين؟

D) ما عدد طلاب الصف الأول الثانوي؟



5) التعاطي والمرض: استعمل شكل(ڤن) أعلاه، والذي يمثل عدد المرضى من متعاطي المخدرات المصابين بمرضي نقص المناعة والتهاب الكبد الوبائي C.

A) ما عدد المصابين بفيروس نقص المناعة؟

B) ما عدد المصابين بالتهاب الكبد الوبائي C؟

C) ماذا يمثل العدد 4.8 مليون في الشكل؟

الربط مع الحياة

الورق الذي تستعمله الولايات المتحدة في يوم واحد يمكن أن يحيط الكرة الأرضية 20 مرة، ولك أن تتخيل عدد الأشجار التي تقطع لصنع هذه الكمية من الورق.

الربط مع الحياة

يسبب تعاطي المواد المخدرة ضعف الجهاز المناعي للإنسان، مما ينتج عنه الإصابة بالأمراض المختلفة (كأمراض القلب، والأوعية الدموية، وفشل الكبد...).

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تأكـد

المثالان 1, 2

استعمل العبارات p, q, r لكتابة كل عبارة وصل أو فصل أدناه، ثم أوجد قيمة الصواب لها مفسِّرًا تبريرك:

p: في الأسبوع الواحد سبعة أيام.

q: في اليوم الواحد 20 ساعة.

r: في الساعة الواحدة 60 دقيقة.

1) p و r 2) $p \wedge q$ 3) $q \vee r$

4) $\sim p$ أو q 5) $p \vee r$ 6) $\sim p \wedge \sim r$

المثال 3

7) أكمل جدول الصواب المجاور.

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$
T	T	F	
T	F		
F	T		
F	F		

أنشئ جدول صواب لكلٍّ من العبارتين المركبتين الآتيتين:

8) $p \wedge q$ 9) $\sim p \vee \sim q$

المثال 4

10) **لغات:** استعمل شكل ڤن المجاور، والذي يمثل عدد الطلاب الذين يدرسون اللغتين الفرنسية والإيطالية في معهد اللغات.

a) ما عدد الطلاب الذين يدرسون الإيطالية فقط؟

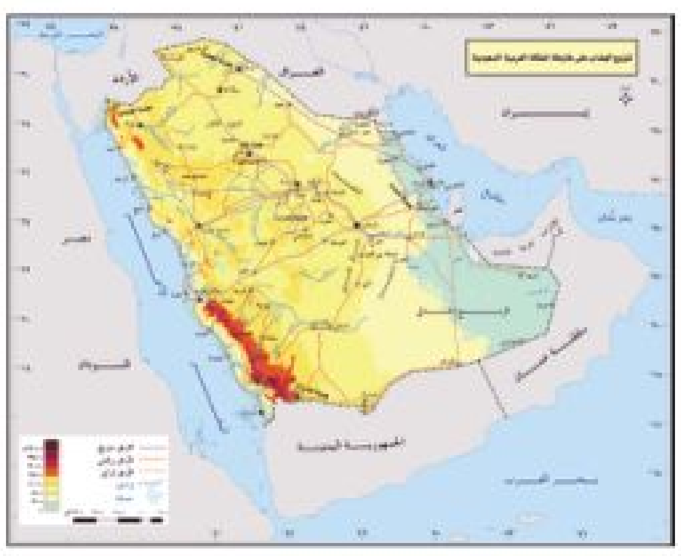
b) ما عدد الطلاب الذين يدرسون الإيطالية والفرنسية معًا؟

c) ماذا يمثل العدد 11 في الشكل؟

تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2

استعمل العبارات p, q, r, s والخريطة المجاورة؛ لكتابة كل عبارة وصلٍ أو فصلٍ أدناه. ثم أوجد قيمة الصواب لها مفسِّرًا تبريرك:



p: الرياض عاصمة المملكة العربية السعودية.

q: تقع مكة المكرمة على الخليج العربي.

r: توجد حدود مشتركة للمملكة العربية السعودية مع العراق.

s: المملكة العربية السعودية تقع غربي البحر الأحمر.

11) p و r 12) $p \wedge q$ 13) $\sim r$ أو s

14) $r \vee q$ 15) $\sim p$ و $\sim r$ 16) $\sim s \vee \sim p$

المثال 3

أكمل جدول الصواب الآتي:

17)

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$
T		F	
T		F	
F		T	
F		T	

أنشئ جدول الصواب لكلٍّ من العبارات المركبة الآتية:

18) $\sim(\sim p)$ 19) $\sim(\sim r \wedge q)$ 20) $\sim p \wedge r$

21) مكافآت: قرر مدرس الرياضيات مكافأة الطلاب المتفوقين باصطحابهم في رحلة مدرسية، وقرر أن تكون القاعدة أنه "إذا تفوّق الطالب في الاختبار الأول أو الاختبار الثاني فإنه سيذهب في الرحلة".

الطلاب المسموح لهم بالذهاب في الرحلة		يسمح له بالذهاب
الاختبار الأول	الاختبار الثاني	
تفوق		
تفوق	لم يتفوق	T

a) أكمل جدول الصواب المجاور.

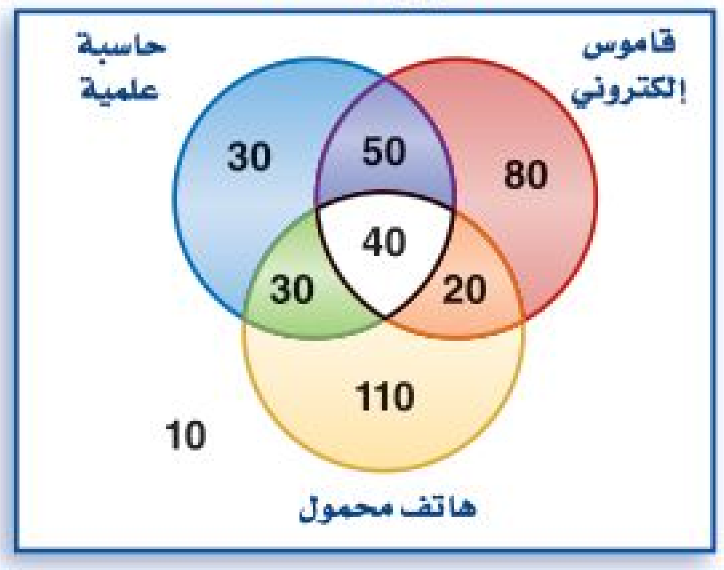
b) إذا تفوق الطالب في الاختبارين، فهل سيذهب في هذه الرحلة؟

c) إذا تفوق الطالب في الاختبار الأول فقط، فهل سيذهب في هذه الرحلة؟

المثال 4

22) إلكترونيات: سُئل 370 شخصًا من الفئة العمرية بين 13–19 سنة عن الجهاز الذي يستعملونه من بين الهاتف المحمول والقاموس الإلكتروني والحاسبة العلمية، ومُثِّلت نتائج الاستطلاع بشكل ڤن المجاور.

الأجهزة المستعملة



a) ما عدد الذين يستعملون حاسبة علمية وقاموسًا إلكترونيًّا فقط؟

b) ما عدد الذين يستعملون الأجهزة الثلاثة؟

c) ما عدد الذين يستعملون هاتفًا محمولًا فقط؟

d) ما عدد الذين يستعملون قاموسًا إلكترونيًّا وهاتفًا محمولًا فقط؟

e) ماذا يمثل العدد 10 في الشكل؟

إثراء

ما المخدرات؟ وما أضرارها؟

الوعي: p : تتكون كلمة الحشيش من ثلاثة حروف.

q : الحشيش من المخدرات.

r : يؤدي تدخين الحشيش إلى اضطراب الإدراك.

23) استعمل العبارات p, q, r لكتابة عبارتي الوصل والفصل أدناه، ثم أوجد قيمة الصواب لهما، مفسرًا تبريرك:

a) $p \vee q$ **b)** $\sim p \wedge r$

24) كوّن عبارتين من الجمل الثلاث تكون قيمتهما صائبة، على أن تستخدم فيهما أداتي الوصل والفصل.

أنشئ جدول الصواب لكلٍّ من العبارات المركبة الآتية. ثم عيِّن قيمة الصواب لكلٍّ منها، إذا علمت أن العبارات p, q, r تكون صائبة إذا تم ذكرها بجانب العبارة المعطاة، وخاطئة إذا لم تذكر:

25) $p \wedge (q \wedge r)\ ;\ p, q$ **26)** $p \wedge (\sim q \vee r)\ ;\ p, r$ **27)** $(\sim p \vee q) \wedge r\ ;\ q, r$

28) $p \vee (\sim q \wedge \sim r)\ ;\ p, q, r$ **29)** $\sim p \wedge (\sim q \wedge \sim r)\ ;\ p, q, r$ **30)** $(\sim p \vee q) \vee \sim r\ ;\ p, q$

مسائل مهارات التفكير العليا

تحدٍّ: لنفي العبارة التي تحوي كلمة "جميع" أو "كل"، يمكنك استعمال جملة "يوجد واحد على الأقل" أو "هناك واحد على الأقل". ولنفي العبارة التي تحوي كلمة "يوجد"، يمكنك استعمال كلمة "جميع" أو "كل".

p: جميع المضلعات محدبة. $\sim p$: يوجد مضلع واحد على الأقل ليس محدبًا.

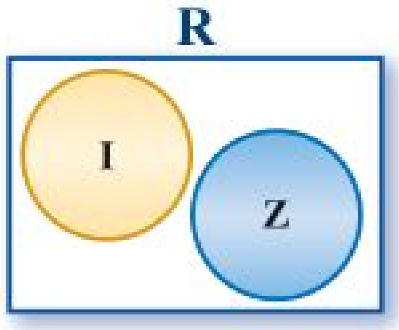
q: توجد مسألة ليس لها حل. $\sim q$: جميع المسائل لها حل.

انفِ كلًّا من العبارات الآتية:

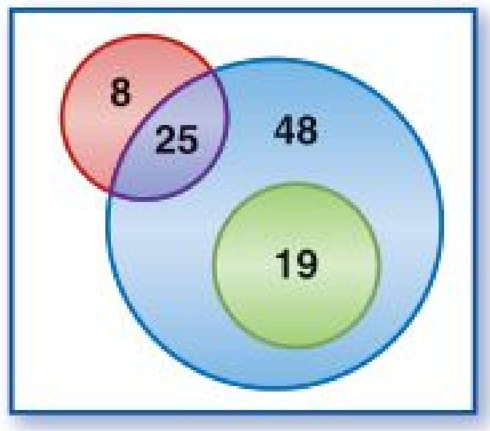
31) جميع المربعات مستطيلات.   **32)** على الأقل يوجد طالب واحد يدرس اللغة الفرنسية.

33) لكل عدد حقيقي جذر تربيعي حقيقي.   **34)** توجد قطعة مستقيمة ليس لها نقطة منتصف.

35) **تبرير:** الأعداد غير النسبية (**I**)، والأعداد الصحيحة (**Z**) تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية (**R**). معتمدًا على شكل ڤن المجاور، هل صحيح أحيانًا أم دائمًا، أم غير صحيح أبدًا، أن الأعداد الصحيحة هي أعداد غير نسبية؟ فسّر تبريرك.



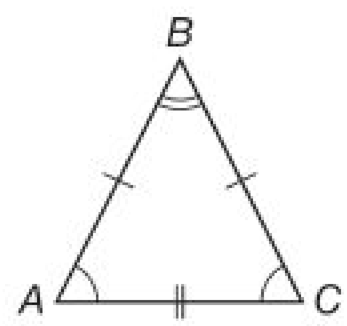
36) **اكتب:** صِفْ موقفًا يمكن تمثيله بشكل ڤن الآتي.



37) **مسألة مفتوحة:** اكتب عبارة مركبة صائبة تحوي « و » فقط.

تدريب على اختبار

38) أيُّ العبارات الآتية لها نفس قيمة صواب العبارة $AB = BC$؟



A $m\angle A = m\angle C$

B $m\angle A = m\angle B$

C $AC = BC$

D $AB = AC$

39) خمِّن الحد التالي في النمط ... $3, \frac{7}{3}, \frac{5}{3}, 1, \frac{1}{3}$.

A $\frac{8}{3}$

B 4

C $\frac{11}{3}$

D $\frac{9}{3}$

مراجعة تراكمية

40) **طعام:** في كل يوم ثلاثاء من الأسابيع الأربعة الماضية، قدَّم مطعم سلطة فواكه هدية بعد كل وجبة. افترض جميل أنه سيتم تقديم سلطة فواكه يوم الثلاثاء القادم. ما نوع التبرير الذي استعمله جميل؟ فسر إجابتك. (الدرس 1-1)

خمِّن الحد التالي في كلٍّ من المتتابعات الآتية. (مهارة سابقة)

41) $3, 5, 7, 9$

42) $1, 3, 9, 27$

43) $6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}$

جبر: حل كلًّا من المعادلات الآتية: (مهارة سابقة)

44) $\frac{y}{2} - 7 = 5$

45) $3x + 9 = 6$

46) $4(m - 5) = 12$

47) $6(w + 7) = 0$

48) $2x - 7 = 11$

49) $\frac{y}{5} + 4 = 9$

استعد للدرس اللاحق

جبر: أوجد قيمة كلٍّ من العبارات الجبرية الآتية للقيم المعطاة.

50) $2y + 3x$ إذا كانت $x = -1, y = 3$

51) $4d - c$ إذا كانت $c = 2, d = 4$

52) $m^2 + 7n$ إذا كانت $n = -2, m = 4$

53) $ab - 2a$ إذا كانت $a = -2, b = -3$

1-3 العبارات الشرطية
Conditional Statements

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ استعمال المنطق وأشكال ڤن لتحديد قيم الصواب لعبارات النفي والوصل والفصل.

(الدرس 2-1)

والآن:

- أحلل العبارة الشرطية (إذا... فإن...).
- أكتب العكس، والمعكوس، والمعاكس الإيجابي، لعبارات (إذا... فإن...).

المفردات:

العبارة الشرطية
conditional statement

الفَرض
hypothesis

النتيجة
conclusion

العبارات الشرطية المرتبطة
related conditionals

العكس
converse

المعكوس
inverse

المعاكس الإيجابي
contrapositive

التكافؤ المنطقي
logically equivalent

لماذا؟

عند إجراء مكالمة هاتفية مع بعض المؤسسات، يحيلك جهاز الرد الآلي إلى قائمة من البدائل تختار منها القسم الذي تريد، ويُسمعك إرشادات بصيغة عبارات شرطية.

عبارة إذا... فإن...: **العبارة الشرطية** هي عبارة يمكن كتابتها على صورة (إذا ... فإن...). والإرشاد المبين في الصورة أعلاه مثال على العبارة الشرطية.

مفهوم أساسي — العبارة الشرطية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي	الرموز	مثال
العبارة الشرطية (إذا ... فإن...)	$p \rightarrow q$ وتُقرأ إذا كان p فإن q، أو p تؤدي إلى q	إذا كان الشكل مربعًا فإنه مستطيل.
في العبارة الشرطية تُسمى الجملة التي تلي كلمة (إذا) مباشرةً **الفَرض**.	p	الشكل مربع.
في العبارة الشرطية تُسمى الجملة التي تلي كلمة (فإن) مباشرة **النتيجة** .	q	الشكل مستطيل.

عندما تكتب العبارة الشرطية على صورة (إذا ... فإن ...)، يمكنك تحديد الفَرض والنتيجة فيها بسهولة.

مثال 1 تحديد الفَرض والنتيجة

حدِّد الفَرض والنتيجة في كلٍّ من العبارات الشرطية الآتية:

a) إذا كان الطقس ماطرًا ، فسوف أستعمل المظلة .

الفَرض: الطقس ماطر.

النتيجة: سوف أستعمل المظلة.

b) يقبل العدد القسمة على 10 إذا كان آحاده صفرًا.

الفَرض: آحاد العدد صفر.

النتيجة: يقبل العدد القسمة على 10

تحقق من فهمك

1A) إذا كان لمضلع ستة أضلاع، فإنه سداسي.

1B) سيتم إنجاز طبعة ثانية من الكتاب، إذا بِيعت نسخ الطبعة الأولى كلّها.

تكتب كثير من العبارات الشرطية دون استعمال الكلمتين (إذا، فإن)، ولكتابة تلك العبارات على صورة (إذا ... فإن...) حدد الفَرض والنتيجة.

تحصل على خصم تشجيعي	عند شرائك أيًّا من منتجاتنا قبل يوم الأربعاء
النتيجة	الفرض

إذا **اشتريت أيًّا من منتجاتنا قبل يوم الأربعاء**، فإنك **تحصل على خصم تشجيعي**.

تذكر أن النتيجة تعتمد على الفرض.

> **قراءة الرياضيات**
>
> **(إذا) و (فإن)**
>
> كلمة (إذا) ليست جزءًا من الفَرض، كذلك كلمة (فإن) ليست جزءًا من النتيجة.

مثال 2 كتابة العبارة الشرطية على الصورة (إذا... فإن...)

حدِّد الفَرض والنتيجة في كل عبارة شرطية مما يأتي، ثم اكتبها على صورة (إذا... فإن...):

a) الثدييات حيوانات من ذوات الدم الحار.

الفَرض: الحيوان من الثدييات.

النتيجة: هو من ذوات الدم الحار.

إذا كان الحيوان من الثدييات، فإنه من ذوات الدم الحار.

b) المنشور الذي قاعدتاه مضلعان منتظمان، يكون منتظمًا.

الفَرض: قاعدتا المنشور مضلعان منتظمان.

النتيجة: يكون المنشور منتظمًا.

إذا كانت قاعدتا المنشور مضلعين منتظمين، فإنه يكون منتظمًا.

تحقق من فهمك

2A) يمكن تبديل 5 أوراق نقدية من فئة الريال بورقة نقديةٍ واحدةٍ من فئة 5 ريالات.

2B) مجموع قياسَي الزاويتين المتتامتين يساوي $90°$

تذكر أن الفرض والنتيجة والعبارة الشرطية نفسها جميعها عبارات قد تكون صائبة وقد تكون خاطئة.

قال عمر لزملائه: إذا **أنهيت واجبي المنزلي**، فإني **سوف ألعب الكرة معكم**.

الفرض	النتيجة	العبارة الشرطية	
أنهى عمر الواجب المنزلي	يلعب عمر الكرة مع زملائه		إذا أنهيت واجبي المنزلي، فإني سوف ألعب الكرة معكم.
T	T	T	إذا أنهى عمر واجبه المنزلي، ولعب الكرة مع زملائه، فإن العبارة الشرطية تكون صائبة؛ لأنه أوفى بوعده.
T	F	F	إذا أنهى عمر واجبه المنزلي ولم يلعب الكرة مع زملائه، تكون العبارة الشرطية خاطئة؛ لأنه لم يفِ بوعده.
F	T	T	إذا لم يُنه عمر واجبه، ولعب الكرة مع زملائه، يكون الفرض خاطئًا ولكن النتيجة صائبة. وبما أن العبارة الشرطية لا تقرر شيئًا في حالة عدم حل عمر واجبه، فإن الأمر راجع إلى عمر، إما أن يلعب الكرة مع زملائه أو لا، وتكون العبارة الشرطية صائبة بغض النظر عما يفعله عمر.
F	F	T	إذا لم يُنه عمر واجبه، ولم يلعب الكرة مع زملائه، يكون الفرض خاطئًا، والنتيجة خاطئة. وللسبب نفسه في الحالة السابقة تكون العبارة الشرطية صائبة.

> **قراءة الرياضيات**
>
> **ليست خاطئة**
>
> إذا كانت العبارة المنطقية ليست خاطئة؛ فإنها تكون صائبة.

لاحظ أن العبارة الشرطية تكون صائبة في جميع الحالات، إلَّا أن يكون الفرض صائبًا والنتيجة خاطئة.

تنبيه!

تحليل العبارات الشرطية

عند تحديد قيم الصواب للعبارة الشرطية، لا تحاول أن تحدد ما إذا كان للعبارة معنى أم لا، بل اهتم بالسؤال: هل النتيجة تتبع الفرض بالضرورة؟

يمكنك استعمال النتائج السابقة لإنشاء جدول الصواب للعبارات الشرطية.

العبارات الشرطية		
p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

تكون العبارة الشرطية خاطئة فقط عندما يكون الفرض صائبًا والنتيجة خاطئة.

عندما يكون الفرض خاطئًا، تكون العبارة الشرطية صائبة بغض النظر عن النتيجة.

لإثبات صحة العبارة الشرطية، يجب عليك إثبات أنه عندما يكون الفرض صائبًا، فإن النتيجة صائبة أيضًا. ولإثبات أن العبارة الشرطية خاطئة يكفي أن تعطي مثالًا مضادًّا .

مثال 3 قيم الصواب للعبارات الشرطية

حدّد قيمة الصواب لكل عبارة شرطية فيما يأتي، وإذا كانت صائبة، ففسِّر تبريرك، أما إذا كانت خاطئة، فأعطِ مثالًا مضادًّا:

a) عند قسمة عدد صحيح على عدد صحيح آخر، يكون الناتج عددًا صحيحًا أيضًا.

مثال مضاد: عند قسمة 1 على 2، يكون الناتج 0.5

بما أن 0.5 ليس عددًا صحيحًا، فإن النتيجة خاطئة. وبما أنك استطعت إيجاد مثال مضاد، فالعبارة الشرطية خاطئة.

b) إذا كان الشهر القادم هو رمضان، فإن هذا الشهر هو شهر شعبان.

رمضان هو الشهر الذي يلي شهر شعبان؛ إذن كلما كان الفرض (الشهر القادم رمضان) صائبًا، فإن النتيجة (هذا الشهر هو شهر شعبان) تكون صائبة أيضًا؛ وعليه فإن العبارة الشرطية صائبة.

c) إذا كان للمثلث أربعة أضلاع، فإنه مضلعٌ مقعرٌ.

لا يمكن أن يكون للمثلث أربعة أضلاع؛ إذن الفرض خاطئ وعندما يكون الفرض خاطئًا، فإن العبارة الشرطية تكون صائبة.

تحقق من فهمك

3A) إذا كانت $\angle A$ حادة، فإن $m\angle A = 35°$

3B) إذا كان $\sqrt{x} = -1$ ، فإن $(-1)^2 = -1$

العبارات الشرطية المرتبطة: يرتبط بالعبارة الشرطية المعطاة عبارات شرطية أخرى تسمى **العبارات الشرطية المرتبطة**.

مفهوم أساسي — العبارات الشرطية المرتبطة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي	الرموز	أمثلة
العبارة الشرطية هي العبارة التي يمكن كتابتها على صورة إذا كان p، فإن q .	$p \longrightarrow q$	إذا كان $m\angle A = 35°$، فإن $\angle A$ حادة.
ينتج **العكس** من تبديل الفرض مع النتيجة في العبارة الشرطية.	$q \longrightarrow p$	إذا كانت $\angle A$ حادة، فإن $m\angle A = 35°$.
ينتج **المعكوس** عن نفي كل من الفرض والنتيجة في العبارة الشرطية.	$\sim p \longrightarrow \sim q$	إذا كان $m\angle A \neq 35°$، فإن $\angle A$ ليست حادة.
ينتج **المعاكس الإيجابي** من نفي كل من الفرض والنتيجة في عكس العبارة الشرطية.	$\sim q \longrightarrow \sim p$	إذا لم تكن $\angle A$ حادة، فإن $m\angle A \neq 35°$.

إذا كانت العبارة الشرطية صائبة، فليس بالضرورة أن يكون عكسها ومعكوسها صائبين، بينما يكون المعاكس الإيجابي صائبًا. ويكون المعاكس الإيجابي خاطئًا إذا كانت العبارة الشرطية خاطئة.

وبالمثل فإن عكس العبارة الشرطية ومعكوسها إما أن يكونا صائبين معًا أو خاطئين معًا. وتسمى العبارات التي لها قيم الصواب نفسها **عبارات متكافئة منطقيًا**.

مثال 4 — جداول الصواب والعبارات المتكافئة منطقيًا

أوجد قيم الصواب للعبارة الشرطية وعكسها ومعكوسها ومعاكسها الإيجابي على نفس الجدول، ثم اكتب عبارتين متكافئتين منطقيًا.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	العبارة الشرطية $p \to q$	عكس العبارة الشرطية $q \to p$	معكوس العبارة الشرطية $\sim p \to \sim q$	المعاكس الإيجابي $\sim q \to \sim p$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

من خلال جدول الصواب نلاحظ أنه للعبارتين $p \to q$ وَ $\sim q \to \sim p$ قيم الصواب نفسها لذا فهما متكافئتان منطقيًا.

تحقق من فهمك

4) أوجد قيم الصواب للعبارات: $\sim(p\wedge q)$, $\sim p\vee\sim q$, $\sim(p\vee q)$, $\sim p\wedge\sim q$ على نفس الجدول، ثم اكتب زوجين من العبارات المتكافئة منطقيًا.

مما سبق نلاحظ أن:

مفهوم أساسي — العبارات المتكافئة منطقيًا

أضف إلى مطويتك

- العبارة الشرطية ومعاكسها الإيجابي متكافئتان منطقيًا.
- عكس العبارة الشرطية ومعكوسها متكافئتان منطقيًا.
- $\sim(p\wedge q)$ تكافئ منطقيًا $\sim p\vee\sim q$
- $\sim(p\vee q)$ تكافئ منطقيًا $\sim p\wedge\sim q$

يمكنك استعمال التكافؤ المنطقي للتحقق من قيمة الصواب لعبارة ما. في **المثال** 5 أدناه، لاحظ أن كلًّا من العبارة الشرطية ومعاكسها الإيجابي صائبان. وأن كلًّا من العكس والمعكوس خاطئان.

مثال 5 من واقع الحياة العبارات الشرطية المرتبطة

طبيعة: اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية الآتية، ثم استعمل معلومات الربط مع الحياة؛ لتحديد ما إذا كان أيٌّ منها صائبًا أم خاطئًا. وإذا كان خاطئًا، فأعط مثالًا مضادًّا.

الأسود هي قطط تستطيع أن تزأر.

العبارة الشرطية: أعد كتابة العبارة على صورة (إذا... فإن...) .
إذا كان الحيوان أسدًا، فإنه قطٌّ يستطيع أن يزأر.
اعتمادًا على المعلومات المجاورة عن اليمين، تكون العبارة صائبة.

العكس: إذا كان الحيوان قطًّا يستطيع أن يزأر، فإنه يكون أسدًا.
مثال مضاد: النمر قط يستطيع أن يزأر، لكنه ليس أسدًا.
إذن فالعكس خاطيء.

المعكوس: إذا لم يكن الحيوان أسدًا، فإنه لا يكون قطًّا يستطيع أن يزأر.
مثال مضاد: النمر ليس أسدًا، ولكنه قط يستطيع أن يزأر.
إذن المعكوس خاطيء.

المعاكس الإيجابي: إذا لم يكن الحيوان قطًّا يستطيع أن يزأر، فإنه لا يكون أسدًا.
اعتمادًا على المعلومات التي في الهامش تكون العبارة صائبة .

تحقق: تحقق من أن للعبارات المتكافئة منطقيًّا قيم الصواب نفسها.
العبارة الشرطية ومعاكسها الإيجابي كلاهما صائب. ✓
العكس والمعكوس كلاهما خاطيء. ✓

الربط مع الحياة

تُعد الأسود والنمور من فصيلة القطط، وهي القطط الوحيدة التي تزأر، ولا تموء.

✓ تحقق من فهمك

اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي لكلٍّ من العبارتين الشرطيتين الآتيتين، ثم حدد ما إذا كان أيٌّ منها صائبًا أم خاطئًا. وإذا كان خاطئًا فأعط مثالًا مضادًّا.

5A) الزاويتان اللتان لهما القياس نفسه متطابقتان.

5B) الفأر من القوارض.

✓ تأكد

المثال 1 **حدِّد الفرض والنتيجة في كلٍّ من العبارات الشرطية الآتية:**

1) يوم غد هو السبت إذا كان اليوم هو الجمعة.

2) إذا كان $2x + 5 > 7$، فإن $x > 1$.

3) إذا كانت الزاويتان متكاملتين، فإن مجموع قياسيهما $180°$

4) يكون المستقيمان متعامدين إذا نتج عن تقاطعهما زاوية قائمة.

المثال 2 **اكتب كل عبارة شرطية مما يأتي على صورة (إذا... فإن...).**

5) الشخص الذي تجاوز عمره 18 عامًا يمكنه استخراج رخصة قيادة.

6) يحتوي الجبن على عنصر الكالسيوم.

7) قياس الزاوية الحادة بين $0°$ و $90°$

8) المثلث المتطابق الأضلاع متطابق الزوايا.

9) **مطر:** هناك أنواع مختلفة من هطل المطر، تتشكل في ظروف مختلفة. اكتب العبارات الشرطية الثلاث الآتية على صورة (إذا... فإن...).

a) يتكاثف بخار الماء في الغلاف الجوي فيسقط على شكل مطر.

b) يتجمد بخار الماء الشديد البرودة في الغيوم الركامية فيسقط على شكل بَرَد.

c) يكون الهطل على شكل ثلجٍ، عندما تكون درجة الحرارة متدنيةً جدًّا إلى حدِّ التجمد في الغلاف الجوي.

المثال 3 **حدِّد قيمة الصواب لكلِّ عبارة شرطية فيما يأتي، وإذا كانت العبارة صائبة، ففسِّر تبريرك، أما إذا كانت خاطئة، فأعط مثالًا مضادًّا.**

10) إذا كان $x^2 = 16$، فإن $x = 4$

11) إذا كنت تعيش في الرياض، فإنك تعيش في الكويت.

12) إذا كان يوم غد هو الجمعة، فإن اليوم هو الخميس.

13) إذا كان للحيوان قرنان، فإنه كبش.

14) إذا كان قياس الزاوية القائمة $95°$، فإن الزاوية تكون حادة.

المثال 4 **أوجد قيم الصواب لكل عبارتين فيما يأتي، ثم قرِّر هل هما مكافئتان منطقيًا أم لا؟**

15) $\sim p \wedge q, \sim(p \wedge q)$

16) $\sim p \vee \sim q, \sim(p \vee q)$

المثال 5 **اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي لكلٍّ من العبارتين الشرطيتين الآتيتين. ثم حدِّد ما إذا كان أيٌّ منها صائبًا أم خاطئًا، وإذا كان خاطئًا فأعط مثالًا مضادًّا.**

17) إذا كان العدد يقبل القسمة على 2 ، فإنه يقبل القسمة على 4

18) جميع الأعداد الكلية أعداد صحيحة.

تدرب وحل المسائل

المثال 1 **حدِّد الفرض والنتيجة في كلٍّ من العبارات الشرطية الآتية:**

19) إذا كانت الزاويتان متجاورتين، فإن لهما ضلعًا مشتركًا.

20) إذا كنت قائد مجموعتنا، فإنني سأتبعك.

21) إذا كان $3x - 4 = 11$، فإن $x = 5$

22) إذا كانت الزاويتان متقابلتين بالرأس، فإنهما متطابقتان.

المثال 2 **اكتب كل عبارة شرطية مما يأتي على صورة (إذا ... فإن ...).**

23) احصل على قارورة ماء مجانًا عند شرائك خمس قوارير.

24) كل من حضر الحفل سيحصل على هدية.

25) تقاطع مستويين يمثل مستقيمًا.

26) مساحة الدائرة تساوي πr^2

27) قياس الزاوية القائمة $90°$

28) **كيمياء:** اكتب العبارة الآتية على صورة (إذا... فإن...).

ينصهر الفوسفور عند درجة $44°$ سيليزية.

29) **أحياء:** يتغير الماء على الأرض باستمرار عبر عملية تُسمّى دورة الماء. اكتب العبارات الشرطية الثلاث أدنى الشكل على صورة (إذا... فإن...).

a) جريان الماء السطحي يصب في المسطحات المائية.

b) تعيد النباتات الماء إلى الهواء من خلال عملية النتح.

c) تعيد المسطحات المائية الماء إلى الهواء عن طريق التبخر.

المثال 3 **حدد قيمة الصواب لكل عبارة شرطية فيما يأتي. وإذا كانت صائبة، ففسِّر تبريرك، أما إذا كانت خاطئة فأعط مثالًا مضادًّا:**

30) إذا كان العدد فرديًّا، فإنه يقبل القسمة على 5

31) إذا كان الأرنب حيوانًا برمائيًّا، فإن هذا الفصل هو فصل الصيف.

32) إذا كانت جدة في اليمن، فإن صنعاء هي عاصمة المملكة العربية السعودية.

33) إذا نتج اللون الأبيض عن مزج اللونين الأزرق والأحمر، فإن $3 - 2 = 0$

34) إذا كانت الزاويتان متطابقتين، فإنهما متقابلتان بالرأس.

35) إذا كان الحيوان طائرًا، فإنه يكون نسرًا.

36) إذا كان الموز أزرق، فإن التفاح من الخضراوات.

طبيعة : استعمل العبارة أدناه لكتابة كلٍّ من العبارات الشرطية الآتية، ثم استعمل معلومات الربط مع الحياة لتحديد قيمة الصواب لكلٍّ منها، وإذا كانت أيٌّ منها خاطئة، فأعط مثالًا مضادًّا.

"الحيوان الذي تظهر على جسمه خطوط هو الحمار الوحشي".

37) عبارة شرطية

38) عكس العبارة الشرطية

39) معكوس العبارة الشرطية

40) المعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية

المثال 4

أوجد قيم الصواب لكل عبارتين فيما يأتي، ثم قرِّر هل هما متكافئتان منطقيًّا أم لا؟

41) $\sim(p \rightarrow q)\ ,\ \sim p \rightarrow \sim q$

42) $\sim(p \rightarrow q)\ ,\ \sim(\sim q \rightarrow \sim p)$

43) $(p \wedge q) \vee r\ ,\ p \wedge (q \vee r)$

المثال 5

اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي لكلٍّ من العبارات الشرطية الآتية، ثم حدِّد ما إذا كان أيٌّ منها صائبًا أم خاطئًا. وإذا كان خاطئًا، فأعط مثالًا مضادًّا.

44) إذا كنت تعيش في الدمام، فإنك تعيش في المملكة العربية السعودية.

45) إذا كان الطائر نعامة، فإنه لا يستطيع أن يطير.

46) جميع المربعات مستطيلات.

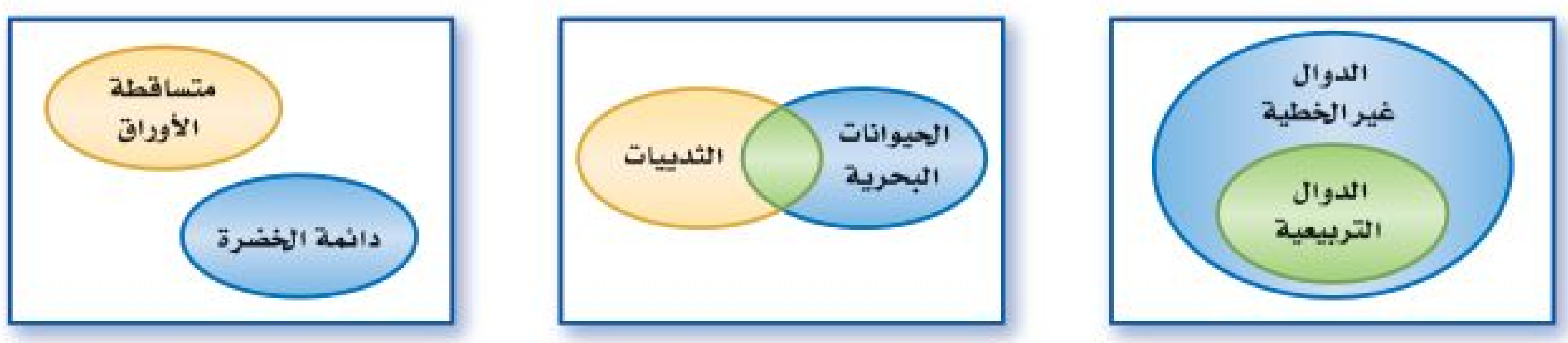
47) جميع القطع المستقيمة المتطابقة لها الطول نفسه.

48) المثلث القائم الزاوية يحوي زاوية قياسها $90°$

الربط مع الحياة

موطن ظباء الدكدك هو أفريقيا، وهي ظباء صغيرة الحجم، يبلغ متوسط طولها من قدم واحدة إلى ما يزيد على قدمين قليلًا، وتتميز أجسامها بخطوط تشبه خطوط الحُمر الوحشية.

استعمل أشكال ڤن أدناه؛ لتحديد قيمة الصواب لكلٍّ من العبارات الشرطية الآتية. وفسِّر تبريرك.



49) إذا كانت الدالة غير خطية، فإنها تكون دالة تربيعية.

50) إذا كان الحيوان من الثدييات، فإنه لا يكون حيوانًا بحريًّا.

51) إذا كانت الشجرة متساقطة الأوراق، فإنها لا تكون دائمة الخضرة.

52) **تمثيلات متعددة :** في هذه المسألة سوف تستقصي أحد قوانين المنطق باستعمال العبارات الشرطية.

a) **منطقيًّا :** اكتب ثلاث عبارات شرطية صائبة، بحيث تكون نتيجة كل عبارة فرضًا للعبارة التي تليها.

b) **بيانيًّا :** ارسم شكل ڤن يوضح هذه السلسلة من العبارات الشرطية.

c) **منطقيًّا :** اكتب عبارةً شرطيةً مستعملًا فرض العبارة الأولى، ونتيجة العبارة الثالثة. إذا كان فرض العبارة الأولى صائبًا. فهل تكون العبارة الشرطية الناتجة صائبةً؟

d) **لفظيًّا :** إذا أُعطيت العبارتين الشرطيتين الصائبتين: إذا كان a، فإن b، وإذا كان b، فإن c، فاكتب تخمينًا حول قيمة الصواب للعبارة c عندما تكون العبارة a صائبة. فسِّر تبريرك.

مسائل مهارات التفكير العليا

53) **اكتشف الخطأ:** حدِّدَ كلٌّ من أحمد وماجد قيمة الصواب للعبارة الشرطية "إذا كان العدد 15 أوليًّا، فإن العدد 20 يقبل القسمة على 4" . كلاهما يعتقد أن هذه العبارة صائبة، ولكنهما برَّرا ذلك بتبريرين مختلفين. أيُّهما كان مصيبًا؟ فسِّر تبريرك.

أحمد	ماجد
النتيجة صائبة؛ لأن العدد 20 يقبل القسمة على 4؛ إذن العبارة الشرطية صائبة.	الفَرض خاطئ؛ لأن 15 ليس عددًا أوليًّا؛ إذن العبارة الشرطية صائبة.

54) **تبرير:** عبارة شرطية فرضها صائب، ونتيجتها خاطئة. هل يكون معكوسها صائبًا؟

55) **مسألة مفتوحة:** اكتب عبارة شرطية، بحيث يكون العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي لها جميعها صائبة. فسّر تبريرك.

56) **تحدٍّ:** تجد أدناه معكوس العبارة الشرطية A. اكتب العبارة الشرطية A وعكسها ومعاكسها الإيجابي. فسّر تبريرك.

"إذا لم تدرك تكبيرة الإحرام مع الإمام، فإنك ذهبت إلى المسجد متأخرًا."

57) **اكتب:** صِفِ العلاقة بين العبارة الشرطية وعكسها ومعكوسها ومعاكسها الإيجابي.

تدريب على اختبار

58) إذا كان مجموع قياسَي زاويتين يساوي $90°$ فإنهما متتامتان. أيُّ العبارات الآتية هي عكس العبارة الشرطية أعلاه؟

A إذا كانت الزاويتان متتامتين، فإن مجموع قياسيهما $90°$

B إذا كانت الزاويتان غير متتامتين، فإن مجموع قياسيهما $90°$

C إذا كانت الزاويتان متتامتين، فإن مجموع قياسيهما لا يساوي $90°$

D إذا كانت الزاويتان غير متتامتين، فإن مجموع قياسيهما لا يساوي $90°$

59) **جبر:** ما أبسط صورة للعبارة $\frac{10a^2 - 15ab}{4a^2 - 9b^2}$ ؟

A $\frac{5a}{2a - 3b}$

B $\frac{5a}{2a + 3b}$

C $\frac{a}{2a + 3b}$

D $\frac{a}{2a - 3b}$

مراجعة تراكمية

أنشئ جدول الصواب لكلٍّ من العبارات المركبة الآتية. (الدرس 1-2)

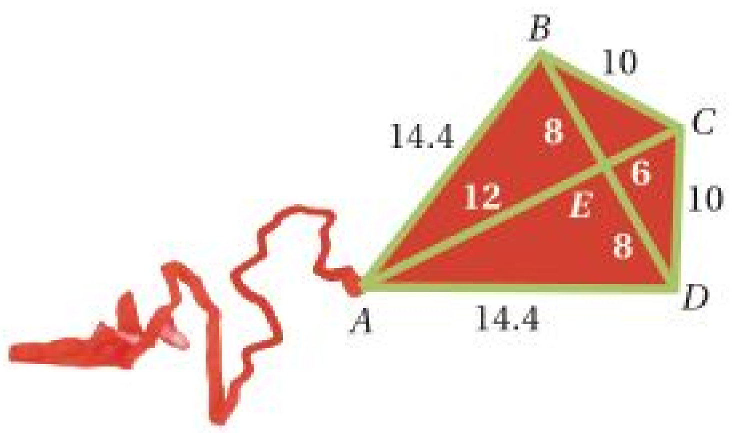
60) $q \wedge p$ 61) $\sim q \vee p$ 62) $\sim p \wedge q$ 63) $\sim p \wedge \sim q$

اكتب تخمينًا معتمدًا على المعلومات المعطاة في كلٍّ مما يأتي. وارسم شكلًا يوضح تخمينك (الدرس 1-1)

64) تقع النقاط J, H, K على أضلاع مختلفة لمثلث.

65) $R(3, -4), S(-2, -4), T(0, -4)$.

66) $A(-1, -7), B(4, -7), C(4, -3), D(-1, -3)$



67) **طائرة ورقية:** تصنع الطائرات الورقية بشكل يشبه الماسة؛ لذلك تسمى الطائرة الماسية.

سمّ جميع القطع المستقيمة المتطابقة في الشكل المجاور. (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

جبر: حدِّد العملية التي استعملتها لتحويل المعادلة (1) إلى المعادلة (2) في كلٍّ مما يأتي.

68) $8(y-11) = 32$ **(1)**
$y - 11 = 4$ **(2)**

69) $x + 9 = 4 - 3x$ **(1)**
$4x + 9 = 4$ **(2)**

70) $\frac{1}{3}m = 2$ **(1)**
$m = 6$ **(2)**

توسع
معمل الرياضيات:

1-3 العبارات الشرطية الثنائية
Biconditinal Statments

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

يُعدُّ سعد أفضل طلاب المدرسة في لعبة كرة القدم. وإذا انتُخب من قبل أعضاء فريق كرة القدم المدرسي، فإنه سيمثل المدرسة في فريق المنطقة التعليمية. إذا مثّل المدرسة في فريق المنطقة التعليمية، فإنه يكون قد انتُخب من قِبَل أعضاء فريق كرة القدم المدرسي.

p: انتُخب سعدٌ من قِبَلِ أعضاء فريق كرة القدم المدرسي.

q: مثَّل سعد المدرسة في فريق المنطقة التعليمية.

$p \rightarrow q$: إذا انتُخب سعد من قبل فريق كرة القدم المدرسي، فإنه سيمثل المدرسة في فريق المنطقة التعليمية.

$q \rightarrow p$: إذا مثَّل سعد المدرسة في فريق المنطقة التعليمية، فإنه قد انتُخب من قبل أعضاء فريق كرة القدم المدرسي.

في هذه الحالة، العبارة الشرطية $p \rightarrow q$ وعكسها $q \rightarrow p$ كلاهما صائب. والعبارة المركبة الناتجة عن وصل هاتين العبارتين باستعمال (و) تسمى **عبارة شرطية ثنائية**.

مفهوم أساسي — العبارات الشرطية الثنائية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: العبارة الشرطية الثنائية هي عبارة وصل مكونة من العبارة الشرطية وعكسها.

الرموز: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ ، ويُرمز لها اختصارًا $(p \leftrightarrow q)$، وتُقرأ p إذا وفقط إذا كان q

إذن تُكتب العبارة الشرطية الثنائية السابقة على النحو التالي:

$p \leftrightarrow q$: يُنتخب سعد من قبل أعضاء فريق كرة القدم المدرسي إذا وفقط إذا مثَّل المدرسة في فريق المنطقة التعليمية.

مثال

اكتب كلًّا من العبارتين الشرطيتين الثنائيتين الآتيتين على صورة عبارة شرطية وعكسها، ثم حدِّد ما إذا كانت العبارة الشرطية الثنائية صائبة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة فأعط مثالًا مضادًّا.

a) تكون الزاوية قائمة إذا وفقط إذا كان قياسها $90°$

العبارة الشرطية: إذا كانت الزاوية قائمة، فإن قياسها $90°$

العكس: إذا كان قياس الزاوية $90°$، فإنها زاوية قائمة.

كلٌّ من العبارة الشرطية وعكسها صائبان؛ إذن العبارة الشرطية الثنائية صائبة.

b) x عددٌ موجبٌ إذا وفقط إذا كان $x > -2$

العبارة الشرطية: إذا كان x عددًا موجبًا، فإن $x > -2$. العبارة الشرطية صائبة.

العكس: إذا كان $x > -2$، فإن x عدد موجب. افترض أن $x = -1$ ؛ إذن $-1 > -2$، لكن -1 ليس عددًا موجبًا؛ إذن عكس العبارة الشرطية خاطئ، والعبارة الشرطية الثنائية خاطئة.

تمارين:

اكتب كل عبارة شرطية ثنائية مما يأتي على صورة عبارة شرطية وعكسها. ثم حدد ما إذا كانت العبارة الشرطية الثنائية صائبة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة فأعط مثالًا مضادًّا.

1) تكون الزاويتان متتامتين إذا وفقط إذا كان مجموع قياسيهما $90°$

2) لا دوام في المدارس إذا وفقط إذا كان اليوم هو الجمعة.

3) يتقاطع المستقيمان إذا وفقط إذا كانا غير أفقيين.

4) $|2x| = 4$ إذا وفقط إذا كان $x = 2$

1-4

التبرير الاستنتاجي
Deductive Reasoning

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ استعمال التبرير الاستقرائي لتحليل الأنماط ووضع تخمينات.

(الدرس 1-1)

والآن:

- أستعمل قانون الفصل المنطقي للتبرير الاستنتاجي.
- أستعمل قانون القياس المنطقي للتبرير الاستنتاجي.

المفردات:

التبرير الاستنتاجي
deductive reasoning

قانون الفَصْل المنطقي
Law of Detachment

قانون القياس المنطقي
Law of Syllogism

لماذا؟

عندما يقوم المحققون بتحليل قضية جنائية، فإنهم يجمعون الأدلة مثل بصمات الأصابع، ويستعملونها لتقليص قائمة الاتهام، باستبعاد المتهمين وتحديد الجاني في نهاية الأمر.

التبرير الاستنتاجي: الطريقة التي يستعملها المحققون من أجل تحديد الجاني تُسمى التبرير الاستنتاجي.

وكما ترى فإن **التبرير الاستنتاجي** يستعمل حقائق وقواعد وتعريفات وخصائص من أجل الوصول إلى نتائج منطقية من عبارات معطاة، على خلاف التبرير الاستقرائي الذي تستعمل فيه أنماط من الأمثلة أو المشاهدات لعمل تخمين.

مثال 1 من واقع الحياة — التبرير الاستقرائي والتبرير الاستنتاجي

حدِّد ما إذا كانت النتيجة قائمة على التبرير الاستنتاجي أم التبرير الاستقرائي في كلٍّ مما يأتي:

a) في كل مرة تستخدم هند الخلطة الجاهزة لإعداد قالب كيك، تلاحظ أن قالبها صغير لا يكفي لخبز الكيك، جهزت هند اليوم خلطة الكيك فاستنتجت أنَّ قالبها لن يكفي لخبز الكيك.

اعتمدت هند على المشاهدات للتوصل إلى النتيجة، فهي بذلك استعملت التبرير الاستقرائي.

b) تأخر مشاري مرتين عن الحضور إلى مقر العمل في الوقت المحدد، فاستنتج أنه سيتم خصم 5٪ من أجر اليومين.

اعتمد مشاري على حقائق ينص عليها عقده الوظيفي في الحصول على النتيجة، لذلك فقد استعمل التبرير الاستنتاجي.

✓ تحقق من فهمك

1A) يُجري طالب مرحلة ابتدائية تجربة دمج الألوان في المختبر، فقام بثلاث محاولات للحصول على درجة معينة من اللون الرمادي، فاكتشف أنه كلما زادت كمية اللون الأسود كانت درجة اللون الرمادي أغمق.

1B) دُعي خالدٌ إلى حفل عشاء، وقد حضر جميع المدعوين الحفل؛ إذن فقد حضر خالد الحفل.

قانون الفصل المنطقي: يستعمل المثال المضاد لإثبات عدم صحة التخمين الذي يتم التوصل إليه عن طريق التبرير الاستقرائي، ولا يعد المثال طريقة صائبة لإثبات صحة التخمين. فلإثبات صحة التخمين يجب استعمال التبرير الاستنتاجي، وأحد أشكاله **قانون الفَصْل المنطقي**.

إرشادات للدراسة

المعلومات المعطاة
من الآن فصاعدًا اعتبر جميع المعطيات في الكتاب صائبة.

مفهوم أساسي — قانون الفَصْل المنطقي

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت العبارة الشرطية $p \rightarrow q$ صائبة، والفرض p صائبًا، فإن النتيجة q تكون صائبة أيضًا.

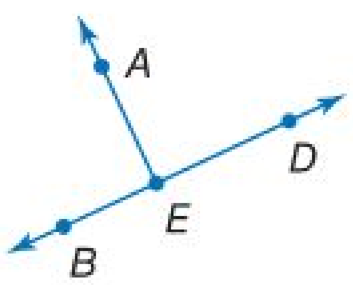
مثال: المعطيات: إذا لم يكن في السيارة وقود، فإنها لن تعمل.
لا يوجد وقود في سيارة عبدالله.

نتيجة صائبة: لن تعمل سيارة عبدالله.

عندما تكون العبارات المعطاة صائبة، فإن النتائج التي تتوصل إليها بتطبيق التبرير الاستنتاجي حتمًا تكون صائبة.

مثال 2 استعمال قانون الفَصْل المنطقي

حدد ما إذا كان الاستنتاج صائبًا في كلٍّ مما يأتي أم لا اعتمادًا على المعطيات. فسّر تبريرك.



a) **المعطيات:** • إذا كانت الزاويتان متجاورتين على مستقيم، فإن ضلعيهما غير المشتركين يكوّنان نصفَي مستقيم متعاكسين.
• $\angle AED$ و $\angle AEB$ متجاورتان على مستقيم.

الاستنتاج: $\overrightarrow{ED}$ و $\overrightarrow{EB}$ نصفا مستقيم متعاكسان.

الخطوة 1: حدّد الفرض p والنتيجة q للعبارة الشرطية الصائبة.

p: زاويتان متجاورتان على مستقيم.

q: ضلعاهما غير المشتركين يكونان نصفَي مستقيم متعاكسين.

الخطوة 2: حلل النتيجة.
العبارة المعطاة $\angle AED$ و $\angle AEB$ متجاورتان على مستقيم تحقق الفرض.
إذن p عبارة صائبة. وبتطبيق قانون الفصل المنطقي، تكون العبارة $\overrightarrow{ED}$ و $\overrightarrow{EB}$ نصفا مستقيم متعاكسان، التي تمثل q نتيجة صائبة.

b) **المعطيات:** • عندما يذهب مالك إلى النادي الرياضي، فإنه يرتدي ملابس رياضية.
• ارتدى مالك ملابس رياضية.

الاستنتاج: ذهب مالك إلى النادي الرياضي.

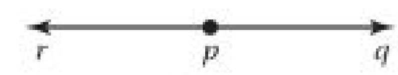
الخطوة 1: p: ذهب مالك إلى النادي الرياضي.

q: ارتدى مالك ملابس رياضية.

الخطوة 2: العبارة المعطاة "ارتدى مالك ملابس رياضية" تحقق النتيجة q للعبارة الشرطية الصائبة. لكن كون العبارة الشرطية صائبة، ونتيجتها صائبة أيضًا، لا يعني صواب الفرض، فقد يرتدي مالك ملابس رياضية، ولا يذهب إلى النادي الرياضي؛ وبذلك تكون النتيجة خاطئة.

إرشادات للدراسة

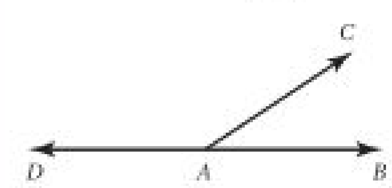
نصْفا المستقيم المتعاكسان
هما نصفا المستقيم نفسه لهما نقطة البداية نفسها، ولكن باتجاهين متعاكسين.



$\overrightarrow{pq}\ ,\ \overrightarrow{pr}$

نِصْفا مستقيمٍ متعاكسان

الزاويتان المتجاورتان على مستقيم
هما زاويتان متجاورتان؛ بحيث يكوّن ضلعاهما غير المشتركين نصفَي مستقيم متعاكسين.



$\angle DAC, \angle BAC$

متجاورتان على مستقيم

تحقق من فهمك

2A) **المعطيات:** • إذا كانت ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة، فإنها تحدد مستوى.
• النقاط A, B, C تقع في المستوى G.

الاستنتاج: النقاط A, B, C لا تقع على استقامة واحدة.

2B) **المعطيات:** • إذا أحضر الطالب موافقة من ولي أمره، فإنه يمكنه الذهاب في الرحلة المدرسية.
• أحضر سلمان موافقة من ولي أمره.

الاستنتاج: يمكن أن يذهب سلمان في الرحلة المدرسية.

يمكنك استعمال أشكال ڤن لاختبار صحة الاستنتاج.

الربط مع الحياة

حوافز: هي وسائل وعوامل من شأنها حثّ الموظفين والعمال على أداء أعمالهم بجدٍّ وإخلاص، وتشجعهم على بذل أكبر جهد في مجال الإنتاج، وهي تتنوع ما بين الحوافز المادية كالتقدير المادي، والحوافز المعنوية كالمشاركة في الأهداف المستقبلية وشهادات التقدير وغيرها.

مثال 3 من واقع الحياة — الحكم على الاستنتاج باستعمال أشكال ڤن

مكافآت وحوافز: صرفت شركة خاصة مكافآت وحوافز لبعض موظفيها؛ بناءً على المعلومات أدناه. حدد ما إذا كان الاستنتاج صائبًا أم لا، اعتمادًا على المعطيات.

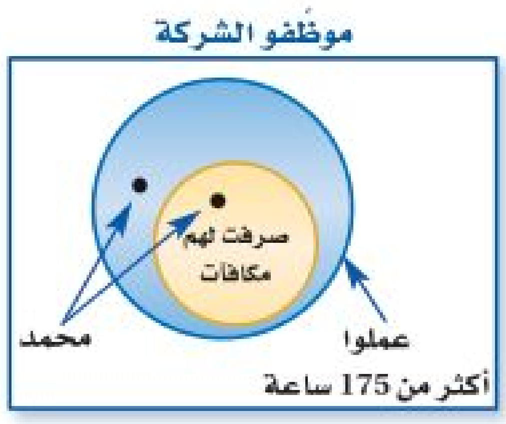
المعطيات:
- إذا صُرف للموظف مكافأة، فإن عدد ساعات عمله تكون قد تجاوزت 175 ساعةً في الشهر.
- تجاوز عدد الساعات التي عملها محمد 175 ساعة في الشهر.

الاستنتاج: صُرف لمحمد مكافأة.

افهم: ارسم شكل ڤن بناءً على المعطيات، عدد ساعات العمل للموظف الذي صُرفت له المكافأة أكثر من 175 ساعةً؛ لذا ارسم دائرةً تمثل الموظفين الذين تجاوز عدد ساعات عملهم 175 ساعةً.

خطط: بما أن عدد ساعات العمل للموظفين الذين صُرفت لهم مكافآت أكثر من 175 ساعةً؛ إذن هم يمثلون مجموعة جزئية من الموظفين الذين عملوا أكثر من 175 ساعةً.

حل: بما أن عدد ساعات عمل محمد أكثر من 175 ساعةً؛ إذن هذا يضعه داخل دائرة الموظفين الذين تجاوز عدد ساعات عملهم 175 ساعةً، لكن ليس بالضرورة داخل دائرة من صُرفت لهم مكافآت، فربما يكون داخل الدائرة أو خارجها، وعليه فالاستنتاج غير صائب.



تحقق: نعرف إنه إذا صرف للموظف مكافأة، فإن عدد ساعات عمله تكون قد تجاوزت 175 ساعةً، لكن لا نعرف أن كل موظف تجاوزت عدد ساعات عمله 175 ساعةً قد صرفت له مكافأة. ✓

تحقق من فهمك

3) **المعطيات:**
- إذا كان الشكل مربعًا، فإنه مضلع.
- الشكل A مربع.

الاستنتاج: الشكل A مضلع.

قانون القياس المنطقي: قانون القياس المنطقي هو طريقة أخرى للتبرير الاستنتاجي، وباستعمال هذا القانون يمكنك الحصول على نتائج من عبارتين شرطيتين صائبتين، وذلك عندما تكون نتيجة العبارة الشرطية الأولى هي الفرض في العبارة الشرطية الثانية.

إرشادات للدراسة

الدليل المنطقي يكون مدعومًا بقوانين المنطق، ويختلف عن الدليل الإحصائي المدعوم بالأمثلة أو البيانات.

مفهوم أساسي — قانون القياس المنطقي

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت العبارتان الشرطيتان $p \to q$, $q \to r$ صائبتين، فإن العبارة الشرطية $p \to r$ صائبة أيضًا.

مثال:
المعطيات: إذا حصلت على عمل، فسوف تكسب نقودًا.
إذا كسبت نقودًا، فسوف تتمكن من شراء سيارة.

نتيجة صائبة: إذا حصلت على عمل، فسوف تتمكن من شراء سيارة.

من المهم أن تتذكر أنه إذا لم تكن نتيجة العبارة الأولى هي الفرض في العبارة الثانية، فلا يمكنك استعمال قانون القياس المنطقي للحصول على نتيجة صائبة.

مثال 4 من الاختبار

أي العبارات الآتية تنتج منطقيًّا عن العبارتين الآتيتين؟

(1) إذا أمطرت اليوم فسوف تؤجل المباراة.

(2) إذا اعتذر أحد الفريقين فسوف تؤجل المباراة.

A إذا اعتذر أحد الفريقين فسوف تمطر اليوم.

B إذا أمطرت اليوم فسوف يعتذر أحد الفريقين.

C إذا لم تمطر فلن يعتذر أحد الفريقين.

D لا توجد نتيجة صائبة.

اقرأ فقرة الاختبار

افترض أن p, q, r تمثل أجزاء العبارتين الشرطيتين المعلومتين.

p: أمطرت اليوم

q: تأجلت المباراة

r: اعتذر أحد الفريقين

حُل فقرة الاختبار

حلِّل منطقيًّا العبارتين الشرطيتين باستعمال الرموز.

العبارة (1): $p \longrightarrow q$ العبارة (2): $r \longrightarrow q$

يمكن اعتبار كلٍّ من العبارتين الشرطيتين صائبة، ومع ذلك لا يمكن استعمال قانون القياس المنطقي؛ لأن نتيجة العبارة الشرطية الأولى ليست فرضًا للعبارة الشرطية الثانية. وعلى الرغم من أنه يحتمل أن تكون العبارات A, B, C صائبة إلا أن المنطق الذي استُعمل فيها غير صائب؛ لذلك تكون D هي الإجابة الصائبة.

تحقق من فهمك

4) أيُّ العبارات الآتية تنتج منطقيًّا عن العبارتين الآتيتين؟

(1) إذا لم تأخذ قسطًا كافيًا من النوم، فسوف تكون مرهقًا.

(2) إذا كنت مرهقًا، فلن يكون أداؤك في الاختبار جيدًا.

A إذا كنت مرهقًا، إذن أنت لم تأخذ قسطًا كافيًا من النوم.

B إذا لم تأخذ قسطًا كافيًا من النوم، فلن يكون أداؤك في الاختبار جيدًا.

C إذا لم يكن أداؤك في الاختبار جيدًا، فإنك لم تأخذ قسطًا كافيًا من النوم.

D لا توجد نتيجة صائبة.

مثال 5 تطبيق قوانين التبرير الاستنتاجي

استعمل قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي؛ لتحصل على نتيجة صائبة إن أمكن من العبارات الآتية، واذكر القانون الذي استعملته. إذا تعذر الحصول على نتيجة صائبة فاكتب "لا نتيجة صائبة"، وفسِّر تبريرك.

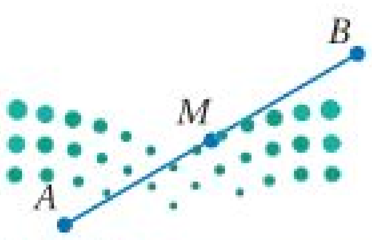
المعطيات:
- **إذا كان عمرك 18 عامًا، فإنه يمكنك التقدم للحصول على رخصة قيادة السيارات.**
- **عُمر سلمان 18 عامًا.**

p: عمرك 18 عامًا.

q: يمكنك التقدم للحصول على رخصة قيادة السيارات.

بما أن عمر سلمان 18 عامًا، فذلك يحقق الفرض p. وبتطبيق قانون الفصل المنطقي، تكون العبارة: "يمكن أن يتقدم سلمان للحصول على رخصة القيادة" نتيجة صائبة.

تحقق من فهمك



5) **المعطيات:**
- إذا كانت القطعتان المستقيمتان متطابقتين فإن طوليهما متساويان.
- M نقطة منتصف $\overline{AB}$.

تأكد

المثال 1 **حدِّد ما إذا كانت النتيجة قائمة على التبرير الاستنتاجي أم التبرير الاستقرائي في كلٍّ ممَّا يأتي:**

1) جميع الطلاب الذين تم تكريمهم معدلهم العام يزيد على 95% . محمد من الطلاب الذين تم تكريمهم؛ إذن معدل محمد العام يزيد على 95% .

2) لاحظ خالد أن جاره يسقي أشجار حديقته كل يوم جمعة. واليوم هو الجمعة، فاستنتج أن جاره سوف يسقي أشجار حديقته اليوم.

المثال 2 **حدد ما إذا كان الاستنتاج صائبًا أم لا فيما يأتي اعتمادًا على المعطيات. فسِّر تبريرك.**

3) **المعطيات:** • إذا كان العدد يقبل القسمة على 4، فإنه يقبل القسمة على 2 .
• العدد 12 يقبل القسمة على 4.
الاستنتاج: العدد 12 يقبل القسمة على 2.

4) **المعطيات:** • إذا ذهب فيصل إلى النوم متأخرًا، فسوف يكون مرهقًا في اليوم التالي.
• فيصل مرهق.
الاستنتاج: ذهب فيصل إلى النوم متأخرًا.

المثال 3 **حدد ما إذا كان الاستنتاج صائبًا أم لا فيما يأتي اعتمادًا على المعطيات. فسر تبريرك باستعمال أشكال ڤن.**

5) **المعطيات:** • إذا كان الشاطئ عامًّا، فإنه لا يوجد فيه منقذون.
• الشاطئ الجنوبي لا يوجد فيه منقذون.
الاستنتاج: الشاطئ الجنوبي عام.

6) **المعطيات:** • إذا اجتاز الطلاب اختبار القبول، فسوف يُقبَلون في الكلية.
• اجتاز عبدالله اختبار القبول.
الاستنتاج: سيُقبَل عبدالله في الكلية.

المثال 4 7) **اختيار من متعدد:** أيُّ العبارات الآتية تنتج منطقيًّا عن العبارتين (1)، (2)؟

(1) إذا كان المثلث قائم الزاوية، فإن قياس إحدى زواياه $90°$

(2) إذا كان قياس إحدى زوايا المثلث $90°$، فإن زاويتيه الحادتين تكونان متتامتين.

A إذا كان المثلث قائم الزاوية، فإنه يحوي زاوية قياسها $90°$.

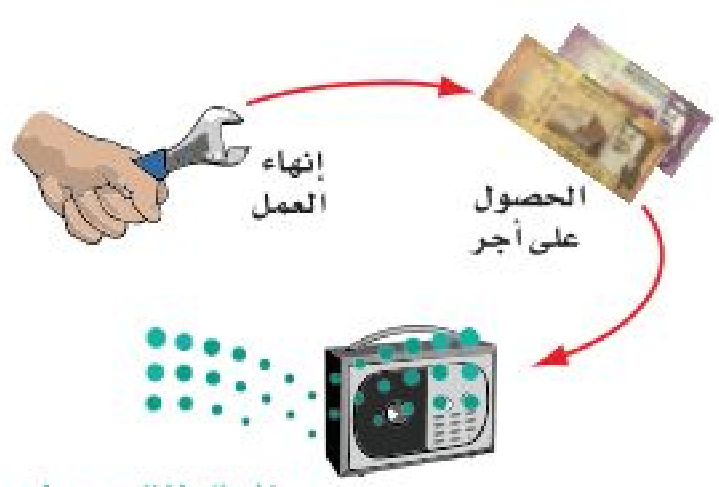
B إذا كان قياس إحدى زوايا المثلث $90°$، فإن زاويتيه الحادتين لا تكونان متتامتين.

C إذا كان المثلث قائم الزاوية، فإن زاويتيه الحادتين متتامتان.

D إذا كان قياس إحدى زوايا المثلث $90°$، فإنه لا يكون مثلثًا قائم الزاوية.

المثال 5 **استعمل قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي لتحصل على نتيجة صائبة إن أمكن من العبارات الآتية، واذكر القانون الذي استعملته. إذا تعذر الحصول على نتيجة صائبة، فاكتب "لا نتيجة صائبة". فسِّر تبريرك.**

8) **المعطيات:** • إذا أنهى وليد عمله، فإنه سيحصل على أجر.
• إذا حصل وليد على أجر، فإنه سيشتري مذياعًا.



9) **المعطيات:** الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان.
$\angle 1 \cong \angle 2$

تدرب وحل المسائل

المثال 1 **حدِّد ما إذا كانت النتيجة قائمة على التبرير الاستنتاجي أم التبرير الاستقرائي في كلٍّ ممَّا يأتي:**

10) تنصُّ التعليمات المدرسية على أنه إذا تأخرت الطالبة عن المدرسة خمس مرات، فسوف تُعطى تنبيهًا. تأخرت فاطمة خمس مرات عن المدرسة؛ لذلك سوف تُعطى تنبيهًا.

11) لاحظ طبيب الأسنان أن فهدًا يأتي في موعده المحدد، إذن سوف يأتي فهد في الموعد المحدد للزيارة القادمة.

12) إذا قرّر سعد الذهاب إلى الحفل، فلن يحضر تدريب كرة القدم هذه الليلة. ذهب سعد إلى الحفل. ولذلك لم يحضر سعد تدريب كرة القدم.

13) لاحظت علياء أنه عندما تأخذ دروس تقوية، فإن درجاتها تتحسن. أخذت علياء درس تقوية، ولذلك افترضت أن درجاتها سوف تتحسن.

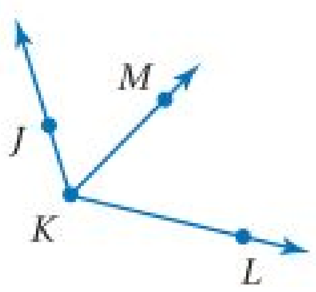
المثال 2 **حدِّد ما إذا كان الاستنتاج صائبًا في كلٍّ ممَّا يأتي اعتمادًا على المعطيات. وفسِّر تبريرك.**

14) **المعطيات:** الزوايا القائمة متطابقة، $\angle 1$ و $\angle 2$ قائمتان.

الاستنتاج: $\angle 1 \cong \angle 2$.

15) **المعطيات:** إذا كان الشكل مربعًا فإن له أربع زوايا قائمة.
الشكل $ABCD$ له أربع زوايا قائمة .

الاستنتاج: الشكل $ABCD$ مربع.



16) **المعطيات:** منصف الزاوية يقسمها إلى زاويتين متطابقتين.
$\overrightarrow{KM}$ منصف لـ $\angle JKL$.

الاستنتاج: $\angle JKM \cong \angle MKL$.

17) **المعطيات:** إذا بِيعَت %75 من تذاكر الحفل قبل يوم الأربعاء، فسيُقام في قاعة المدينة.
بِيعَت %75 من تذاكر الحفل قبل يوم الأربعاء.

الاستنتاج: سيُقام الحفل في قاعة المدينة.

المثال 3 **حدِّد ما إذا كان الاستنتاج صائبًا أم لا فيما يأتي اعتمادًا على المعطيات. وفسّر تبريرك باستعمال أشكال ڤن.**

18) **المعطيات:** إذا انخفضت درجة الحرارة إلى أقل من الصفر السيليزية، فمن المحتمل أن يسقط الثلج.
لم تنخفض درجة الحرارة عن الصفر السيليزية في يوم الإثنين.

الاستنتاج: لم يسقط الثلج يوم الإثنين.

19) **المعطيات:** إذا كان الشخص يسكن مدينة الرياض، فإنه لا يسكن بجوار الشاطئ.
لا يسكن حمود بجوار الشاطئ.

الاستنتاج: يسكن حمود في مدينة الرياض.

20) **المعطيات:** يرتدي بعض الممرضين زيًّا موحَّدًا أزرق اللون. يعمل أحمد ممرضًا .

الاستنتاج: يرتدي أحمد الزي الموحَّد الأزرق اللون.

المثال 4, 5

21) **الألعاب الأولمبية:** حقق العداء السعودي هادي صوعان إنجازًا سعوديًّا كبيرًا في دورة الألعاب الأولمبية في سيدني عام 2000م في سباق 400m حواجز، حيث أنهى السباق في زمن قدره 47.53 ثانية.

(1) إذا وصل هادي صوعان خط النهاية بعد صاحب المركز الأول مباشرة فسيحل في المركز الثاني.

(2) إذا حلّ العداء في المركز الثاني، فسيحصل على الميدالية الفضية.

استعمل العبارتين (1)، (2) للحصول على نتيجة صائبة.

الربط مع الحياة

يعتبر هادي صوعان أول رياضي سعودي يحرز ميدالية أولمبية.

استعمل قانون القياس المنطقي؛ لتحصل على نتيجة صائبة إن أمكن من العبارات الآتية. وإذا تعذّر ذلك، فاكتب "لا نتيجة صائبة". فسّر تبريرك.

22) إذا حصلت شيماء على معدل 98 فأكثر، فإن اسمها سوف يُكتب في لوحة الشرف هذا العام.
إذا كُتب اسم شيماء في لوحة الشرف هذا العام فإنه سيتم تكريمها.

23) إذا تعامد مستقيمان في مستوى، فإنهما سيتقاطعان ويكوّنان زوايا قائمة.
المستقيمان r و s في نفس المستوى ويكوّنان زوايا قائمة.

24) إذا لم يكن المستقيمان في المستوى متوازيين، فإنهما يتقاطعان.
إذا تقاطع مستقيمان، فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة.

استعمل قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي؛ لتحصل على نتيجة صائبة إن أمكن من العبارات الآتية، واذكر القانون الذي استعملته، وإذا تعذر الحصول على نتيجة صائبة، فاكتب "لا نتيجة صائبة"، وفسر تبريرك.

25) **المعطيات:** إذا كانت الزاويتان متتامتين، فإن مجموع قياسيهما يساوي $90°$
$\angle 1$ و $\angle 2$ متتامتان.

26) **المعطيات:** المثقفون يحبون المطالعة.
إذا كنت تحب المطالعة، فأنت من زوار المكتبة العامة.

27) **المعطيات:** إذا كنت رياضيًّا، فإنك تستمتع بالألعاب الرياضية.
إذا كنت تحب المنافسة، فإنك تستمتع بالألعاب الرياضية.

مسائل مهارات التفكير العليا

28) **اكتب:** فسّر لماذا لا يمكن استعمال قانون القياس المنطقي لاستنتاج نتيجة من العبارتين الشرطيتين الآتيتين:

إذا ارتديت قفازات الشتاء، فإنك ستشعر بدفءٍ في يديك.

إذا لم تكن يداك دافئتين، فإن قفازاتك رقيقة.

29) **تحدٍّ:** استعمل الرمزين $\longrightarrow$,$\wedge$؛ لتمثيل كلٍّ من قانون الفصل المنطقي وقانون القياس المنطقي بالرموز. لتكن p هي الفرض، q هي النتيجة.

30) **مسألة مفتوحة:** اكتب عبارتين يمكن تطبيق قانون القياس المنطقي للحصول على نتيجة صائبة منهما، موضحًا تلك النتيجة.

31) **تحدٍّ:** افترض أن كل المثلثات التي تحقق الخاصية B تُحقق نظرية فيثاغورس، فهل العبارة الآتية صائبة أم خاطئة؟ علّل إجابتك.

إذا لم يكن المثلث قائم الزاوية، فإنه لا يحقق الخاصية B.

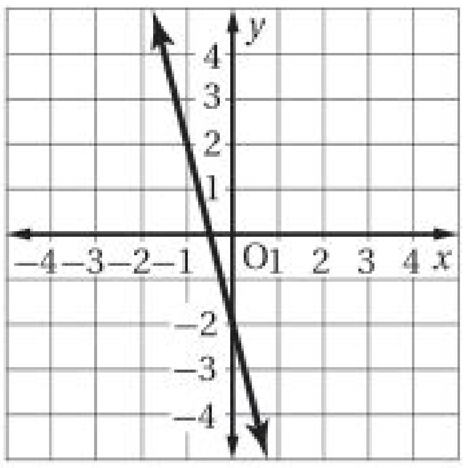
32) **اكتب:** بيِّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين قانون القياس المنطقي وخاصية التعدي للمساواة.

تدريب على اختبار

33) بيِّن أيًّا من العبارات الآتية تنتج منطقيًّا عن العبارتين التاليتين.
إذا اشتريت وجبتين، فإنك ستحصل على علبة عصير مجانًا.
اشترى خليل وجبتين.

A اشترى خليل وجبة واحدة فقط.
B سيحصل خليل على وجبة مجانية.
C سيحصل خليل على علبتَي عصير مجانًا.
D حصل خليل على علبة عصير مجانًا.

34) ما ميل المستقيم الممثل بيانيًّا؟



A $\frac{1}{4}$
B $-\frac{1}{4}$
C 4
D -4

مراجعة تراكمية

تسويق: استعمل المعلومات الآتية في حل السؤالين 35, 36. (الدرس 3-1)

يستعمل مديرو التسويق عبارات مكتوبة على صورة (إذا ... فإن ...) لترويج سلعهم وخدماتهم. يوجد إعلان في إحدى محلات صيانة الحواسيب جاء فيه: "إذا كنت تبحث عن السرعة والأمان في حاسوبك، فعليك بمحل النجوم لصيانة الحواسيب".

35) اكتب عكس العبارة الشرطية.

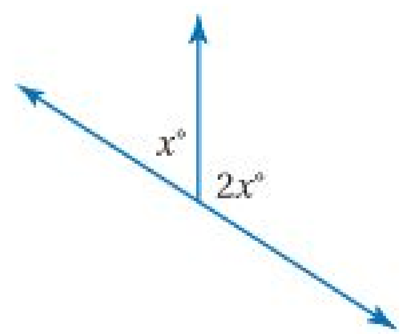
36) ما الرسالة التي يريد الإعلان إيصالها إلى الناس حول محل النجوم؟

أنشئ جدول صواب لكلٍّ من العبارات المركبة الآتية: (الدرس 2-1)

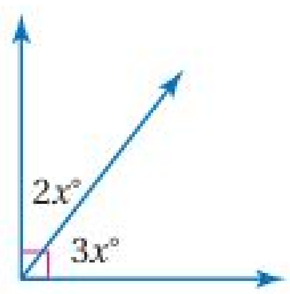
37) a و b **38)** $\sim p$ أو $\sim q$ **39)** k و $\sim m$ **40)** $\sim y$ أو z

جبر: أوجد قيمة x في كلٍّ من الأشكال الآتية: (مهارة سابقة)

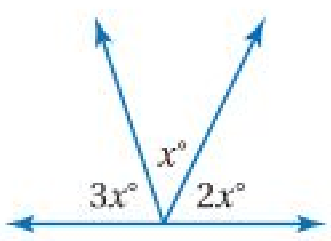
41)



42)

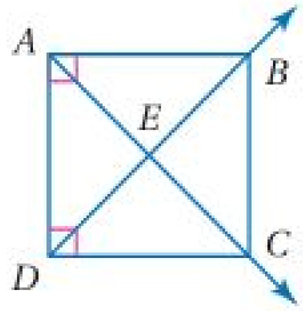


43)



استعد للدرس اللاحق

هل يمكن افتراض صواب أيٍّ من العبارات الآتية اعتمادًا على الشكل المجاور؟ فسّر إجابتك:



44) $\angle DAB$ زاوية قائمة.

45) $\angle AEB \cong \angle DEC$

46) $\angle DAE \cong \angle ADE$

47) $\overline{AB} \perp \overline{BC}$

5-1 المسلمات والبراهين الحرة
Postulates and Paragraph Proofs

فيما سبق:

درستُ استعمال التبرير الاستنتاجي بتطبيق قانون الفَصل المنطقي وقانون القياس المنطقي.

(الدرس 4-1)

والآن:

- أتعرف المسلَمات الأساسية حول النقاط والمستقيمات والمستويات وأستعملها.
- أكتب برهانًا حرًا.

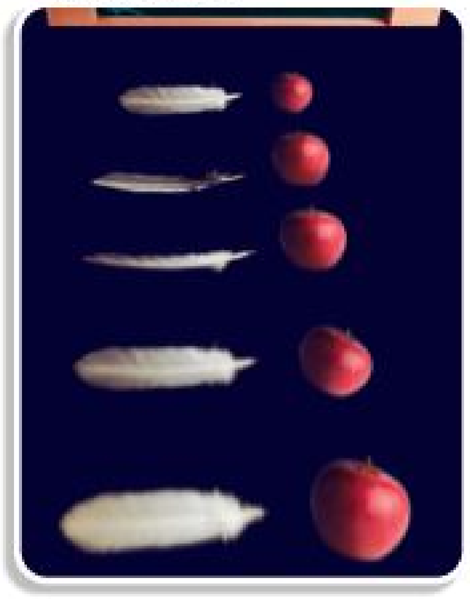
المفردات:

المسلَمة
axiom or postulate

البرهان
proof

النظرية
theorem

البرهان الحر
paragraph proof



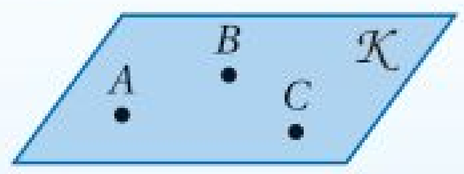
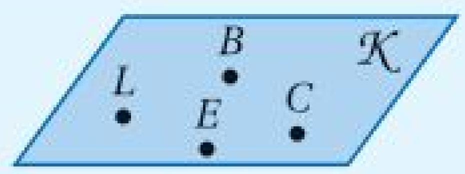
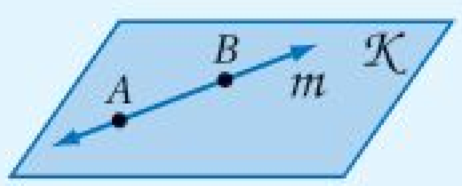
لماذا؟

التجربة في الصورة المجاورة تُظهِر سقوط الريشة والتفاحة بالسرعة نفسها في حجرة مفرغة من الهواء، وتوضح هذه التجربة قوانين نيوتن في الجاذبية الأرضية والقصور الذاتي، والتي تُقبل على أنها حقائق أساسية في الفيزياء. وفي الهندسة أيضًا توجد قوانين تقبل على أنها صحيحة دون برهان.

النقاط والمستقيمات والمستويات: **المسلَّمة** أو البدهية عبارة تعطي وصفًا لعلاقة أساسية بين المفاهيم الهندسية الأولية وتُقبل على أنها صحيحة دون برهان. درست مبادئ أساسية حول النقاط والمستقيمات والمستويات، ويمكن اعتبار هذه المبادئ الأساسية مسلّمات.

مسلمات — النقاط والمستقيمات والمستويات

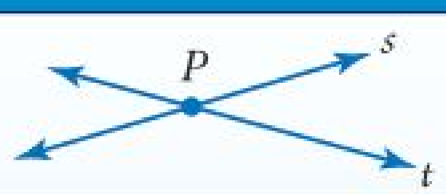
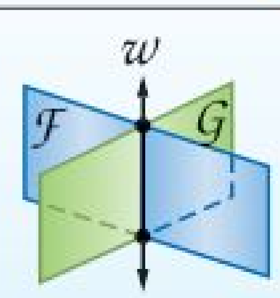
أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي	مثال	
1.1 أيُّ نقطتين يمر بهما مستقيم واحد فقط.		المستقيم n هو المستقيم الوحيد المار بالنقطتين P و R.
1.2 أيُّ ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد فقط.		المستوى $\mathcal{K}$ هو المستوى الوحيد الذي يحوي النقاط A و B و C، والتي لا تقع على استقامة واحدة.
1.3 كل مستقيم يحوي نقطتين على الأقل.		المستقيم n يحوي النقاط P و Q و R.
1.4 كل مستوى يحوي ثلاث نقاط على الأقل ليست على استقامة واحدة.		يحوي المستوى $\mathcal{K}$ النقاط L و B و C و E، وهي ليست على استقامة واحدة.
1.5 إذا وقعت نقطتان في مستوى، فإن المستقيم الوحيد المار بهما يقع كليًا في ذلك المستوى.		تقع النقطتان A و B في المستوى $\mathcal{K}$، ويمر بهما المستقيم m؛ إذن المستقيم m يقع كليًّا في المستوى $\mathcal{K}$.

تتعلق المسلّمات الآتية بتقاطع المستقيمات والمستويات.

مسلمتان — تقاطع المستقيمات والمستويات

أضف إلى مطويتك

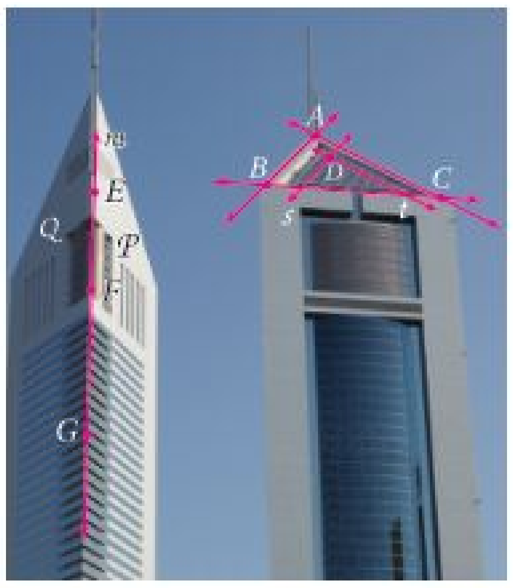
التعبير اللفظي	مثال	
1.6 إذا تقاطع مستقيمان، فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.		المستقيمان s و t يتقاطعان في النقطة P.
1.7 إذا تقاطع مستويان، فإن تقاطعهما يكون مستقيمًا.		يتقاطع المستويان $\mathcal{F}$ و $\mathcal{G}$ في المستقيم w.

قراءة الرياضيات

يرمز للمستقيم بحرف صغير مائل مثل: $n, m, \ell, \dots$ أو بأي نقطتين واقعتين عليه مثل: $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}, \dots$
يرمز للمستوى بحرف كبير مائل مثل: $\mathcal{K}, \mathcal{G}, \mathcal{F}, \dots$ أو بأي ثلاث نقاط فيه ليست على استقامة واحدة XYZ

تُعد المسلّمات أساسًا للبراهين والتبريرات المتعلقة بالنقاط والمستقيمات والمستويات.

مثال 1 من واقع الحياة تحديد المسلّمات



هندسة معمارية: اذكر المسلّمة التي تبرر صحة كل عبارة مما يأتي:

a) يحتوي المستقيم m على النقطتين F و G، ويمكن أن تقع النقطة E أيضًا على المستقيم m.

المسلمة 1.3، التي تنص على أن كل مستقيم يحوي نقطتين على الأقل.

حيث إن حافة البناية عبارة عن المستقيم m. والنقاط E, F, G واقعة على هذه الحافة؛ لذا فهي تقع على المستقيم m.

b) يتقاطع المستقيمان s و t في النقطة D.

المسلّمة 1.6 التي تنص على أنه إذا تقاطع مستقيمان فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.

حيث إن الشبكة المثلثة أعلى واجهة البناية تتشكل من مستقيمات متقاطعة، والمستقيمان s و t يتقاطعان في نقطة واحدة فقط هي D

✓ تحقق من فهمك

1A) النقاط A, B, C تحدد مستوى.

1B) يتقاطع المستويان $\mathcal{P}$ و Q في المستقيم m.

يمكنك استعمال المسلّمات لتفسير تبريرك في أثناء تحليل بعض العبارات.

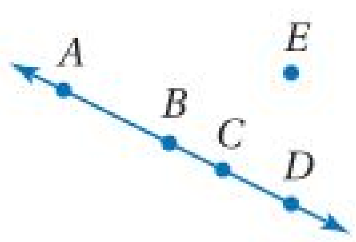
مثال 2 تحليل العبارات باستعمال المسلّمات

حدِّد ما إذا كانت كل جملة مما يلي صائبة دائمًا أو صائبة أحيانًا أو غير صائبة أبدًا. فسّر تبريرك.

a) إذا تقاطع مستقيمان واقعان في مستوى واحد، فإن نقطة تقاطعهما تقع أيضًا في المستوى الذي يحويهما.

صائبة دائمًا؛ تنص المسلّمة 1.5 على أنه إذا وقعت نقطتان في مستوى، فإن المستقيم الوحيد المار بهما يقع بكامله في ذلك المستوى، وبما أن المستقيمين يقعان في المستوى نفسه، فإن أي نقطة واقعة عليهما بما فيها نقطة التقاطع تقع في المستوى نفسه.

b) أي أربع نقاط لا تقع على استقامة واحدة.



صائبة أحيانًا: تنص المسلّمة 1.3 على أن كل مستقيم يحوي نقطتين على الأقل، وهذا يعني أنه يمكن أن يحوي المستقيم نقطتين أو أكثر؛ إذن يمكن أن تكون أربع نقاط ليست على استقامة واحدة مثل A, E, C, D في الشكل المجاور، أو تكون على استقامةٍ واحدةٍ مثل A, B, C, D.

✓ تحقق من فهمك

2A) المستقيمان المتقاطعان يحددان مستوى.

2B) تتقاطع ثلاثة مستقيمات في نقطتين.

> **إرشادات للدراسة**
>
> **نظام المسلمات**
> هو مجموعة من المسلمات التي يمكن استعمال بعضها أو كلها لاستنتاج النظريات عن طريق المنطق.

البرهان الحر: عند إثباتك نتيجة تخمين ما، فإنك تستعمل التبرير الاستنتاجي للانتقال من الفرض إلى النتيجة التي تريد إثبات صحتها بكتابة **برهان**، وهو دليل منطقي فيه كل عبارة تكتبها تكون مبررة بعبارة سبق إثباتها أو قبول صحتها.

في حال إثبات صحة عبارة (أو تخمين) فإنها تُسمى **نظرية**، ويمكن بعد ذلك استعمالها في البراهين لتبرير صحة عبارات أخرى .

مفهوم أساسي — خطوات كتابة البرهان

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1: اكتب المعطيات، وارسم شكلًا يوضحها إن أمكن.

الخطوة 2: اكتب العبارة أو التخمين المطلوب إثباته.

الخطوة 3: استعمل التبرير الاستنتاجي لتكوين سلسلة منطقية من العبارات التي تربط المعطيات بالمطلوب.

الخطوة 4: برِّر كل عبارة مستعملًا تعريفات أو خصائص جبرية أو مسلمات أو نظريات.

الخطوة 5: اكتب العبارة أو التخمين الذي قمت بإثباته.

المعطيات (الفَرض)
↓
العبارات والمبررات
↓
المطلوب (النتيجة)

البرهان الحر هو أحد أنواع البراهين، وفيه تُكتب فقرة تُفسر أسباب صحة التخمين في موقف مُعطًى.

مثال 3 — كتابة البرهان الحر

المعطيات: M نقطة منتصف $\overline{XY}$ ، اكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن $\overline{XM} \cong \overline{MY}$.

الخطوتان 1 و 2

المعطيات: M نقطة منتصف $\overline{XY}$.

المطلوب: $\overline{XM} \cong \overline{MY}$

الخطوتان 3 و 4

إذا كانت M نقطة منتصف $\overline{XY}$ ، فإنه بحسب تعريف نقطة منتصف القطعة المستقيمة تكون $\overline{XM}$ و $\overline{MY}$ لهما الطول نفسه. ومن تعريف التطابق، إذا كانت القطعتان المستقيمتان لهما الطول نفسه، فإنهما تكونان متطابقتين.

الخطوة 5

لذا $\overline{XM} \cong \overline{MY}$.

✓ تحقق من فهمك

3) إذا علمت أن C تقع على $\overline{AB}$، حيث $\overline{AC} \cong \overline{CB}$، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن C هي نقطة منتصف $\overline{AB}$.

إرشادات حل المسألة

العمل عكسيًّا
إحدى استراتيجيات كتابة البرهان هي العمل عكسيًا، وذلك بأن تبدأ من المطلوب وتعمل عكسيًا خطوة بخطوة حتى تصل إلى المعطيات.

يعرف التخمين في مثال 3 بنظرية نقطة المنتصف.

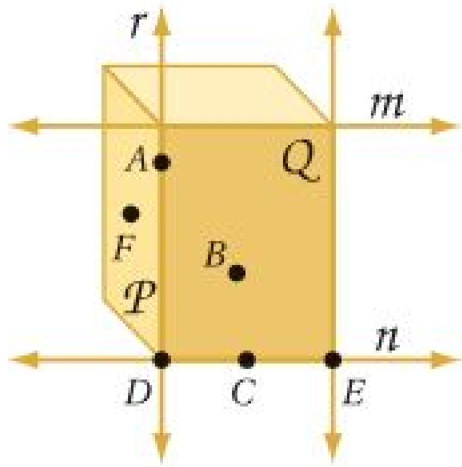
نظرية 1.1 — نظرية نقطة المنتصف

أضف إلى مطويتك

إذا كانت M نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، فإن $\overline{AM} \cong \overline{MB}$.

تأكـد

المثال 1 **اذكر المسلّمة التي تبرر صحة كل عبارة من العبارات الآتية:**



1) المستويان $\mathcal{P}$ و Q يتقاطعان في المستقيم r.

2) المستقيمان r و n يتقاطعان في النقطة D.

3) المستقيم n يحوي النقاط C, D, E .

4) المستوى $\mathcal{P}$ يحوي النقاط A, F, D .

5) المستقيم n يقع في المستوى Q.

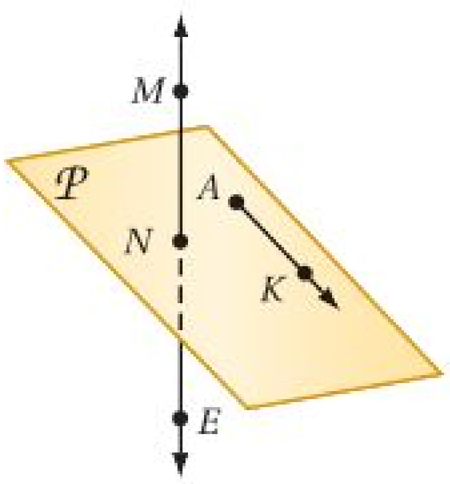
6) المستقيم r هو المستقيم الوحيد الذي يمر بالنقطتين A و D.

المثال 2 **حدِّد ما إذا كانت كل جملة مما يلي صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. وفسِّر تبريرك.**

7) تتقاطع ثلاثة مستويات في مستقيم.

8) المستقيم r يحوي النقطة P فقط.

9) يمر مستقيم واحد فقط بنقطتين معلومتين.



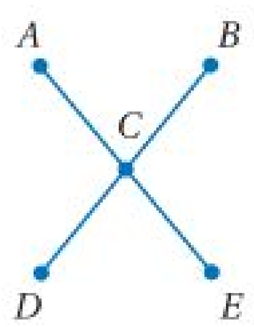
في الشكل المجاور: يقع $\overrightarrow{AK}$ في المستوى $\mathcal{P}$ وتقع النقطة M على $\overleftrightarrow{NE}$.

اذكر المسلّمة التي تثبت صحة كلٍّ من العبارات الآتية:

10) M, K, N تقع في مستوى واحد.

11) $\overleftrightarrow{NE}$ يحوي النقطتين N ، M.

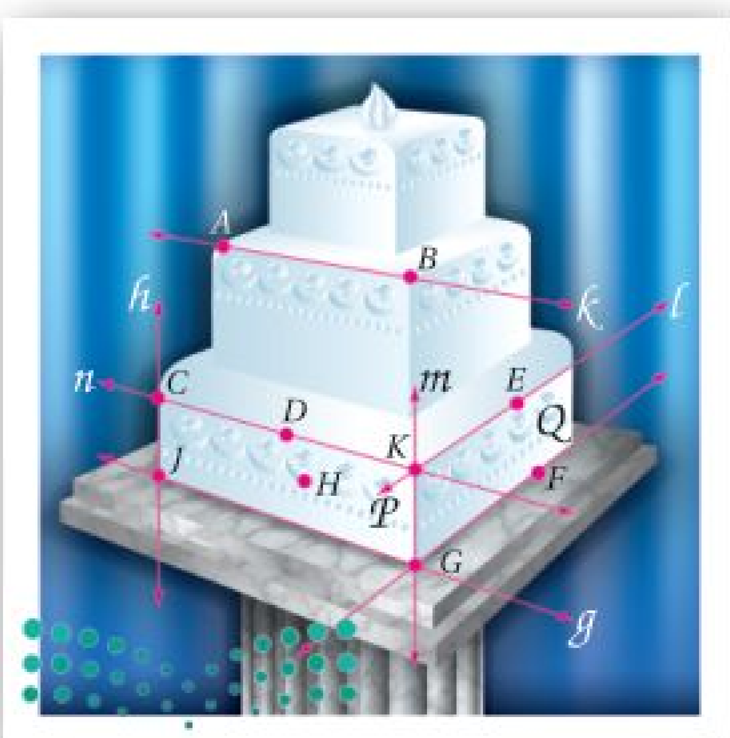
12) النقاط N, K, A تقع في المستوى نفسه.



المثال 3 13) **برهان:** في الشكل المجاور $\overline{AE} \cong \overline{DB}$،
والنقطة C نقطة منتصف كلٍّ من $\overline{AE}$ و $\overline{DB}$.
اكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن $AC = CB$.

تدرب وحل المسائل

المثال 1 **كعك:** **اذكر المسلّمة التي تبرر صحة كل عبارة من العبارات الآتية:**



14) المستقيمان n و ℓ يتقاطعان في النقطة K.

15) المستويان Q , $\mathcal{P}$ يتقاطعان في المستقيم m.

16) النقاط D, K, H تحدِّد مستوى.

17) النقطة D تقع على المستقيم n المار بالنقطتين C , K.

18) النقاط E, F, G تقع في المستوى نفسه.

19) $\overleftrightarrow{EF}$ يقع في المستوى Q.

20) المستقيمان h , g يتقاطعان في النقطة J .

المثال 2 **حدِّد ما إذا كانت كل جملة مما يلي صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. فسّر تبريرك.**

21) يوجد مستوى واحد فقط يحوي النقاط الثلاث A, B, C التي لا تقع على استقامة واحدة.

22) ثلاثة مستقيمات على الأقل تمر بالنقطتين J و K.

23) إذا وقعت النقاط M, N, P في المستوى X، فإنها تقع على استقامة واحدة.

24) تقع النقطتان X و Y في المستوى Z. وأي نقطة على استقامة واحدة مع X و Y تقع أيضًا في المستوى Z.

25) النقاط A, B, C تحدد مستوى.

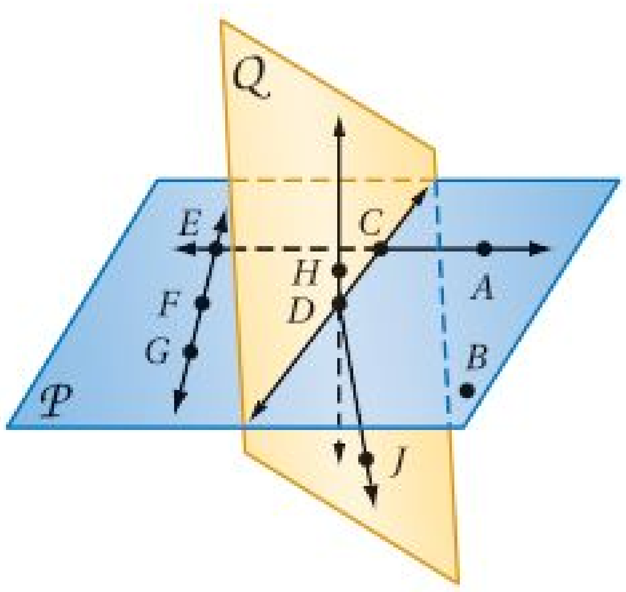
المثال 3 **26)** **برهان:** إذا علمت أن Y هي نقطة منتصف $\overline{XZ}$ ، وأن Z هي نقطة منتصف $\overline{YW}$، فأثبت أن $\overline{XY} \cong \overline{ZW}$.

27) **برهان:** النقطة L هي نقطة منتصف $\overline{JK}$، ويتقاطع $\overline{JK}$ مع $\overline{MK}$ في النقطة K . إذا كان $\overline{MK} \cong \overline{JL}$ ، فأثبت أن $\overline{LK} \cong \overline{MK}$.

28) **خرائط:** أمام خالد طريقان للانتقال من الموقع A إلى الموقع B كما يظهر في الخريطة المجاورة. إذا كان الحد الأعلى للسرعة المسموح بها على الطريق (1) هو 90km/h، وعلى الطريق (2) هو 110km/h

a) أي الطريقين يبدو أقصر طولًا؟ فسّر تبريرك.

b) إذا كانت المسافة من A إلى B عبر الطريق (1) تساوي 16.8km، والمسافة بينهما عبر الطريق (2) تساوي 17.6km، فأي الطريقين أسرع وصولًا، إذا قاد خالد سيارته بالحد الأعلى للسرعة المسموح بها؟



في الشكل المجاور، $\overleftrightarrow{CD}$ و $\overleftrightarrow{CE}$ واقعان في المستوى $\mathcal{P}$ ، $\overleftrightarrow{DH}$ و $\overleftrightarrow{DJ}$ واقعان في المستوى Q. اذكر المسلّمة التي يمكن استعمالها لإثبات صحة كل عبارة فيما يأتي :

29) النقطتان C و B على استقامة واحدة.

30) $\overleftrightarrow{EG}$ يحوي النقاط E, F, G.

31) النقطتان D و F تقعان على استقامة واحدة.

32) النقاط C, D, B تقع في المستوى نفسه.

33) المستوى Q يحوي النقاط C, H, D, J .

34) المستوى $\mathcal{P}$ يتقاطع مع المستوى Q في $\overleftrightarrow{CD}$.

35) هندسة عمارة: يُحسب ميل السطح عادة بقسمة الارتفاع مقيسًا بالبوصة على المسافة الأفقية مقيسة بالقدم. استعمل العبارات أدناه لتكتب برهانًا حرًّا للعبارة الآتية: ميل السطح في تصميم أحمد غير كافٍ.

- عند استعمال مواد عازلة للماء، يجب أن يكون الميل $\frac{1}{4}$ بوصة لكل قدم على الأقل.
- حتى ينحدر الماء بتأثير الجاذبية الأرضية، يجب أن يكون ميل السطح 4 بوصات لكل قدم.
- صمَّم أحمد سطح منزله بحيث يكون مائلًا.
- الميل في تصميم أحمد يساوي 2 بوصة لكل قدم.

الربط مع الحياة

تُصمَّم أسطح المنازل بطرائق هندسية مختلفة لمنع تسرب الماء. من هذه الطرائق استعمال مواد عازلة لا تسمح بنفاذ الماء، أو أن تُبنى مائلة؛ لتسهيل انحدار الماء عنها بتأثير الجاذبية الأرضية.

36) رياضة: أُقيمت بطولة شاركت فيها ثماني فرق كرة قدم للناشئين.

a) ما عدد المباريات التي ستُجرى في الدور الأول؟

b) ارسم شكلًا يوضح عدد مباريات الدور الأول. أيُّ مسلّمة يمكنك استعمالها لتبرير هذا الشكل؟

c) أوجد طريقة حسابية لإيجاد عدد المباريات التي ستُجرى في الدور الأول، بغض النظر عن عدد الفرق المشاركة في البطولة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

37) مسألة مفتوحة: ارسم شكلًا يحقق خمسًا من المسلمات السبع التي تعلمتها في هذا الدرس. اشرح كيف تحققت كلٌّ منها في الشكل.

38) اكتشف الخطأ: قام كلٌّ من عمر وسعيد بكتابة برهان لإثبات أنه إذا كانت $\overline{AB}$ تطابق $\overline{BD}$، وكانت A, B, D على استقامة واحدة، فإن B نقطة منتصف $\overline{AD}$. وقد بدأ كلٌّ منهما برهانه بطريقة مختلفة. أيُّهما بدأ برهانه بطريقة صحيحة؟ فسر إجابتك.

عمر	سعيد
إذا كانت B نقطة منتصف $\overline{AB}$، فإن B تقسم $\overline{AD}$ إلى قطعتين مستقيمتين متطابقتين.	$\overline{AB}$ تطابق $\overline{BD}$، والنقاط A, B, C تقع على استقامة واحدة.

تبرير: حدِّد ما إذا كانت الجملة الآتية صحيحة أحيانًا أو صحيحة دائمًا أو غير صحيحة أبدًا. فسِّر تبريرك أو أعط مثالًا مضادًّا:

39) أيُّ ثلاث نقاط يمر بها مستوى واحد فقط.

40) **اكتب:** بيِّن أوجه الشبه والاختلاف بين المسلّمات والنظريات.

تدريب على اختبار

41) أيُّ العبارات الآتية ليست صائبة؟

A أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تحدد مستوى واحدًا فقط.

B يتقاطع المستقيمان في نقطة واحدة فقط.

C يوجد على الأقل مستقيمان يحويان النقطتين نفسيهما.

D تقسم نقطة المنتصف القطعة المستقيمة إلى قطعتين متطابقتين.

42) ما أكبر عدد من المناطق التي تتشكل عندما تقطع ثلاثة مستقيمات مختلفة دائرة؟

A 4   **C** 6

B 5   **D** 7

مراجعة تراكمية

استعمل قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي؛ لتحصل على نتيجة صائبة من العبارات الآتية إن أمكن، واذكر القانون الذي استعملته. وإذا تعذر الحصول على نتيجة صائبة، فاكتب "لا نتيجة صائبة". فسر تبريرك. (الدرس 1-4)

43) (1) إذا كانت الزاويتان متقابلتين بالرأس، فإنهما لا تكونان متجاورتين على مستقيم.

(2) إذا كانت الزاويتان متجاورتين على مستقيم فهما غير متطابقتين.

44) (1) إذا كانت الزاوية حادة، فإن قياسها أقل من $90°$

(2) $\angle EFG$ حادة.

اكتب العبارتين الشرطيتين الآتيتين على صورة (إذا ... فإن ...). (الدرس 1-3)

45) يُكتب اسم الطالب المتفوق في لوحة الشرف.

46) يخشى البطل أن يخسر.

استعد للدرس اللاحق

حُلَّ كلًّا من المعادلات الآتية:

47) $4x - 3 = 19$

48) $\frac{1}{3}x + 6 = 14$

49) $5(x^2 + 2) = 30$

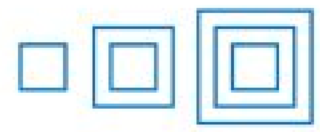
الفصل **1**

اختبار منتصف الفصل

الدروس 1-1 إلى 1-5

اكتب تخمينًا يصف النمط في كل متتابعة مما يأتي، ثم استعمله لإيجاد الحد التالي في كلٍّ منها . (الدرس 1-1)

1) $5, 5, 10, 15, 25, \ldots\ldots$

2)  ......

أعط مثالًا مضادًّا يبين أن كلًّا من التخمينين الآتيين خاطئ: (الدرس 1-1)

3) إذا كان $AB = BC$ ، فإن B نقطة منتصف $\overline{AC}$.

4) إذا كان n عددًا حقيقيًّا، فإن $n^3 > n$.

استعمل العبارات p, q, r لكتابة كل عبارة وصل أو فصل أدناه، ثم أوجد قيمة الصواب لها. فسّر تبريرك. (الدرس 1-2)

p: في الأسبوع الواحد 7 أيام.

q: في اليوم الواحد 24 ساعة.

r: صَفَر هو الشهر الذي يأتي قبل شهر المحرم.

5) $p \wedge r$

6) p و q

7) $p \wedge \sim r$

8) أكمل الجدول الآتي. (الدرس 1-2)

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$
T	F		
F	T		
F	F		
T	T		

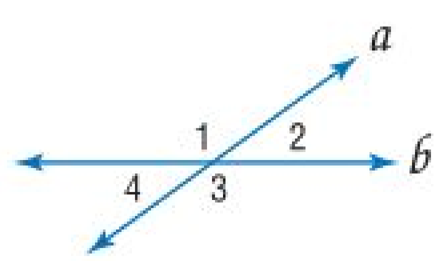
حدد الفرض والنتيجة في كلٍّ من العبارات الشرطية الآتية: (الدرس 1-3)

9) إذا كان للمضلع خمسة أضلاع، فإنه خماسي.

10) إذا كان $4x - 6 = 10$ ، فإن $x = 4$.

11) الزاوية التي قياسها أقل من $90°$ تكون حادة.

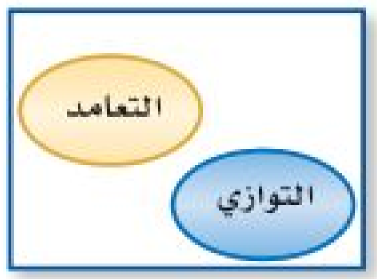
حدد قيمة الصواب لكلٍّ من العبارتين الشرطيتين الآتيتين. وإذا كانت العبارة صائبة، فبرر إجابتك. (الدرس 1-3)



12) $\angle 1$ و $\angle 2$ متكاملتان.

13) $\angle 1$ و $\angle 4$ متطابقتان.

استعمل أشكال فن أدناه لتحديد قيمة الصواب لكلٍّ من العبارات الشرطية الآتية. وفسر تبريرك . (الدرس 1-3)



14) إذا كان المضلع مربعًا، فإنه يكون مستطيلاً.

15) إذا كان المستقيمان متعامدين، فإنهما لا يمكن أن يكونا متوازيين.

16) **كرة قدم:** تقابل فريقا الفرسان والفهود في المباراة النهائية. معتمدًا على المعطيات، حدِّد ما إذا كانت النتيجة صائبة أم لا في كلٍّ مما يأتي. وفسِّر تبريرك. (الدرس 1-4)

المعطيات: الفريق الفائز بالكأس هو الفريق الذي يحرز أهدافًا أكثر في نهاية المباراة.
أحرز فريق الفرسان 3 أهداف، بينما أحرز فريق الفهود هدفين.

النتيجة: فاز فريق الفرسان بالكأس.

17) **اختيار من متعدد:** أي العبارات الآتية تنتج منطقيًّا عن العبارتين (1) و (2)؟ (الدرس 1-4)

(1) إذا كنت أحد طلاب المرحلة الثانوية، فإن عمرك 16 سنة على الأقل.

(2) إذا كان عمرك 16 سنة على الأقل، فإن عمرك يؤهِّلك لقيادة السيارة.

A إذا كان عمرك يؤهِّلك لقيادة السيارة، فإنك أحد طلاب المرحلة الثانوية.

B إذا كان عمرك لا يؤهِّلك لقيادة السيارة، فأنت في المرحلة المتوسطة.

C إذا كنت أحد طلاب المرحلة الثانوية، فإن عمرك يؤهِّلك لقيادة السيارة .

D إذا كان عمرك 16 سنة على الأقل، فإنك أحد طلاب المرحلة الثانوية.

حدِّد ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. وفسر تبريرك. (الدرس 1-5)

18) النقاط J, K, L, N ليست على استقامة واحدة، وتقع جميعها في المستوى $\mathcal{M}$.

19) يوجد مستقيم واحد فقط يمر بالنقطتين R , S.

20) المستقيم a يحتوي على النقطة Q فقط.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

1-6 البرهان الجبري
Algebraic Proof

فيما سبق:
درستُ المسلّمات الأساسية حول النقاط والمستقيمات والمستويات.
(الدرس 1-5)

والآن:
- أستعمل الجبر لكتابة برهان ذي عمودين.
- أستعمل خصائص المساواة لكتابة برهان هندسي.

المفردات:
البرهان الجبري
algebraic proof
البرهان ذو العمودين
two-column proof

لماذا؟

تحتوي بعض السيارات على شاشة لعرض درجة الحرارة الخارجية بالمقياس الفهرنهايتي أو المقياس السيليزي. والمقياس الفهرنهايتي يحدد درجة تجمد الماء عند °32 ، ودرجة غليانه عند °212، أما المقياس السيليزي فيحدد درجة تجمد الماء عند °0 ، وغليانه عند °100.

يمكنك استعمال البرهان الجبري؛ لإثبات أنه إذا كانت العلاقة التي تربط هذين المقياسين معطاة بالصيغة. $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ ، فإنها تعطى أيضًا بالصيغة $F = \frac{9}{5}C + 32$

البرهان الجبري: الجبر نظام مكوَّن من مجموعات من الأعداد، وعمليات عليها وخصائص تمكِّنك من إجراء هذه العمليات. والجدول الآتي يلخِّص عدة خصائص للأعداد الحقيقية التي ستستعملها في الجبر.

مفهوم أساسي — خصائص الأعداد الحقيقية

أضف إلى مطويتك

الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاثة أعداد حقيقية a, b, c

خاصية الجمع للمساواة	إذا كان $a = b$، فإن $a + c = b + c$.
خاصية الطرح للمساواة	إذا كان $a = b$، فإن $a - c = b - c$.
خاصية الضرب للمساواة	إذا كان $a = b$، فإن $a \cdot c = b \cdot c$.
خاصية القسمة للمساواة	إذا كان $a = b$ و $c \neq 0$، فإن $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.
خاصية الانعكاس للمساواة	$a = a$
خاصية التماثل للمساواة	إذا كان $a = b$، فإن $b = a$.
خاصية التعدي للمساواة	إذا كان $a = b$ و $b = c$، فإن $a = c$.
خاصية التعويض للمساواة	إذا كان $a = b$ ، فإنه يمكننا أن نضع b مكان a في أي معادلة أو عبارة جبرية تحتوي على a
خاصية التوزيع	$a(b + c) = ab + ac$

البرهان الجبري هو برهان يتكون من سلسلة عبارات جبرية، وتبرر خصائص المساواة أعلاه كثيرًا من العبارات المُستعملة في البراهين الجبرية.

مثال 1 تبرير كل خطوة عند حل المعادلة

أثبت أنه إذا كان $-5(x + 4) = 70$، فإن $x = -18$. اكتب تبريرًا لكل خطوة.

$-5(x + 4) = 70$	المعادلة الأصلية، أو المعطيات
$-5 \cdot x + (-5) \cdot 4 = 70$	استعمل خاصية التوزيع
$-5x - 20 = 70$	بسِّط
$-5x - 20 + 20 = 70 + 20$	استعمل خاصية الجمع للمساواة
$-5x = 90$	بسِّط
$\frac{-5x}{-5} = \frac{90}{-5}$	استعمل خاصية القسمة للمساواة
$x = -18$	بسِّط

وزارة التعليم
Ministry of Education

تحقق من فهمك

اذكر الخاصية التي تبرر كلًّا من العبارتين الآتيتين:

1A) إذا كان $x - 1 = -1 + (-5)$ ،4، فإن $x + 4 + (-5) = x - 1$ ...

1B) إذا كانت $5 = y$ ، فإن $y = 5$

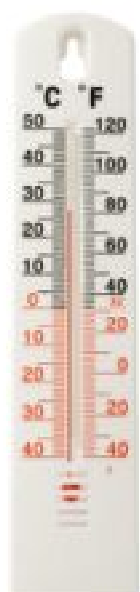
1C) أثبت أنه إذا كان $2x - 13 = -5$، فإن $x = 4$. اكتب تبريرًا لكل خطوة.

يوضح **المثال** 1 برهان العبارة الشرطية "إذا كان $-5(x + 4) = 70$، فإن $x = -18$". لاحظ في هذا البرهان أن العمود الأيمن يحتوي على تفصيل الطريقة التي تقود إلى الحل خطوة بخطوة، أما العمود الأيسر فيحتوي على مبرر كل خطوة.

وتكتب براهين النظريات والتخمينات الهندسية عادةً على هذا النحو فيما يسمى **البرهان ذو العمودين** ، حيث العبارات مرتبة في عمود، والتبريرات في عمود موازٍ.

> **إرشادات للدراسة**
>
> **الخوارزميات**
>
> الخوارزمية هي سلسلة من الخطوات المتَّبعة لإجراء عملية أو حل مسألة ما. ويمكن اعتبار البرهان من أنواع الخوارزميات؛ لأنه يتم خطوة بخطوة.

مثال 2 من واقع الحياة — كتابة البرهان الجبري



علوم: إذا كانت الصيغة التي تحول درجات الحرارة من فهرنهايتية إلى سيليزية هي $C = \frac{5}{9}(F - 32)$، فإن الصيغة التي تحول درجات الحرارة من سيليزية إلى فهرنهايتية هي $F = \frac{9}{5}C + 32$. اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات صحة هذا التخمين.

اكتب المعطيات والمطلوب إثباته أولًا.

المعطيات: $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

المطلوب: $F = \frac{9}{5}C + 32$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $C = \frac{5}{9}(F - 32)$	1) معطيات
2) $\frac{9}{5}C = \frac{9}{5} \cdot \frac{5}{9}(F - 32)$	2) خاصية الضرب للمساواة
3) $\frac{9}{5}C = F - 32$	3) بالتبسيط
4) $\frac{9}{5}C + 32 = F - 32 + 32$	4) خاصية الجمع للمساواة
5) $\frac{9}{5}C + 32 = F$	5) بالتبسيط
6) $F = \frac{9}{5}C + 32$	6) خاصية التماثل للمساواة

> **إرشادات للدراسة**
>
> **رياضيات ذهنية**
>
> إذا سمح معلمك، يمكنك حذف بعض الخطوات، وذلك لأن بعض الحسابات يمكن إجراؤها ذهنيًا؛ ففي **المثال 2** يمكن حذف العبارتين 2 و 4؛ ليصبح مبرر العبارة 3 "خاصية الضرب للمساواة"، والعبارة 5 "خاصية الجمع للمساواة".

تحقق من فهمك

اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات صحة كلٍّ من التخمينين الآتيين:

2A) إذا كان $\frac{5x + 1}{2} - 8 = 0$، فإن $x = 3$.

2B) **فيزياء:** إذا كانت المسافة d التي يقطعها جسم متحرك بسرعة ابتدائية u وسرعة نهائية v في زمن t، تعطى بالعلاقة $d = t \cdot \frac{u + v}{2}$ ، فإن $u = \frac{2d}{t} - v$.

إرشادات للدراسة

خاصيتا الإبدال والتجميع
الخصائص الآتية صحيحة لأي أعداد حقيقية a, b, c :

خاصية الإبدال للجمع
$a + b = b + a$

خاصية الإبدال للضرب
$a \cdot b = b \cdot a$

خاصية التجميع للجمع
$(a+b)+c=a+(b+c)$

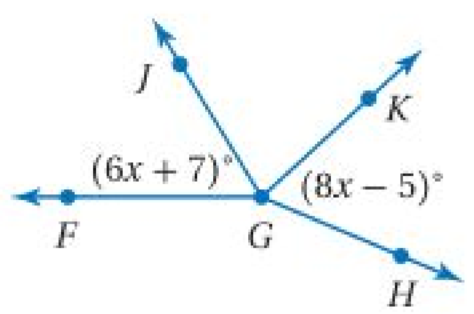
خاصية التجميع للضرب
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

البرهان الهندسي: بما أن في الهندسة أيضًا متغيرات، وأعدادًا وعمليات، فإن معظم خصائص المساواة المُستعملة في الجبر صحيحة أيضًا في الهندسة. فأطوال القطع المستقيمة وقياس الزوايا هي أعداد حقيقية؛ لذا يمكن استعمال خصائص الجبر في إثبات العلاقات بين القطع المستقيمة والزوايا.

الخاصية	القطع المستقيمة	الزوايا
الانعكاس	$AB = AB$	$m\angle 1 = m\angle 1$
التماثل	إذا كان $AB = CD$ ، فإن $CD = AB$.	إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$ ، فإن $m\angle 2 = m\angle 1$.
التعدي	إذا كانت $AB = CD$ ، و $CD = EF$ ، فإن $AB = EF$.	إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$ ، و $m\angle 2 = m\angle 3$، فإن $m\angle 1 = m\angle 3$.

يمكن استعمال هذه الخصائص لكتابة براهين هندسية .

مثال 3 كتابة البرهان الهندسي



اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أنه إذا كانت: $\angle FGJ \cong \angle JGK$, $\angle JGK \cong \angle KGH$، فإن $x = 6$.

المعطيات: $\angle FGJ \cong \angle JGK, \angle JGK \cong \angle KGH,$
$m\angle FGJ = (6x + 7)°, m\angle KGH = (8x - 5)°$

المطلوب: $x = 6$

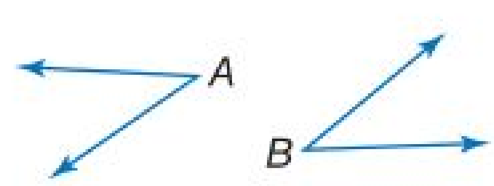
البرهان:

العبارات	المبررات
(1 $\angle FGJ \cong \angle JGK; \angle JGK \cong \angle KGH$	(1 معطيات
(2 $m\angle FGJ = m\angle JGK; m\angle JGK = m\angle KGH$	(2 تعريف تطابق الزوايا
(3 $m\angle FGJ = m\angle KGH$	(3 خاصية التعدي للمساواة
(4 $6x + 7 = 8x - 5$	(4 خاصية التعويض للمساواة
(5 $6x + 7 + 5 = 8x - 5 + 5$	(5 خاصية الجمع للمساواة
(6 $6x + 12 = 8x$	(6 بالتبسيط
(7 $6x + 12 - 6x = 8x - 6x$	(7 خاصية الطرح للمساواة
(8 $12 = 2x$	(8 بالتبسيط
(9 $\frac{12}{2} = \frac{2x}{2}$	(9 خاصية القسمة للمساواة
(10 $6 = x$	(10 بالتبسيط
(11 $x = 6$	(11 خاصية التماثل للمساواة

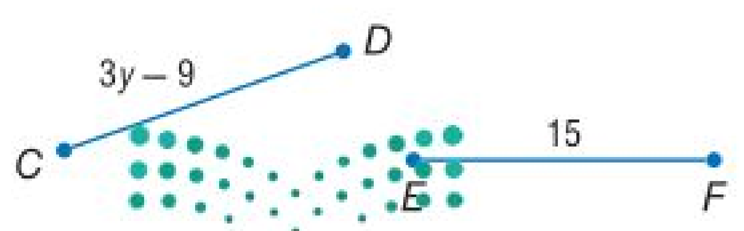
تحقق من فهمك

اكتب برهانًا ذا عمودين؛ لإثبات صحة كلٍّ من التخمينين الآتيين:

3A) إذا كان $\angle A \cong \angle B, m\angle A = 37°$، فإن $m\angle B = 37°$.



3B) إذا كان $\overline{CD} \cong \overline{EF}$ ، فإن $y = 8$.



تأكـد

المثال 1 **اذكر الخاصية التي تبرر العبارة:**

1) إذا كان $x = 5$، فإن $5 = x$

2) أثبت أنه إذا كان $2(x + 5) = 11$، فإن $x = \frac{1}{2}$ اكتب تبريرًا لكل خطوة.

المثال 2 **3)** أكمل البرهان الآتي:

المعطيات: $\frac{y + 2}{3} = 3$

المطلوب: $y = 7$

البرهان:

العبارات	المبررات
a) ___؟___	**a)** معطيات
b) $3\left(\frac{y + 2}{3}\right) = 3(3)$	**b)** ___؟___
c) ___؟___	**c)** ___؟___
d) $y = 7$	**d)** خاصية الطرح للمساواة

المثالان 2, 3 **برهان:** **اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات صحة كلٍّ من التخمينين الآتيين:**

4) إذا كان $-4(x - 3) + 5x = 24$، فإن $x = 12$.

5) إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CD}$، فإن $x = 7$.

6) **صحة:** يراقب بدر معدل نبضات قلبه في الدقيقة الواحدة مستعملًا جهاز قياس النبض؛ ليتحقق من أنه يقع ضمن المدى الطبيعي. ويمكن تقدير هذا المعدل باستعمال الصيغة: $T = 0.75(220 - a)$، حيث T معدل نبضات القلب، و a عمر الشخص.

a) أثبت أنه إذا علمت معدل نبضات قلب شخص، فإنه يمكنك حساب عمره مستعملًا الصيغة: $a = 220 - \frac{T}{0.75}$.

b) إذا كان معدل نبضات قلب بدر يساوي 153، فكم يكون عمره؟ ما الخاصية التي تؤكد صحة حساباتك؟

تدرب وحل المسائل

المثال 1 **اذكر الخاصية التي تبرر كل عبارة مما يأتي:**

7) إذا كان $a + 10 = 20$، فإن $a = 10$.

8) إذا كان $\frac{x}{3} = -15$، فإن $x = -45$.

9) إذا كان $5(x + 7) = -3$، فإن $5x + 35 = -3$.

10) إذا كان $3\left(x - \frac{2}{3}\right) = 4$، فإن $3x - 2 = 4$.

11) أثبت أنه إذا كان $4(x - 5) = x + 2$، فإن $x = \frac{22}{3}$ مبررًا كل خطوة.

اذكر الخاصية التي تبرر كل عبارة مما يأتي:

12) إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$, $m\angle 2 = m\angle 3$، فإن $m\angle 1 = m\angle 3$.

13) $XY = XY$

14) إذا كان $\frac{1}{5}BC = \frac{1}{5}DE$، فإن $BC = DE$.

15) إذا كان $m\angle 1 = 25°$, $m\angle 2 = 25°$، فإن $m\angle 1 = m\angle 2$.

16) إذا كان $AB = BC$, $BC = CD$، فإن $AB = CD$.

المثال 2 أكمل البرهانين الآتيين:

17) **المعطيات:** $\frac{8-3x}{4} = 32$

المطلوب: $x = -40$

البرهان:

العبارات	المبررات
a) $\frac{8-3x}{4} = 32$	**a)** معطيات
b) $4\left(\frac{8-3x}{4}\right) = 4(32)$	**b)** ____؟____
c) $8 - 3x = 128$	**c)** ____؟____
d) ____؟____	**d)** خاصية الطرح للمساواة
e) $x = -40$	**e)** ____؟____

18) **علوم:** تعطى المسافة d التي يقطعها جسم متحرك بالقدم بالصيغة: $d = vt + \frac{1}{2}at^2$ ، حيث v سرعة الجسم بالقدم لكل ثانية، وt الزمن بالثانية، وa التسارع بالقدم لكل ثانية تربيع.

اكتب برهانًا ذا عمودين؛ لإثبات أن التسارع يمكن أن يُحسب بالصيغة $a = \frac{2d - 2vt}{t^2}$

المثال 3 **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات صحة كلٍّ من التخمينين الآتيين:

19) إذا كان $-\frac{1}{3}n = 12$، فإن $n = -36$.

20) إذا كان $-3r + \frac{1}{2} = 4$، فإن $r = -\frac{7}{6}$.

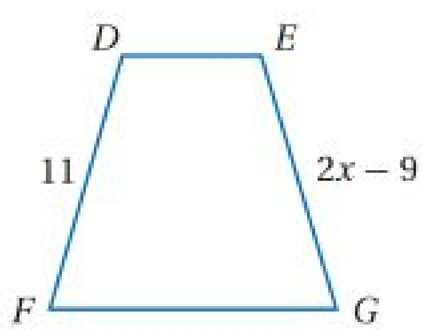
21) **علوم:** يُعطى قانون الغاز المثالي بالصيغة $PV = nRT$، حيث P : الضغط بوحدة الضغط الجوي(atm)، وV : الحجم باللترات ، و n : عدد مولات الغاز ، و R : ثابت الغاز المثالي، حيث $R = 0.0821$، T : درجة الحرارة بالكلفن.

a) أثبت أنه إذا كان ضغط الغاز وحجمه وعدد مولاته جميعها معلومة، فإنه يمكن حساب درجة حرارته باستعمال الصيغة $T = \frac{PV}{nR}$.

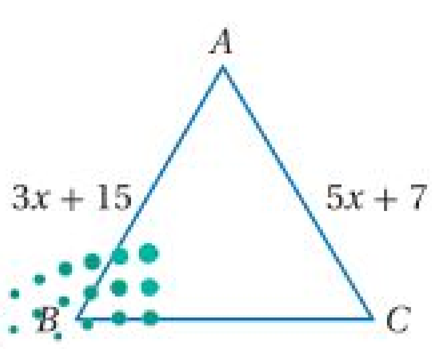
b) ما درجة حرارة 1 مول من الأكسجين موجود في إناء سعته 25 L ، وتحت ضغط مقداره 1 atm ؟ ما الخاصية التي تبرِّر حساباتك؟

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات صحة كلٍّ من التخمينات الآتية:

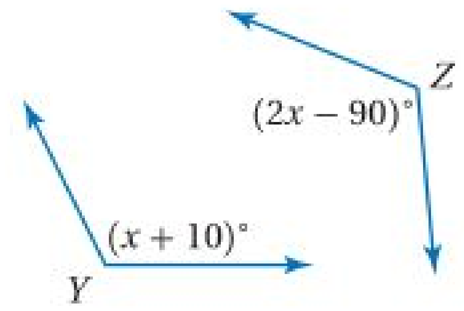
22) إذا كانت $\overline{DF} \cong \overline{EG}$ ، فإن $x = 10$.



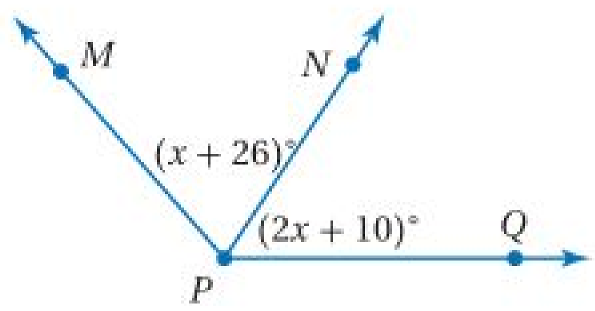
23) إذا كانت $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ ، فإن $x = 4$.



24) إذا كانت $\angle Z \cong \angle Y$، فإن $x = 100$.



25) إذا كانت $\angle MPN \cong \angle QPN$، فإن $x = 16$.



26) **كهرباء:** يمكن حساب فرق الجهد V للدائرة الكهربائية باستعمال القانون $V = \frac{P}{I}$، حيث: P القدرة الكهربائية، و I شدة التيار الكهربائي المار في الدائرة.

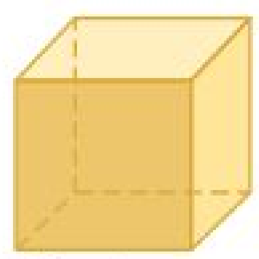
a) اكتب برهانًا لإثبات أنه عندما تكون القدرة الكهربائية ثابتة، فإن فرق الجهد يصبح نصف ما كان عليه عندما تتضاعف شدة التيار الكهربائي.

b) اكتب برهانًا لإثبات أنه عندما تكون شدة التيار الكهربائي ثابتة، فإن فرق الجهد يتضاعف عندما تتضاعف القدرة الكهربائية.

الربط مع الحياة

يحدث البرق عند تفريغ الشحنات بين السحب المشحونة كهربائيًا. وتستمر هذه العملية لمدة تقل عن ثانية واحدة، وينتج عنها من 100 مليون إلى 1 بليون ڤولت. قارن هذه الكمية مع فرق الجهد في المنازل، والذي يبلغ 120 ڤولت أو 220 ڤولت فقط.

27) **تمثيلات متعددة:** افترض أن مكعبًا طول ضلعه s وحدة.



s وحدة

a) **حسيًا:** ارسم أو اعمل نماذج لمكعبات أطوال أضلاعها 16 ,8 ,4 ,2 وحدة.

b) **جدوليًا:** أوجد حجم كل مكعب. نظّم نتائجك في جدول مثل المجاور.

طول الضلع (s)	الحجم (V)
2	
4	
8	
16	

c) **لفظيًا:** استعمل الجدول لعمل تخمين حول تغيُّر حجم المكعب عندما يتضاعف طول ضلعه. عبّر عن تخمينك لفظيًا.

d) **جبريًا:** اكتب تخمينك على صورة معادلة جبرية.

e) **منطقيًا:** اكتب برهانًا لتخمينك. تأكد من كتابة المعطيات والمطلوب في بداية البرهان.

مسائل مهارات التفكير العليا

28) **تحدٍّ:** تقع النقطة P على $\overline{AB}$. إذا علمت أن طول $\overline{AP}$ يساوي $2x + 3$، وطول $\overline{PB}$ يساوي $\frac{3x + 1}{2}$، وطول $\overline{AB}$ يساوي 10.5 وحدات، فارسم شكلًا يوضح المسألة، وأثبت أن طول $\overline{AP}$ يساوي ثلثَي طول $\overline{AB}$.

تبرير: صنِّف الجمل الآتية إلى صحيحة أحيانًا أو صحيحة دائمًا أو غير صحيحة أبدًا. فسر تبريرك.

29) إذا كان a و b عددين حقيقيين، وكان $a + b = 0$، فإن $a = -b$.

30) إذا كان a و b عددين حقيقيين، وكان $a^2 = b$، فإن $a = \sqrt{b}$.

31) **تحدٍّ:** وضعت آمنة تخمينًا ينصُّ على أن مجموع أي عددين صحيحين فرديين هو عدد زوجي.

a) أعط أمثلة تؤيد هذا التخمين، ثم فسر لماذا لا تُثبت هذه الأمثلة صحة التخمين.

b) يمكن كتابة العدد الفردي على الصورة $2n - 1$. أعط أمثلة تؤيد ذلك.

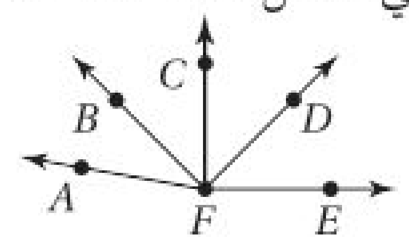
c) ما العدد الذي تكون الأعداد الزوجية جميعها مضاعفات له؟ فسّر لفظيًا كيف يمكن استعمال إجابتك عن الفرعين a, b، لإثبات صحة التخمين.

d) اكتب برهانًا جبريًا لإثبات أن مجموع أي عددين صحيحين فرديين هو عدد صحيح زوجي.

32) **اكتب:** ما أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين البرهان الحر والبرهان ذي العمودين. أيُّ البرهانين تجده أسهل للكتابة؟ برر إجابتك.

تدريب على اختبار

33) في الشكل أدناه: $m\angle CFE = 90°$ و $\angle AFB \cong \angle CFD$.



أيٌّ مما يأتي ليس صحيحًا بالضرورة؟

A $m\angle BFD = m\angle BFD$ **C** $m\angle CFD = m\angle AFB$

B $\overleftrightarrow{FC}$ محور تناظر للشكل **D** $\angle CFE$ قائمة.

34) **مراجعة:** أي علاقة يمكن أن تُستعمل لإيجاد قيم $s(n)$ في الجدول التالي؟

n	-8	-4	-1	0	1
$s(n)$	1	2	2.75	3	3.25

A $s(n) = -n + 7$ **C** $s(n) = \frac{1}{2}n + 5$

B $s(n) = -2n + 3$ **D** $s(n) = \frac{1}{4}n + 3$

مراجعة تراكمية

حدّد ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. فسّر إجابتك. (الدرس 5-1)

35) أي أربع نقاط تقع في المستوى نفسه.

36) الزاويتان المنفرجتان متكاملتان.

37) المستويان $\mathcal{P}$ و Q يتقاطعان في المستقيم m. والمستقيم m يقع في كلا المستويين $\mathcal{P}$ و Q.

حدد ما إذا كانت النتيجة صائبة أم لا في كلٍّ مما يأتي؛ اعتمادًا على العبارة التالية والمعطيات مبررًا إجابتك.
"يقبل العدد القسمة على 3 إذا كان يقبل القسمة على 6". (الدرس 4-1)

38) **المعطيات:** 24 يقبل القسمة على 6. **النتيجة:** 24 يقبل القسمة على 3.

39) **المعطيات:** 27 يقبل القسمة على 3. **النتيجة:** 27 يقبل القسمة على 6.

40) **المعطيات:** 85 لا يقبل القسمة على 3. **النتيجة:** 85 لا يقبل القسمة على 6.

41) **مبانٍ:** توجد أربع بنايات في مدرسةٍ، لا يوجد ثلاث منها على استقامة واحدة.
ما عدد ممرات المشاة اللازمة لربط كل بنايتين بممرٍّ مشاةٍ واحدٍ؟ (الدرس 5-1)

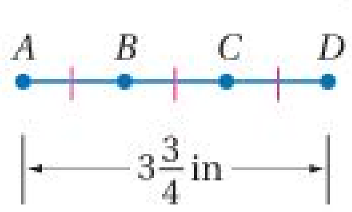
استعد للدرس اللاحق

أوجد طول كل قطعة مستقيمة مما يأتي مستعينًا بالشكل.

42) $\overline{ST}$

43) $\overline{WX}$

44) $\overline{BC}$



1-7 إثبات علاقات بين القطع المستقيمة
Proving Segments Relationships

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

فيما سبق:
درستُ كتابة البرهان الجبري والبرهان ذي العمودين.
(الدرس 6-1)

والآن:
- أكتب براهين تتضمن جمع أطوال القطع المستقيمة.
- أكتب براهين تتضمن تطابق قطع مستقيمة.

لماذا؟

يعمل عبدالله في محل لبيع الأقمشة، ويقيس القماش بوضع حافته عند حافة تدريج المسطرة التي طولها متر واحد. ولكي يقيس أطوالًا مثل 125 cm، يقيس مترًا من القماش ويضع علامة عليه، ثم يقيس من تلك العلامة 25 cm أخرى.
فيصبح الطول: $100\,cm + 25\,cm = 125\,cm$

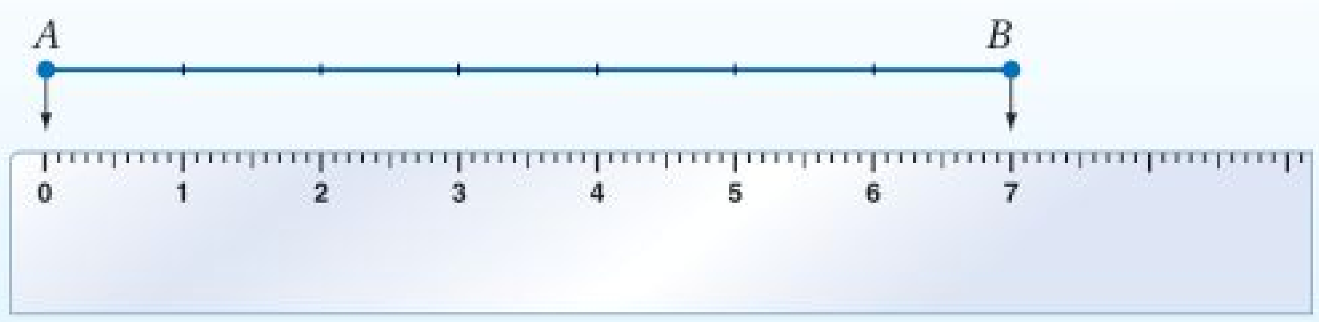
مسلّمة أطوال القطع المستقيمة: علمت كيف تقيس القطع المستقيمة باستعمال المسطرة، وذلك بوضع صفر المسطرة على أحد طرفَي القطعة المستقيمة وقراءة التدريج المقابل للطرف الآخر من القطعة المستقيمة، فيمثل هذا التدريج طول القطعة المستقيمة. وهذا يوضح مسلمة المسطرة.

مسلمة 1.8 — مسلّمة أطوال القطع المستقيمة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: النقاط التي تقع على مستقيم أو قطعة مستقيمة يمكن ربطها بأعداد حقيقية.

مثال: إذا أعطيت نقطتين A و B على مستقيم، وكانت A تقابل الصفر، فإن B تقابل عددًا موجبًا.



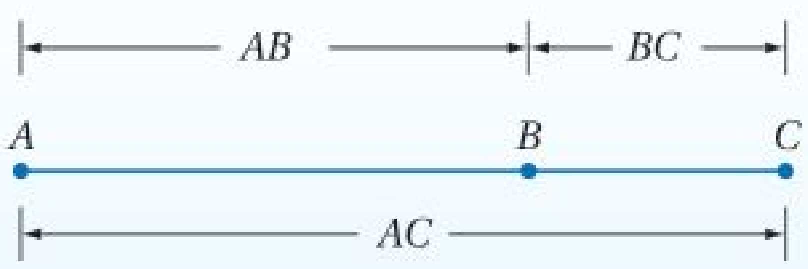
يمكن التعبير عن معنى وقوع نقطة بين نقطتين أخريين بمسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة.

مسلمة 1.9 — مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة

أضف إلى مطويتك

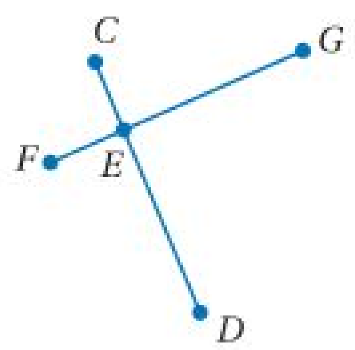
التعبير اللفظي: إذا علمت أن النقاط A, B, C على استقامة واحدة، فإن النقطة B تقع بين A و C إذا كان $AB + BC = AC$ والعكس.

النموذج:



ومسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة تستعمل تبريرًا في العديد من البراهين الهندسية.

مثال 1 استعمال مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة



أثبت أنه إذا كان $\overline{CE} \cong \overline{FE}$, $\overline{ED} \cong \overline{EG}$ ، فإن $\overline{CD} \cong \overline{FG}$.

المعطيات: $\overline{CE} \cong \overline{FE}$, $\overline{ED} \cong \overline{EG}$

المطلوب: $\overline{CD} \cong \overline{FG}$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{CE} \cong \overline{FE}$, $\overline{ED} \cong \overline{EG}$	**1)** معطيات
2) $CE = FE$, $ED = EG$	**2)** تعريف تطابق القطع المستقيمة
3) $CE + ED = CD$	**3)** مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة
4) $FE + EG = CD$	**4)** بالتعويض من الخطوة 2 في الخطوة 3
5) $FE + EG = FG$	**5)** مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة
6) $CD = FG$	**6)** بالتعويض من الخطوة 4 في الخطوة 5
7) $\overline{CD} \cong \overline{FG}$	**7)** تعريف تطابق القطع المستقيمة

قراءة الرياضيات

اختصارات: رغبة في الاختصار عند كتابة البراهين نكتب: "بالتعويض" بدلًا من "خاصية التعويض للمساواة" ونكتب "بالطرح" بدلًا من "خاصية الطرح للمساواة" وهكذا.

تحقق من فهمك

1) أكمل البرهان الآتي:

المعطيات: $\overline{JL} \cong \overline{KM}$

المطلوب: $\overline{JK} \cong \overline{LM}$

البرهان:

العبارات	المبررات
a) $\overline{JL} \cong \overline{KM}$	**a)** معطيات
b) $JL = KM$	**b)** ؟
c) $JK + KL =$ ؟ , $KL + LM =$ ؟	**c)** مسلمة جمع أطوال القطع المستقيمة
d) $JK + KL = KL + LM$	**d)** ؟
e) $JK + KL - KL = KL + LM - KL$	**e)** بالطرح
f) ؟	**f)** بالتبسيط
g) $\overline{JK} \cong \overline{LM}$	**g)** تعريف تطابق القطع المستقيمة

تطابق القطع المستقيمة: درستَ سابقًا أن تساوي أطوال القطع المستقيمة تحقق خاصية الانعكاس والتماثل والتعدي. وبما أن القطع المستقيمة المتساوية الطول متطابقة، فإن تطابق القطع المستقيمة يحقق أيضًا خصائص الانعكاس والتماثل والتعدي.

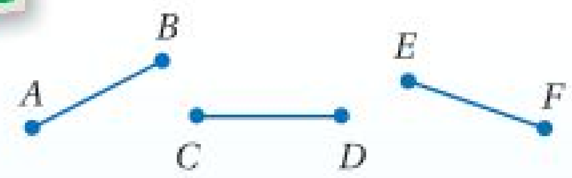
نظرية 1.2 خصائص تطابق القطع المستقيمة

أضف إلى مطويتك

خاصية الانعكاس للتطابق	$\overline{AB} \cong \overline{AB}$
خاصية التماثل للتطابق	إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ، فإن $\overline{CD} \cong \overline{AB}$
خاصية التعدي للتطابق	إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{CD} \cong \overline{EF}$ ، فإن $\overline{AB} \cong \overline{EF}$

سوف تبرهن خاصيتي الانعكاس والتماثل في السؤالين 5 و 6

برهان خاصية التعدي للتطابق



المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{CD} \cong \overline{EF}$

المطلوب: $\overline{AB} \cong \overline{EF}$

برهان حر:

بما أن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{CD} \cong \overline{EF}$ ، فإن $AB = CD, CD = EF$ ، وذلك من تعريف تطابق القطع المستقيمة. وباستعمال خاصية التعدي للمساواة ينتج أن $AB = EF$ ؛ لذا $\overline{AB} \cong \overline{EF}$ من تعريف التطابق.

الربط مع الحياة

تقام مسابقات الماراثون في العديد من محافظات المملكة، ويخصص ريع بعضها لدعم أنشطة خيرية.

مثال 2 من واقع الحياة البرهان باستعمال تطابق القطع المستقيمة

ماراثون: تبين الخريطة أدناه المسار الذي سيسلكه المشاركون في سباق ماراثون. تقع المحطتان X و Z عند نقطتَي المنتصف بين نقطة البداية والمحطة Y ونقطة النهاية والمحطة Y على التوالي. إذا كان بُعدا المحطة Y عن النقطتين X و Z متساويين، فأثبت أن الطريق من المحطة Z إلى نقطة النهاية يتطابق مع الطريق من المحطة X إلى نقطة البداية.

المعطيات: X نقطة منتصف $\overline{SY}$ ، و Z نقطة منتصف $\overline{YF}$ ، $XY = YZ$

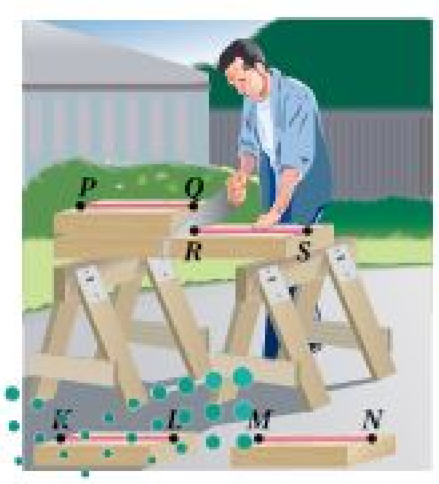
المطلوب: $\overline{ZF} \cong \overline{SX}$

البرهان:

العبارات	المبررات
(1 X نقطة منتصف $\overline{SY}$ ، و Z نقطة منتصف $\overline{YF}$ ، $XY = YZ$	(1 معطيات
(2 $\overline{SX} \cong \overline{XY}$, $\overline{YZ} \cong \overline{ZF}$	(2 نظرية نقطة المنتصف
(3 $\overline{XY} \cong \overline{YZ}$	(3 تعريف تطابق القطع المستقيمة
(4 $\overline{SX} \cong \overline{YZ}$	(4 خاصية التعدي للتطابق
(5 $\overline{SX} \cong \overline{ZF}$	(5 خاصية التعدي للتطابق
(6 $\overline{ZF} \cong \overline{SX}$	(6 خاصية التماثل للتطابق

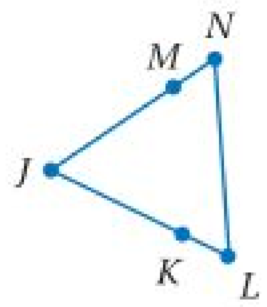
تحقق من فهمك

(2 **نجارة:** قص نجار قطعة خشبية $\overline{RS}$ طولها 22 in . ثم استعملها نموذجًا ليقص قطعة أخرى $\overline{PQ}$ مطابقة لها. وهكذا استعمل $\overline{PQ}$ ليقص قطعة ثالثة $\overline{MN}$. ثم استعمل القطعة الثالثة $\overline{MN}$ ليقص قطعة رابعة $\overline{KL}$. أثبت أن $RS = KL$.



تأكـد

المثال 1 1) أكمل البرهان الآتي:



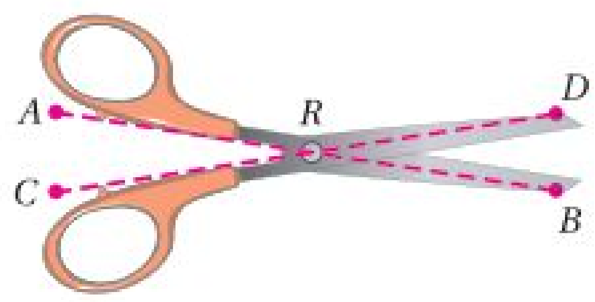
المعطيات: $\overline{LK} \cong \overline{NM}$, $\overline{KJ} \cong \overline{MJ}$

المطلوب: $\overline{LJ} \cong \overline{NJ}$

البرهان:

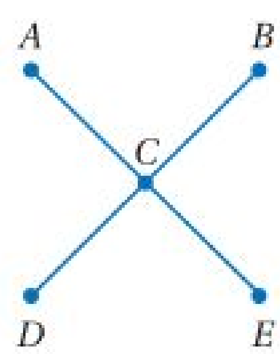
العبارات	المبررات
a) $\overline{LK} \cong \overline{NM}, \overline{KJ} \cong \overline{MJ}$	a) ؟
b) ؟	b) تعريف تطابق القطع المستقيمة
c) $LK + KJ = NM + KJ$	c) ؟
d) $LK + KJ = NM + MJ$	d)
e) ؟	e) مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة
f) $LJ = NJ$	f) ؟
g) $\overline{LJ} \cong \overline{NJ}$	g) ؟

المثال 2 2) **مقص:** في الشكل المجاور، $\overline{AR} \cong \overline{CR}$, $\overline{DR} \cong \overline{BR}$، أثبت أن: $AR + DR = CR + BR$.



تدرب وحل المسائل

المثال 1 3) أكمل البرهان الآتي:



المعطيات: C نقطة منتصف $\overline{AE}$.

C نقطة منتصف $\overline{BD}$.

$\overline{AE} \cong \overline{BD}$

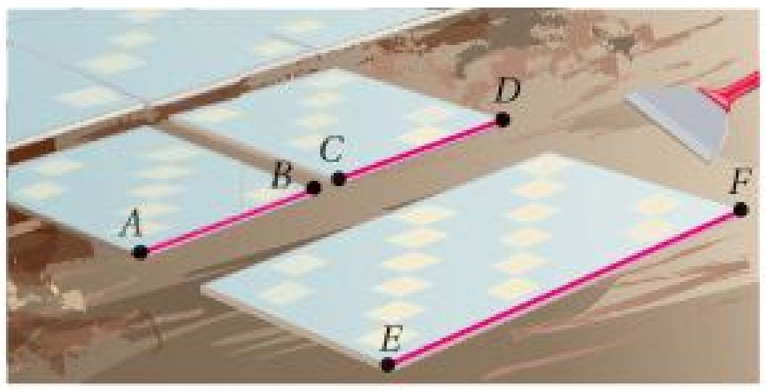
المطلوب: $\overline{AC} \cong \overline{CD}$

البرهان:

العبارات	المبررات
a) ؟	a) معطيات
b) $AC = CE, BC = CD$	b) ؟
c) $AE = BD$	c) ؟
d) ؟	d) مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة
e) $AC + CE = BC + CD$	e) ؟
f) $AC + AC = CD + CD$	f) ؟
g) ؟	g) بالتبسيط
h) ؟	h) بالقسمة
i) $\overline{AC} \cong \overline{CD}$	i) ؟

المثال 2

4) **تبليط:** قص مبلّط قطعة بلاط بطول معين، ثم استعملها نموذجًا ليقص بلاطة ثانية تطابق الأولى، ثم استعمل هاتين البلاطتين لقص بلاطة ثالثة طولها يساوي مجموع طولَي البلاطتين. أثبت أن طول البلاطة الثالثة يساوي مثلَي طول البلاطة الأولى.



الربط مع الحياة

المبلِّط: هو الشخص الذي يقوم بتركيب بلاط الأرضيات أو الجدران. ويستعمل في أثناء عمله أدوات قياس الطول والميل؛ من أجل وضع البلاط بشكل دقيق وترتيبه بأنماط جميلة. وعادة يلتحق المبلِّط بمركز تدريب مهني ليتلقى تدريبًا خاصًا.

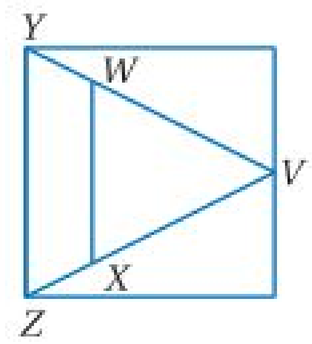
أثبت الخاصيتين الآتيتين في النظرية (1.2).

5) خاصية التماثل للتطابق.

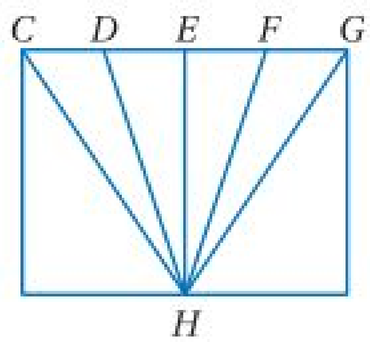
6) خاصية الانعكاس للتطابق.

برهان: أثبت كلًّا مما يأتي:

7) إذا كان $\overline{VZ} \cong \overline{VY}$, $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$ ، فإن $\overline{VW} \cong \overline{VX}$.



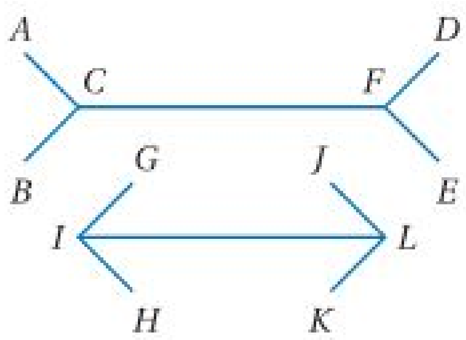
8) إذا كانت E نقطة منتصف $\overline{DF}$ ، $\overline{CD} \cong \overline{FG}$ ، فإن $\overline{CE} \cong \overline{EG}$.



9) إذا كان $\overline{AC} \cong \overline{GI}$ ، $\overline{FE} \cong \overline{LK}$ ، $AC + CF + FE = GI + IL + LK$.

a) فأثبت أن $\overline{CF} \cong \overline{IL}$.

b) برِّر برهانك بقياس أطوال القطع المستقيمة. فسِّر إجابتك.



10) **تمثيلات متعددة:** A نقطة منتصف $\overline{PQ}$ ، و B نقطة منتصف $\overline{PA}$ ، و C نقطة منتصف $\overline{PB}$.

a) **هندسيًا:** ارسم شكلًا يوضح هذه المعطيات.

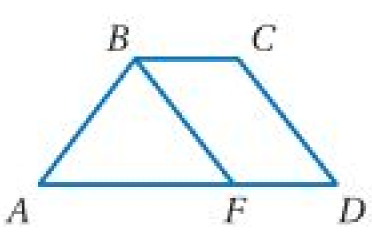
b) **جبريًا:** ضع تخمينًا للعلاقة الجبرية بين PC و PQ.

c) **حسيًا:** استعمل مسطرة لرسم قطعة مستقيمة تطابق $\overline{PQ}$ ، ولتعيين النقطتين B و C على $\overline{PQ}$ ، استعمل هذا الرسم لتؤيد التخمين الذي وضعته.

d) **منطقيًا:** أثبت صحة تخمينك.

مسائل مهارات التفكير العليا

11) **اكتشف الخطأ:** في الشكل المجاور: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{CD} \cong \overline{BF}$ ، اختبر النتائج التي حصل عليها أحمد وسعد، وهل وصل أيٌّ منهما إلى نتيجة صحيحة؟



أحمد	سعد
بما أن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{CD} \cong \overline{BF}$ ، إذن $\overline{AB} \cong \overline{AF}$ وذلك بتطبيق خاصية التعدي للتطابق.	بما أن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{CD} \cong \overline{BF}$ ، إذن $\overline{AB} \cong \overline{BF}$ وذلك بتطبيق خاصية الانعكاس للتطابق.

12) **تحدٍ:** $ABCD$ مربع. أثبت أن $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

13) **اكتب:** هل توجد خاصية في التطابق تشبه خاصية الجمع في المساواة؟ فسّر إجابتك.

14) **تبرير:** صنِّف العبارة الآتية إلى صحيحة أو خاطئة، وإذا كانت خاطئة فأعط مثالًا مضادًّا .

إذا كانت النقاط A, B, C, D, E تقع على استقامة واحدة، بحيث تقع B بين A و C ، وتقع C بين B و D ، وتقع D بين C و E ، وكان $AC = BD = CE$ ، فإن $AB = BC = DE$.

15) **مسألة مفتوحة:** ارسم شكلًا يمثل تعميمًا لمسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة، (جمع 3 قطع مستقيمة) واكتب النتيجة.

تدريب على اختبار

16) النقاط A, B, C, D تقع على استقامة واحدة، بحيث تقع النقطة B بين A و C والنقطة C بين B و D. أي عبارة مما يلي ليست بالضرورة صحيحة؟

A $AB + BD = AD$

B $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

C $\overline{BC} \cong \overline{BC}$

D $BC + CD = BD$

17) **أي العبارات الآتية يعطي وصفًا أفضل للمسلمة؟**

A تخمين ينشأ عن أمثلة.

B تخمين ينشأ عن حقائق وقواعد وتعريفات وخصائص.

C عبارة تقبل على أنها صحيحة.

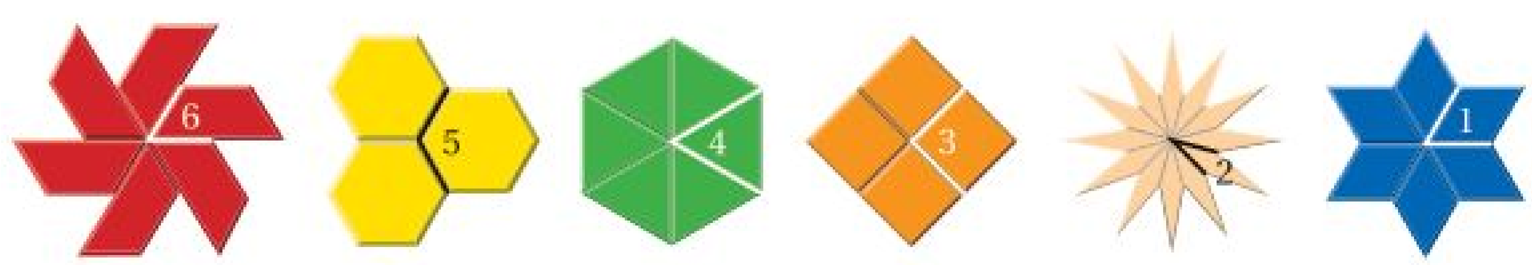
D عبارة تم إثبات صحتها.

مراجعة تراكمية

18) **برهان:** أثبت أنه إذا كان $-3(2x+1) = 57$، فإن $x = -10$ ، واكتب تبريرًا لكل خطوة. (الدرس 1-6)

19) **نماذج:** استعمل حاتم ستة مربعات من الورق المقوى لعمل منشور رباعي. ما الجزء من الفراغ الذي يمثله كل وجه من المنشور، وكم مستقيمًا ينتج عن تقاطعها؟ (الدرس 1-5)

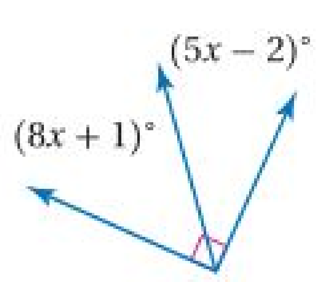
20) **أنماط:** يمكن ترتيب مجموعة من قطع النماذج لتكوين نمط دوراني دون ترك فراغات بين هذه القطع، وكما تعلم أن قياس الدورة الكاملة يساوي $360°$، أوجد قياس الزوايا المرقمة في كلٍّ من الأشكال الآتية بالدرجات. (الدرس 1-1)



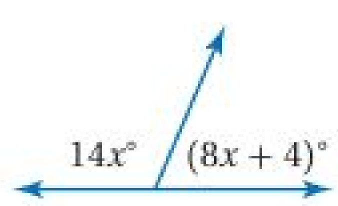
استعد للدرس اللاحق

جبر: أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي:

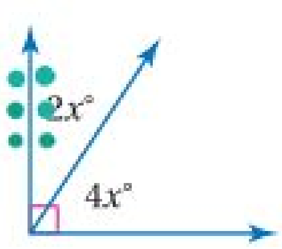
21)



22)



23)

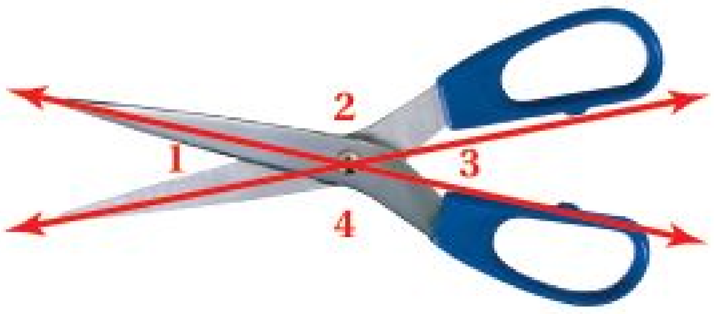


رابط الدرس

www.ien.edu.sa

8-1 إثبات علاقات بين الزوايا
Proving Angles Relationships

لماذا؟



تلاحظ أن $\angle 1$ بين شفرتَي المقص، و $\angle 2$ بين الشفرة ومقبض المقص تشكلان زوجًا من الزوايا المتجاورة على مستقيم.
وبالمثل فإن $\angle 2$ و $\angle 3$ بين مقبضَي المقص تشكلان أيضا زوجًا من الزوايا المتجاورة على مستقيم.

فيما سبق:
درستُ تعيين أزواج خاصة من الزوايا واستعملتها.
(مهارة سابقة)

والآن:
- أكتب براهين تتضمن زوايا متتامة وزوايا متكاملة.
- أكتب براهين تتضمن زوايا متطابقة وزوايا قائمة.

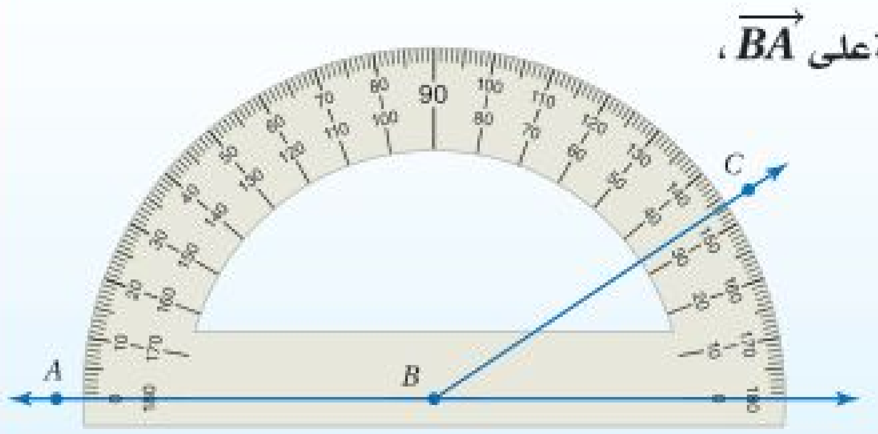
الزوايا المتتامة والمتكاملة: توضّح مسلّمة المنقلة العلاقة بين قياس الزوايا والأعداد الحقيقية.

مسلمة 1.10 مسلّمة المنقلة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تستعمل المنقلة للربط بين قياس زاوية وعدد حقيقي يقع بين $0°$ و $180°$.

مثال: في $\angle ABC$، إذا انطبق صفر المنقلة على $\overrightarrow{BA}$، فإن العدد الذي ينطبق على $\overrightarrow{BC}$ يمثل قياس $\angle ABC$.

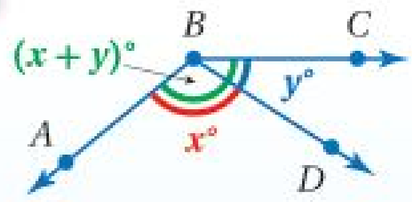


درست سابقًا مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة، وتوجد علاقة مشابهة لها بين قياسات الزوايا.

مسلمة 1.11 مسلّمة جمع قياسات الزوايا

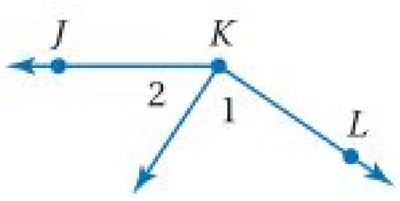
أضف إلى مطويتك

تقع النقطة D داخل $\angle ABC$ إذا وفقط إذا كان
$m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle ABC$



مثال 1 استعمال مسلّمة جمع قياسات الزوايا

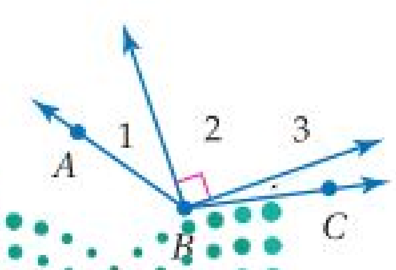
إذا كان $m\angle JKL = 145°$, $m\angle 2 = 56°$ فأوجد $m\angle 1$. برّر خطوات حلّك.



$m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle JKL$	مسلّمة جمع قياسات الزوايا
$m\angle 1 + 56° = 145°$	عوّض $m\angle 2 = 56°$, $m\angle JKL = 145°$
$m\angle 1 + 56° - 56° = 145° - 56°$	اطرح 56 من الطرفين
$m\angle 1 = 89°$	بسّط

تحقق من فهمك

1) إذا كان $m\angle ABC = 131°$, $m\angle 1 = 23°$، فأوجد $m\angle 3$. برِّر خطوات حلّك.



وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

يمكن استعمال مسلّمة جمع قياسات الزوايا مع علاقات أخرى على الزوايا؛ لإثبات نظريات تتعلق بالزوايا.

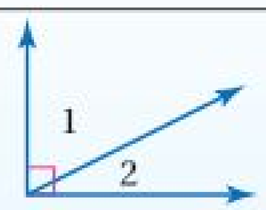
نظريتان

أضف إلى مطويتك

1.3 نظرية الزاويتين المتكاملتين: إذا كانت الزاويتان متجاورتين على مستقيم، فإنهما متكاملتان.

مثال: $\angle 1, \angle 2$ متجاورتان على مستقيم، إذن $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$

1.4 نظرية الزاويتين المتتامتين: إذا شكّل الضلعان غير المشتركين لزاويتين متجاورتين زاوية قائمة، فإن الزاويتين تكونان متتامتين.



مثال: ضلعا الزاويتين المتجاورتين $\angle 1, \angle 2$ غير المشتركين يشكلان زاويةً قائمةً، إذن $m\angle 1 + m\angle 2 = 90°$

سوف تبرهن النظريتين 1.3 و 1.4 في السؤالين 14 و 15

مراجعة المفردات

الزاويتان المتكاملتان هما زاويتان مجموع قياسيهما يساوي $180°$

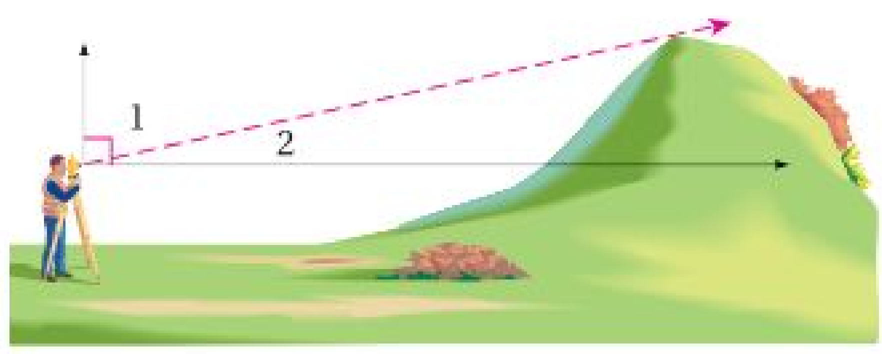
الزاويتان المتتامتان هما زاويتان مجموع قياسيهما يساوي $90°$

الزاويتان المتجاورتان على مستقيم هما زاويتان متجاورتان، بحيث يكون ضلعاهما غير المشتركين نصفَي مستقيمٍ متعاكسين.

مثال 2 من واقع الحياة — استعمال خصائص الزوايا المتكاملة أو المتتامة

مَسْح الأراضي: قام مسّاح بقياس الزاوية بين خط نظره إلى قمة تلة، والمستقيم الرأسي فكانت $73°$ تقريبًا. ما قياس الزاوية بين خط نظره والخط الأفقي؟ برّر خطوات الحل.

افهم: ارسم شكلًا يوضح المسألة. قاس المسّاح الزاوية بين خط نظره والخط الرأسي؛ لذا ارسم نصف المستقيم الرأسي والأفقي من النقطة التي يشاهد منها المسّاح التلة، ثم سمّ الزوايا الناتجة. وكما تعلم فإن نصفَي المستقيمين (الأفقي والرأسي) يكوّنان زاويةً قائمةً.



خطط: استعمل نظرية الزاويتين المتتامتين.

حُل: بما أن $\angle 1$ و $\angle 2$ تكوّنان زاوية قائمة فإنهما متتامتان.

$m\angle 1 + m\angle 2 = 90°$ — نظرية الزاويتين المتتامتين

$73° + m\angle 2 = 90°$ — $m\angle 1 = 73°$

$73° + m\angle 2 - 73° = 90° - 73°$ — اطرح 73 من الطرفين

$m\angle 2 = 17°$ — بسّط

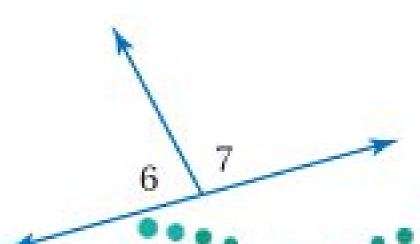
قياس الزاوية بين خط نظر المساح وخط الأفق $17°$

تحقق: تعلم أنه يجب أن يكون ناتج جمع قياسَي $\angle 1$ و $\angle 2$ يساوي $90°$

$17° + 73° = 90°$ ✓

تحقق من فهمك

2) في الشكل المجاور، $\angle 6$ و $\angle 7$ متجاورتان على مستقيم. إذا كان:
$m\angle 6 = (3x + 32)°$ و $m\angle 7 = (5x + 12)°$،
فأوجد قيمة x ، $m\angle 6$ ، $m\angle 7$. برّر خطوات الحل.

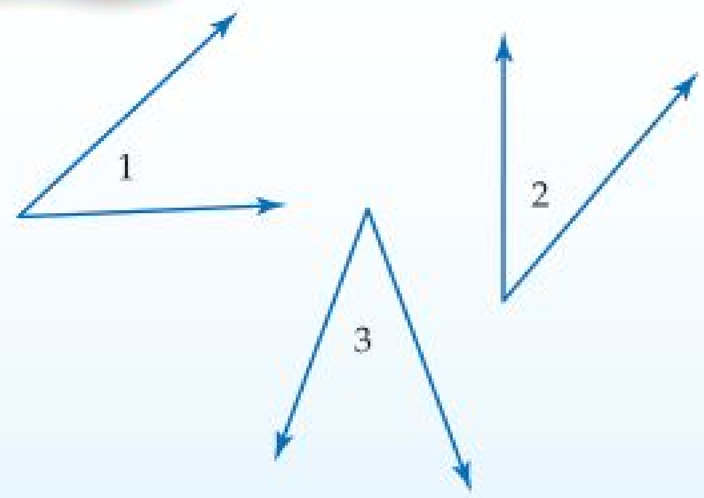


تطابق الزوايا: إن الخصائص الجبرية التي تنطبق على تطابق القطع المستقيمة وتساوي قياساتها، تنطبق أيضًا على تطابق الزوايا وتساوي قياساتها.

نظرية 1.5

أضف إلى مطويتك

خصائص تطابق الزوايا



خاصية الانعكاس للتطابق

$\angle 1 \cong \angle 1$

خاصية التماثل للتطابق

إذا كانت $\angle 2 \cong \angle 1$، فإن $\angle 1 \cong \angle 2$.

خاصية التعدي للتطابق

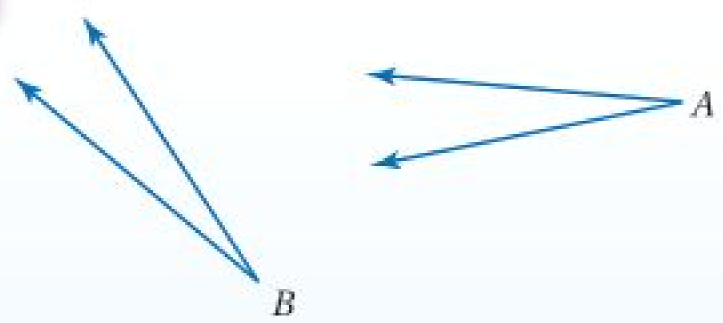
إذا كانت $\angle 2 \cong \angle 1$ ، وكانت $\angle 3 \cong \angle 2$، فإن $\angle 3 \cong \angle 1$.

ستُبرهن خاصيتَي الانعكاس والتعدي للتطابق في السؤالين 16 و 17

برهان

أضف إلى مطويتك

خاصية التماثل للتطابق



المعطيات: $\angle A \cong \angle B$

المطلوب: $\angle B \cong \angle A$

برهان حر:

تعلم من المعطيات أن $\angle A \cong \angle B$. ومن تعريف تطابق الزوايا يكون $m\angle A = m\angle B$، وباستعمال خاصية التماثل للمساواة يكون $m\angle B = m\angle A$، وعليه فإن $\angle B \cong \angle A$ من تعريف تطابق الزوايا.

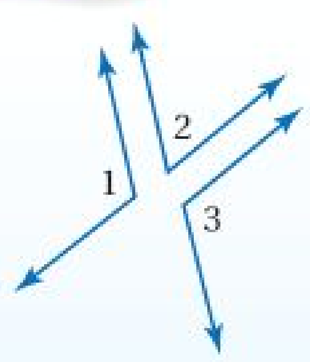
يمكنك تطبيق الخصائص الجبرية لإثبات نظريات على تطابق الزوايا تتضمن زوايا متتامة وزوايا متكاملة.

نظريتان

أضف إلى مطويتك

1.6 نظرية تطابق المكمِّلات:

الزاويتان المكملتان للزاوية نفسها أو لزاويتين متطابقتين تكونان متطابقتين.

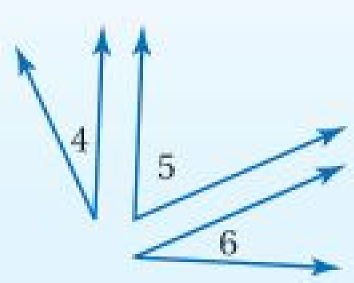


مثال: إذا كان $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$،

وكان $m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$ ، فإن $\angle 1 \cong \angle 3$

1.7 نظرية تطابق المتممات:

الزاويتان المتممتان للزاوية نفسها أو لزاويتين متطابقتين تكونان متطابقتين.



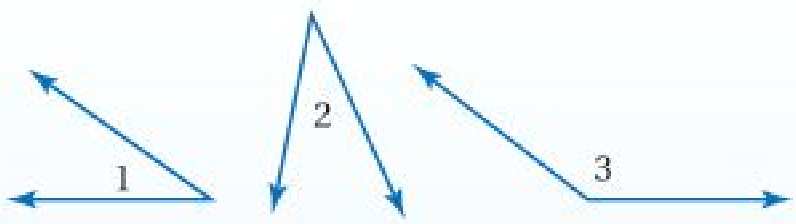
مثال: إذا كان $m\angle 4 + m\angle 5 = 90°$

و $m\angle 5 + m\angle 6 = 90°$ ، فإن $\angle 4 \cong \angle 6$.

ستُبرهن حالة من النظرية 1.7 في السؤال 4

برهان — إحدى حالات نظرية تطابق المكملات

أضف إلى مطويتك



المعطيات: $\angle 1$ و $\angle 3$ متكاملتان.
$\angle 2$ و $\angle 3$ متكاملتان.

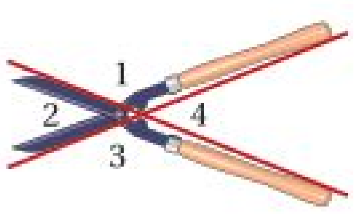
المطلوب: $\angle 1 \cong \angle 2$

البرهان:

العبارات	المبررات
(1 $\angle 1$ و $\angle 3$ متكاملتان. $\angle 2$ و $\angle 3$ متكاملتان.	**(1** معطيات
(2 $m\angle 1 + m\angle 3 = 180°, m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$	**(2** تعريف الزاويتين المتكاملتين
(3 $m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 2 + m\angle 3$	**(3** بالتعويض
(4 $m\angle 1 = m\angle 2$	**(4** خاصية الطرح للمساواة
(5 $\angle 1 \cong \angle 2$	**(5** تعريف تطابق الزوايا

مثال 3 — براهين تستعمل فيها نظريتا تطابق المكملات أو المتممات

أثبت أن الزاويتين المتقابلتين بالرأس 2 و 4 في الشكل المجاور متطابقتان.



المعطيات: $\angle 2$ و $\angle 4$ متقابلتان بالرأس.

المطلوب: $\angle 2 \cong \angle 4$

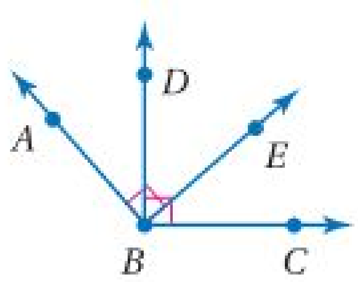
البرهان:

العبارات	المبررات
(1 $\angle 2$ و $\angle 4$ متقابلتان بالرأس.	**(1** معطيات
(2 $\angle 2$ و $\angle 3$ متجاورتان على مستقيم. $\angle 3$ و $\angle 4$ متجاورتان على مستقيم.	**(2** تعريف الزاويتين المتجاورتين على مستقيم
(3 $\angle 2$ و $\angle 3$ متكاملتان. $\angle 3$ و $\angle 4$ متكاملتان.	**(3** نظرية الزاويتين المتكاملتين
(4 $\angle 2 \cong \angle 4$	**(4** نظرية تطابق المكملات

مراجعة المفردات

الزاويتان المتقابلتان بالرأس
هما زاويتان غير متجاورتين تتكونان من تقاطع مستقيمين.

تحقق من فهمك



(3 في الشكل المجاور $\angle ABE$ و $\angle DBC$ قائمتان.
أثبت أن $\angle ABD \cong \angle EBC$.

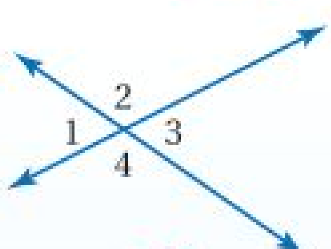
في المثال 3، لاحظ أن $\angle 2$ و $\angle 4$ متقابلتان بالرأس. ونتيجة هذا **المثال** تُثبت نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس الآتية:

نظرية 1.8 — نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس

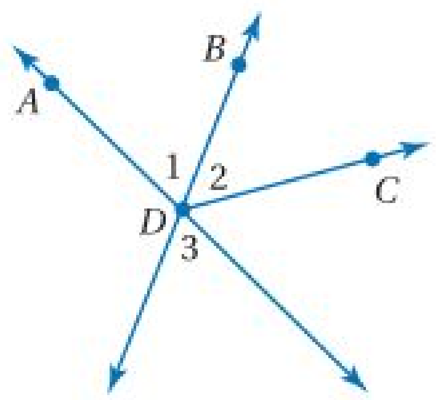
أضف إلى مطويتك

الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان.

مثال: $\angle 1 \cong \angle 3$
$\angle 2 \cong \angle 4$



مثال 4 استعمال الزوايا المتقابلة بالرأس



أثبت أنه إذا كان $\overrightarrow{DB}$ ينصف $\angle ADC$ ، فإن $\angle 3 \cong \angle 2$

المعطيات: $\overrightarrow{DB}$ ينصف $\angle ADC$

المطلوب: $\angle 2 \cong \angle 3$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overrightarrow{DB}$ ينصف $\angle ADC$.	1) معطيات
2) $\angle 1 \cong \angle 2$	2) تعريف منصف الزاوية
3) $\angle 1$ و $\angle 3$ زاويتان متقابلتان بالرأس.	3) تعريف الزاويتين المتقابلتين بالرأس
4) $\angle 3 \cong \angle 1$	4) نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس
5) $\angle 3 \cong \angle 2$	5) خاصية التعدي للتطابق
6) $\angle 2 \cong \angle 3$	6) خاصية التماثل للتطابق

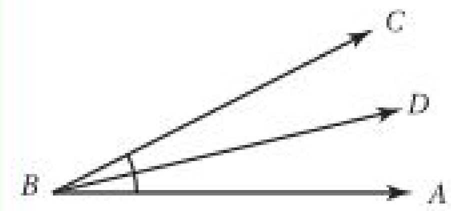
تحقق من فهمك

4) إذا كانت $\angle 3$ و $\angle 4$ متقابلتين بالرأس، وكان $m\angle 3 = (6x + 2)°$ و $m\angle 4 = (8x - 14)°$، فأوجد $m\angle 3$ و $m\angle 4$. برِّر خطوات حلّك.

إرشادات للدراسة

منصف الزاوية

هو نصف مستقيم يقع داخل الزاوية ويقسم الزاوية قسمين متطابقين، وتكون بدايته عند رأس الزاوية.

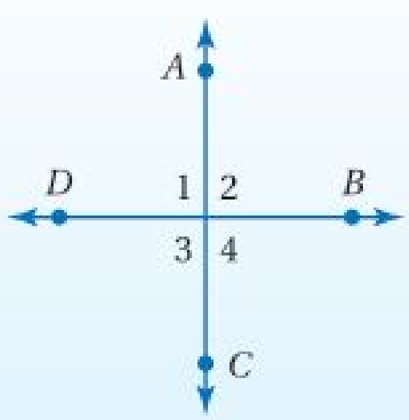
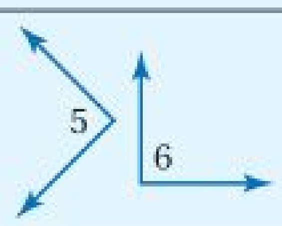


$\overrightarrow{BD}$ منصف لـ $\angle ABC$

يمكن استعمال النظريات الواردة في هذا الدرس لإثبات نظريات الزاوية القائمة الآتية:

نظريات — نظريات الزاوية القائمة

أضف إلى مطويتك

النظرية	مثال
1.9 يتقاطع المستقيمان المتعامدان ويكونان أربع زوايا قائمة. مثال: إذا كان $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{DB}$، فإن $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ جميعها قائمة	
1.10 جميع الزوايا القائمة متطابقة. مثال: إذا كانت $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$، جميعها قائمة، فإن $\angle 1 \cong \angle 2 \cong \angle 3 \cong \angle 4$.	
1.11 المستقيمان المتعامدان يكونان زوايا متجاورة متطابقة. مثال: إذا كان $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{DB}$ ، فإن $\angle 1 \cong \angle 2, \angle 2 \cong \angle 4,$ $\angle 4 \cong \angle 3, \angle 3 \cong \angle 1$	
1.12 إذا كانت الزاويتان متكاملتين ومتطابقتين، فإنهما قائمتان. مثال: إذا كانت $\angle 6 \cong \angle 5$ ، وكانت $\angle 5$ و $\angle 6$ متكاملتين، فإن $\angle 5$ و $\angle 6$ قائمتان.	
1.13 إذا تجاورت زاويتان على مستقيم، وكانتا متطابقتين، فإنهما قائمتان. مثال: إذا كانت $\angle 7$ و $\angle 8$ متجاورتين على مستقيم، وكانت $\angle 8 \cong \angle 7$ فإن $\angle 7$ و $\angle 8$ قائمتان.	

ستُبرهن هذه النظريات في الأسئلة 24–20

قراءة الرياضيات

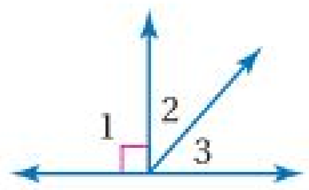
رمز التعامد

تذكر أن الرمز $\perp$ يقرأ يعامد.

تأكـــد

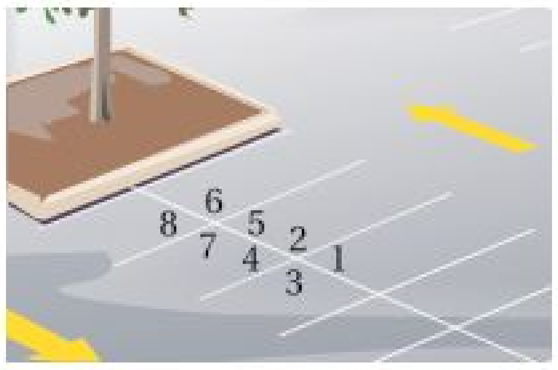
المثال 1 أوجد قياس الزوايا المرقّمة في كلٍّ مما يأتي، واذكر النظريات التي تبرر حلك.

(1 $m\angle 2 = x°, m\angle 3 = (x-16)°$

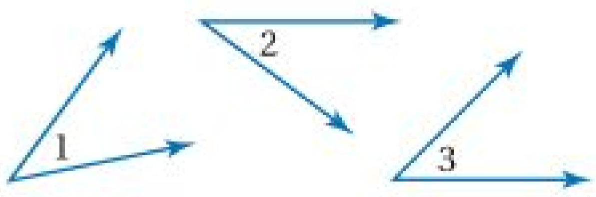


(2 $m\angle 4 = (3(x-1))°, m\angle 5 = (x+7)°$

المثال 2 **(3** **موقف:** استعمل مخطط موقف السيارات المجاور.
إذا علمت أن $\angle 6 \cong \angle 2$ ، فأثبت أن $\angle 8 \cong \angle 4$



المثال 3 **(4** **برهان:** فيما يأتي أكمل برهان إحدى حالات نظرية تطابق المتممات.



المعطيات: $\angle 1$ و $\angle 3$ متتامتان.
$\angle 2$ و $\angle 3$ متتامتان.

المطلوب: $\angle 1 \cong \angle 2$

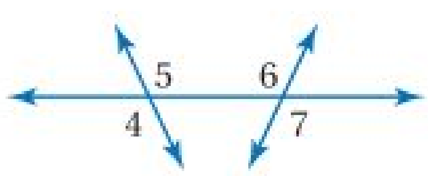
البرهان:

العبارات	المبررات
(a $\angle 1$ و $\angle 3$ متتامتان. $\angle 2$ و $\angle 3$ متتامتان.	**(a** ؟
(b $m\angle 1 + m\angle 3 = 90°$ $m\angle 2 + m\angle 3 = 90°$	**(b** ؟
(c $m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 2 + m\angle 3$	**(c** ؟
(d $m\angle 1 = m\angle 2$	**(d** ؟
(e $\angle 1 \cong \angle 2$	**(e** ؟

المثال 4 **(5** **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين فيما يأتي:

المعطيات: $\angle 4 \cong \angle 7$

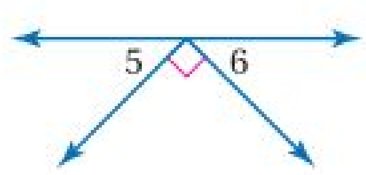
المطلوب: $\angle 5 \cong \angle 6$



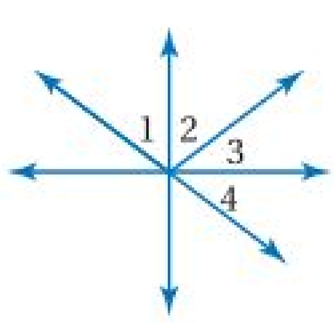
تدرب وحل المسائل

الأمثلة 3–1 أوجد قياس الزوايا المرقَّمة في كلٍّ مما يأتي، واذكر النظريات التي تبرر حلك.

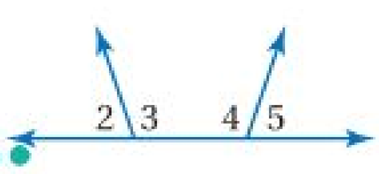
(6 $m\angle 5 = m\angle 6$



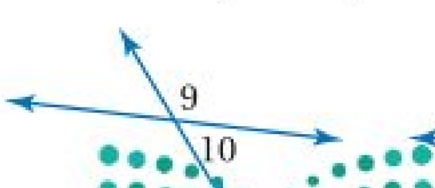
(7 $\angle 2$ و $\angle 3$ متتامتان، $\angle 1 \cong \angle 4$ ، $m\angle 2 = 28°$



(8 $\angle 2$ و $\angle 4$ متكاملتان، $\angle 4$ و $\angle 5$ متكاملتان، $m\angle 4 = 105°$



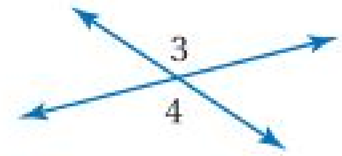
(9 $m\angle 9 = (3x+12)°$ ، $m\angle 10 = (x-24)°$



المثال 4 أوجد قياس الزوايا المرقمة في كلٍّ مما يأتي، واذكر النظريات التي تبرر حلك.

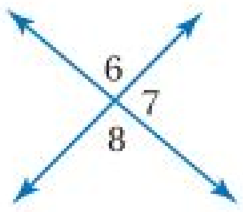
10) $m\angle 3 = (2x + 23)^\circ$

$m\angle 4 = (5x - 112)^\circ$



11) $m\angle 6 = (2x - 21)^\circ$

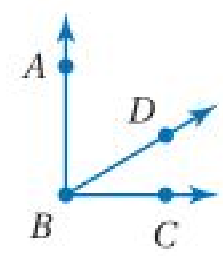
$m\angle 7 = (3x - 34)^\circ$



برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين في كلٍّ مما يأتي:

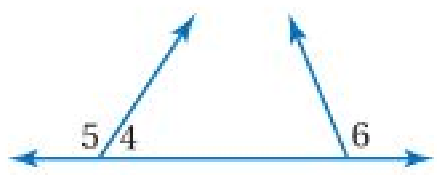
12) **المعطيات:** $\angle ABC$ زاوية قائمة.

المطلوب: $\angle ABD, \angle CBD$ متتامتان.



13) **المعطيات:** $\angle 5 \cong \angle 6$

المطلوب: $\angle 4, \angle 6$ متكاملتان.



اكتب برهانًا لكلٍّ من النظريات الآتية:

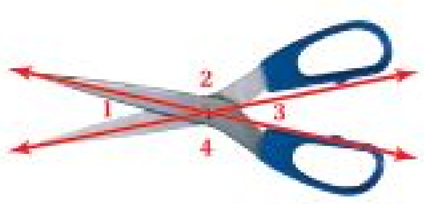
14) نظرية الزاويتين المتكاملتين.

15) نظرية الزاويتين المتتامتين.

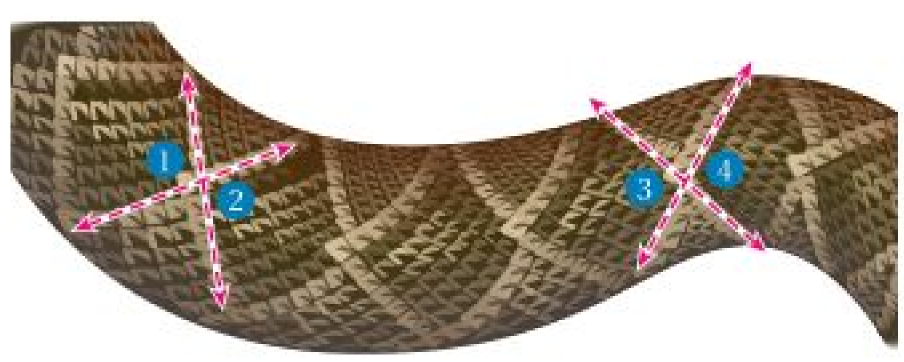
16) خاصية الانعكاس للتطابق.

17) خاصية التعدي للتطابق.

18) **برهان:** أثبت أن مجموع قياسات الزوايا الأربع الناتجة عند فتح المقص يساوي 360°



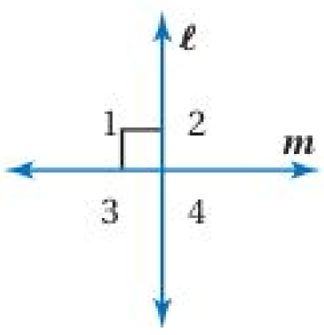
19) **طبيعة:** الأفعى المجلجلة أفعى سامّة، ويوجد على جلدها زركشة تأخذ أشكالًا نمطية. انظر إلى الشكل أدناه، والذي يمثِّل صورة مكبرة لجلد الأفعى المبيَّنة جهة اليمين. إذا كانت $\angle 4 \cong \angle 1$ ، فأثبت أن $\angle 3 \cong \angle 2$.



الربط مع الحياة

يصل طول أنياب الأفعى المجلجلة إلى 6 in ، ويمكنها طيُّ أنيابها داخل فمها لتكون موازية لسقف الفم عندما يكون مغلقًا.

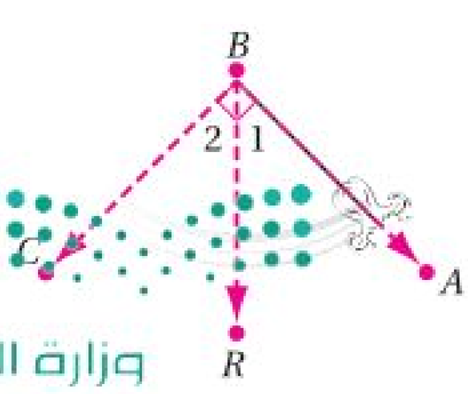
برهان: استعمل الشكل المجاور لكتابة برهان لكلٍّ من النظريات الآتية.



20) نظرية 1.9 **21)** نظرية 1.10 **22)** نظرية 1.11

23) نظرية 1.12 **24)** نظرية 1.13

25) **بندول:** يظهر في الشكل المجاور وضع بندول ساعة تقليدية. إذا علمت أن $\angle ABC$ قائمة. وأن $m\angle 1 = 45^\circ$ ، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن $\overrightarrow{BR}$ ينصف $\angle ABC$.



26) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة سوف تستكشف علاقات الزوايا.

a) **هندسيًا:** استعمل المنقلة لرسم زاوية قائمة ABC، وحدد نقطة داخلها، وسمّها D. ارسم $\overrightarrow{BD}$. ثم ارسم $\overrightarrow{KL}$، وارسم $\angle JKL$ التي تطابق $\angle ABD$.

b) **لفظيًا:** ضع تخمينًا حول العلاقة بين $\angle JKL$ و $\angle DBC$.

c) **منطقيًا:** أثبت صحة التخمين الذي وضعته.

مسائل مهارات التفكير العليا

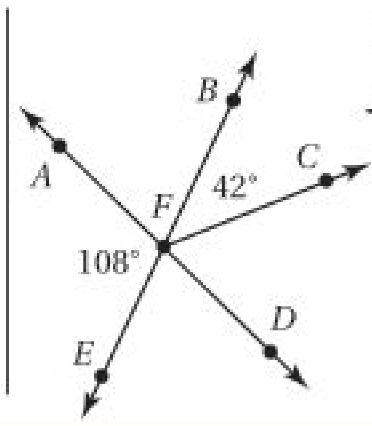
27) **تحدٍّ:** لقد تم إثبات حالة واحدة من نظرية تطابق المكملات، وفي السؤال 4 برهنت الحالة المشابهة من نظرية تطابق المتممات. فسّر لماذا توجد حالتان لكلٍّ من هاتين النظريتين، واكتب برهانًا للحالة الثانية لكلٍّ منهما.

28) **تبرير:** حدد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا أو صحيحة دائما أو غير صحيحة أبدًا. فسّر تبريرك.
إذا كانت إحدى الزوايا المتكونة من مستقيمين متقاطعين حادة، فإن الزوايا الثلاث الأخرى المتكونة من هذا التقاطع حادة أيضًا.

29) **اكتب:** فسّر كيف يمكن استعمال المنقلة لإيجاد قياس الزاوية المتممة لزاويةٍ أخرى بطريقةٍ سريعة.

تدريب على اختبار

30) في الشكل المجاور إذا كانت النقاط F,E, B تقع على استقامة واحدة، وكذلك النقاط A,F,D ، فأوجد قياس $\angle CFD$



A $66°$ **C** $108°$

B $72°$ **D** $138°$

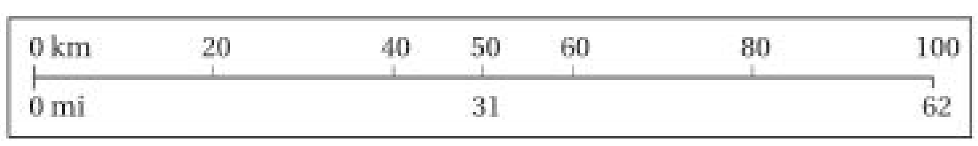
31) إذا كانت النسبة بين قياسَي زاويتين متتامتين هي 4:1 فما قياس الزاوية الصغرى؟

A $15°$ **C** $24°$

B $18°$ **D** $36°$

مراجعة تراكمية

32) **خرائط:** يُظهر الشكل المجاور مقياس رسم خريطة تدريجين أحدهما بالكيلومترات، والآخر بالأميال. إذا كانت $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ قطعتين مستقيمتين على الخريطة، حيث $AB = 100\,km$ ، و $CD = 62\,mi$. فهل $\overline{AB} \cong \overline{CD}$؟ فسّر إجابتك. **(الدرس 7-1)**



اذكر الخاصية التي تبرر كل عبارة مما يأتي: **(الدرس 6-1)**

33) إذا كان $y + 7 = 5$، فإن $y = -2$

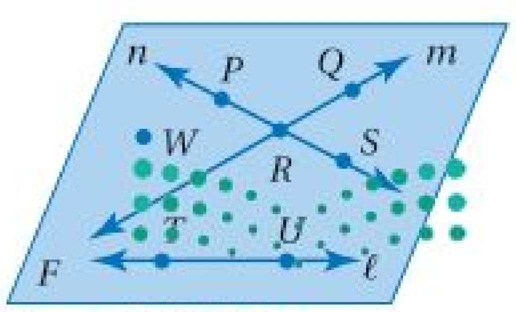
34) إذا كان $MN = PQ$، فإن $PQ = MN$

35) إذا كان $a - b = x$ و $b = 3$، فإن $a - 3 = x$

36) إذا كان $x(y + z) = 4$، فإن $xy + xz = 4$

استعد للدرس اللاحق

استعمل الشكل المجاور للإجابة عما يأتي:



37) سمّ مستقيمًا يحوي النقطة P.

38) سمّ تقاطع المستقيمين n و m.

39) سمّ نقطة لا تقع على أيٍّ من المستقيمات ℓ, m, n .

40) اذكر اسمًا آخر للمستقيم n.

41) هل يتقاطع المستقيم ℓ مع المستقيم m أو المستقيم n؟ فسر إجابتك.

الفصل

1 دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

التبرير الاستقرائي والمنطق (الدرسان 1-1 و 1-2)

- التبرير الاستقرائي: تبرير تُستعمل فيه أمثلة وأنماط محددة للوصول إلى نتيجة.
- المثال المضاد: هو المثال الذي يُثبت عدم صحة التخمين.
- نفي العبارة p: ليس p أو $\sim p$
- عبارة الوصل: عبارة مركبة تحوي (و)
- عبارة الفَصل: عبارة مركبة تحوي (أو)

العبارات الشرطية (الدرس 1-3)

- يمكن كتابة العبارة الشرطية على الصورة (إذا... فإن...) أو على الصورة إذا كان p، فإن q، حيث p الفرض، و q النتيجة.

العبارة الشرطية	$p \to q$
العكس	$q \to p$
المعكوس	$\sim p \to \sim q$
المعاكس الإيجابي	$\sim q \to \sim p$

التبرير الاستنتاجي (الدرس 1-4)

- قانون الفَصل المنطقي: إذا كانت العبارة الشرطية $p \to q$ صائبة، وكانت p صائبة أيضًا، فإن q صائبة.
- قانون القياس المنطقي: إذا كانت العبارة الشرطية $p \to q$ صائبة، وكانت $q \to r$ صائبة، فإن $p \to r$ صائبة أيضًا.

البرهان (الدروس من 1-5 إلى 1-8)

- الخطوة 1: اكتب المعطيات، وارسم شكلًا يوضحها إن أمكن.
- الخطوة 2: اكتب العبارة أو التخمين المطلوب إثباته.
- الخطوة 3: استعمل التبرير الاستنتاجي لتكوين سلسلة منطقية من العبارات التي تربط المعطيات بالمطلوب.
- الخطوة 4: برِّر كل عبارة مستعملًا تعريفات أو خصائص جبرية أو مسلمات أو نظريات.
- الخطوة 5: اكتب العبارة أو التخمين الذي قمت بإثباته.

المطويات منظم أفكار

تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدوَّنة في مطويتك.

المفردات الأساسية

- **التخمين** (ص. 14)
- **التبرير الاستقرائي** (ص. 14)
- **المثال المضاد** (ص. 17)
- **قيمة الصواب** (ص. 21)
- **العبارة المركبة** (ص. 21)
- **نفي العبارة** (ص. 21)
- **العبارة** (ص. 21)
- **عبارة الوصل** (ص. 21)
- **عبارة الفَصل** (ص. 22)
- **جدول الصواب** (ص. 23)
- **النتيجة** (ص. 28)
- **العبارة الشرطية** (ص. 28)
- **الفَرض** (ص. 28)
- **المعاكس الإيجابي** (ص. 31)
- **العكس** (ص. 31)
- **المعكوس** (ص. 31)
- **العبارات الشرطية المرتبطة** (ص. 31)
- **التكافؤ المنطقي** (ص. 31)
- **التبرير الاستنتاجي** (ص. 39)
- **قانون الفصل المنطقي** (ص.39)
- **قانون القياس المنطقي** (ص.41)
- **المسلَّمة** (ص.47)
- **البرهان** (ص. 48)
- **البرهان الحر** (ص. 49)
- **النظرية** (ص. 49)
- **البرهان الجبري** (ص. 55)
- **البرهان ذو العمودين** (ص. 56)

اختبار المفردات

بيّن ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة أو خاطئة، وإذا كانت خاطئة فاستبدل بالكلمة التي تحتها خط كلمة من القائمة أعلاه؛ لتجعل الجملة صحيحة:

1) المسلّمة هي العبارة التي تحتاج إلى برهان .
2) الجزء الأول في العبارة الشرطية يسمى تخمينًا.
3) يستعمل التبرير الاستنتاجي قوانين ونظريات للوصول إلى نتائج منطقية من العبارات المعطاة.
4) ينتج المعاكس الإيجابي عن نفي الفرض والنتيجة في العبارة الشرطية.
5) تتكون عبارة الوصل المنطقي من ربط عبارتين أو أكثر باستعمال (و).
6) النظرية يُسلّم بصحتها دائمًا.
7) ينتج العكس بتبديل الفرض مع النتيجة في العبارة الشرطية.
8) لإثبات أن التخمين خاطئ، يجب أن يُعطي برهان.
9) يمكن أن يكتب معكوس العبارة p ، على صورة ليس p.
10) في البرهان ذي العمودين الخصائص التي تبرر كل خطوة تسمى المبررات.

مراجعة الدروس

1-1 التبرير الاستقرائي والتخمين (ص 14-20)

حدد ما إذا كان أيٌّ من التخمينين الآتيين صحيحًا أو خاطئًا، وإذا كان التخمين خاطئًا، فأعطِ مثالًا مضادًّا.

11) إذا كانت $\angle 1$ و $\angle 2$ متكاملتين، فإنهما متجاورتان على مستقيم.

12) إذا أعطيت النقاط $W(-3, 2), X(-3, 7), Y(6, 7), Z(6, 2)$، فإن الشكل الرباعي $WXYZ$ مستطيل.

13) **منازل:** معظم أسطح المنازل في البلدان القريبة من القطب الشمالي تكون مائلة، بينما تكون مستوية في المناطق الحارة. أعط تخمينًا عن سبب اختلاف الأسطح.

مثال 1

حدد ما إذا كان أيٌّ من التخمينين الآتيين صحيحًا أو خاطئًا، وإذا كان خاطئًا، فأعطِ مثالًا مضادًّا.

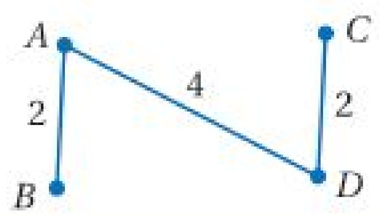
a) **$c = d, d = c$ هو مثال على خاصية من خصائص الأعداد الحقيقية.**

$c = d, d = c$ هو مثال على خاصية التماثل للمساواة في الأعداد الحقيقية. وهذا التخمين صحيح.

b) **إذا كان $AB + CD = AD$، فإن B و C تقعان بين A و D**

هذا التخمين خاطئ. في الشكل أدناه

$AB + CD = AD$، ولكن B و C لا تقعان بين A و D



1-2 المنطق (ص 21-27)

استعمل العبارات p, q, r لكتابة كل عبارة وصل أو فصل أدناه، ثم أوجد قيمة الصواب لها. فسّر تبريرك.

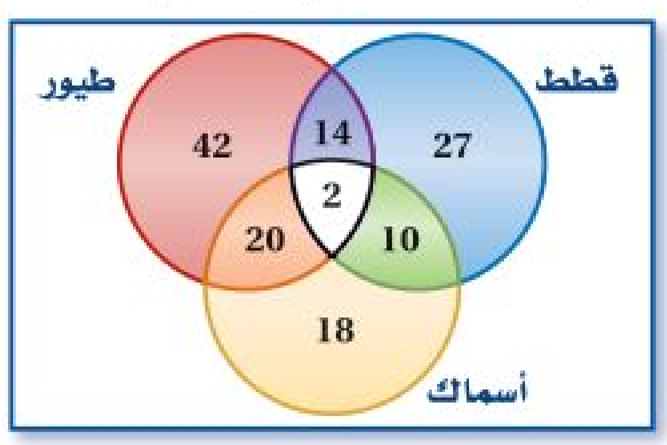
p: يحوي المستوى ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة.

q: الياردة المربعة تكافئ ثلاث أقدام مربعة.

r: مجموع قياسَي الزاويتين المتتامتين يساوي $180°$.

14) $\sim q \vee r$ **15)** $p \wedge \sim r$ **16)** $\sim p \vee q$

17) **حيوانات أليفة:** شكل فن الآتي يُظهر عدد الأشخاص الذين لديهم حيوانات أليفة في منازلهم.



a) ما عدد الأشخاص الذين لديهم أسماك فقط؟

b) ما عدد الأشخاص الذين لديهم قطط وطيور فقط؟

c) ما عدد الأشخاص الذين لديهم طيور وأسماك؟

مثال 2

استعمل العبارات p, q, r لكتابة كل عبارة وصل أو فصل أدناه، ثم أوجد قيمة الصواب لها. فسّر تبريرك.

p: x^2 عدد غير سالب.

q: الزوايا المتجاورة لها ضلع مشترك.

r: العدد السالب ليس عددًا حقيقيًّا.

a) $\sim q \wedge r$

$\sim q \wedge r$: الزوايا المتجاورة ليس لها ضلع مشترك، والعدد السالب ليس عددًا حقيقيًّا.

بما أن كلًّا من $\sim q$ و r خاطئتان، فإن $\sim q \wedge r$ خاطئة أيضًا.

b) p أو r

p أو r: x^2 عدد غير سالب، أو العدد السالب ليس عددًا حقيقيًّا.

p أو r صائبة؛ لأن p صائبة، وليس لكون r خاطئة تأثير.

الفصل 1

دليل الدراسة والمراجعة

1-3 العبارات الشرطية (ص 28-37)

حدِّد قيمة الصواب للعبارتين الشرطيتين الآتيتين، وإذا كانت العبارة صائبة، ففسِّر تبريرك، أما إذا كانت خاطئة فأعطِ مثالًا مضادًا.

18) إذا ربَّعت العدد الصحيح، فإن الناتج يكون عددًا صحيحًا موجبًا.

19) إذا كان للشكل السداسي ثمانية أضلاع، فإن جميع زواياه تكون منفرجة.

20) اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية الصائبة الآتية. ثم حدد ما إذا كانت أيٌّ منها صائبة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة، فأعط مثالًا مضادًا.

إذا كانت الزاويتان متطابقتين، فإن لهما القياس نفسه.

مثال 3

اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية الصائبة الآتية:

إذا كان الشكل مربعًا فإنه متوازي أضلاع.

العكس: إذا كان الشكل متوازي أضلاع، فإنه مربع.

المعكوس: إذا لم يكن الشكل مربعًا، فإنه ليس متوازي أضلاع.

المعاكس الإيجابي: إذا لم يكن الشكل متوازي أضلاع، فإنه ليس مربعًا.

1-4 التبرير الاستنتاجي (ص 39-46)

استعمل قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي؛ لتحصل على نتيجة صائبة إن أمكن من العبارات الآتية، واذكر القانون الذي استعملته. وإذا تعذر الحصول على نتيجة صائبةٍ، فاكتب "لا نتيجة صائبة". فسِّر تبريرك.

21) المعطيات: إذا نصّف قطرا الشكل الرباعي كلٌّ منهما الآخر، فإن الشكل متوازي أضلاع.

ينصف قطرا الشكل الرباعي $PQRS$ كلٌّ منهما الآخر.

22) المعطيات: إذا واجهت عائشة صعوبة في مادة العلوم، فإنها ستخصص وقتًا إضافيًّا لدراسة المادة.

إذا لم تذهب عائشة للسوق، فإنها ستخصص وقتًا إضافيًّا لدراسة مادة العلوم.

23) زلازل: حدِّد ما إذا كانت النتيجة صائبة أم لا فيما يأتي، اعتمادًا على المعطيات. فسِّر تبريرك.

المعطيات: إذا كانت قوة الزلزال 7.0 درجات فأكثر على مقياس ريختر، فإنه يُعتبر زلزالًا مدمرًا، ويحدث دمارًا وخرابًا كبيرين.

كانت قوة زلزال سان فرانسيسكو عام 1906م 8.0 درجات على مقياس ريختر.

نتيجة: كان زلزال سان فرانسيسكو عام 1906م زلزالًا مدمرًا، وأحدث دمارًا وخرابًا كبيرين.

مثال 4

استعمل قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي؛ لتحصل على نتيجة صائبة إن أمكن من العبارات الآتية، واذكر القانون الذي استعملته. وإذا تعذر الحصول على نتيجةٍ صائبةٍ فاكتب "لا نتيجة صائبة". فسِّر تبريرك.

(1) **إذا كان قياس الزاوية أكبر من °90، فإنها منفرجة.**

(2) **إذا كانت الزاوية منفرجة، فإنها ليست قائمة.**

p: قياس الزاوية أكبر من °90

q: الزاوية منفرجة

r: الزاوية ليست قائمة

العبارة (1) : $p \to q$

العبارة (2) : $q \to r$

بما أن العبارتين الشرطيتين (1)، (2) صائبتان، فإنه يمكن استنتاج أن $p \to r$؛ باستعمال قانون القياس المنطقي؛ أي أنه إذا كان قياس الزاوية أكبر من °90، فإنها ليست قائمة.

1-5 المسلّمات والبراهين الحرة (ص 47-53)

حدِّد ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. فسِّر تبريرك.

24) يتقاطع المستويان في نقطة.

25) تقع ثلاث نقاط في أكثر من مستوى.

26) إذا وقع المستقيم m في المستوى X، ومرّ المستقيم m بالنقطة Q، فإن النقطة Q تقع في المستوى X.

27) إذا كانت الزاويتان متتامتين، فإنهما تكوّنان زاوية قائمة.

28) **عمل:** دُعي ستة أشخاص لحضور اجتماع عمل. إذا صافَحَ كل شخص بقية الأشخاص، فما عدد المصافحات التي تبادلها هؤلاء الأشخاص جميعًا؟ ارسم نموذجًا يؤيد تخمينك.

مثال 5

حدِّد ما إذا كانت كل جملة مما يلي صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. فسِّر تبريرك.

a) إذا وقعت النقاط X, Y, Z في المستوى $\mathcal{R}$، فإن هذه النقاط لا تقع على استقامة واحدة.

صحيحة أحيانًا؛ الحقيقة المعطاة هي أن X, Y, Z تقع في المستوى $\mathcal{R}$ لا تضمن وقوعها على استقامة واحدة أو لا.

b) يمر مستقيم واحد فقط بالنقطتين A و B.

صحيحة دائمًا؛ بتطبيق المسلمة 1.1، يوجد مستقيم واحد فقط يمر بنقطتين معلومتين.

1-6 البرهان الجبري (ص 55-61)

اذكر الخاصية التي تبرر كل عبارة مما يأتي:

29) إذا كان $7(x-3) = 35$، فإن $35 = 7(x-3)$

30) إذا كان $2x + 19 = 27$، فإن $2x = 8$

31) $5(3x+1) = 15x + 5$

32) إذا كان $2x + 8 = 12$ و $2x + 8 = 3y$، فإن $12 = 3y$.

33) أكمل البرهان الآتي:

المعطيات: $6(x-4) = 42$

المطلوب: $x = 11$

العبارات	المبررات
a) $6(x-4) = 42$	a) ؟
b) $6x - 24 = 42$	b) ؟
c) $6x = 66$	c) ؟
d) $x = 11$	d) ؟

34) اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أنه إذا كان $PQ = RS$ و $PQ = 5x + 9, RS = x - 31$، فإن $x = -10$.

35) **اختبارات:** حصل أحمد على درجة مساوية لدرجة عمر في اختبار الرياضيات، وحصل عمر على درجة مساوية لدرجة سعد. ما الخاصية التي تثبت أن أحمد وسعدًا حصلا على الدرجة نفسها؟

مثال 6

أكمل البرهان الآتي:

المعطيات: $\frac{5x-3}{6} = 2x + 1$

المطلوب: $x = -\frac{9}{7}$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\frac{5x-3}{6} = 2x + 1$	1) معطيات
2) $5x - 3 = 6(2x+1)$	2) خاصية الضرب للمساواة
3) $5x - 3 = 12x + 6$	3) خاصية التوزيع
4) $-3 = 7x + 6$	4) خاصية الطرح للمساواة
5) $-9 = 7x$	5) خاصية الطرح للمساواة
6) $-\frac{9}{7} = x$	6) خاصية القسمة للمساواة
7) $x = -\frac{9}{7}$	7) خاصية التماثل للمساواة

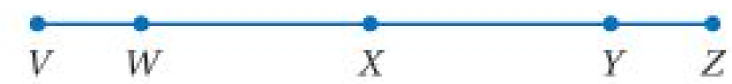
دليل الدراسة والمراجعة

1-7 إثبات العلاقات بين القطع المستقيمة (ص 62-67)

اكتب برهانًا ذا عمودين في كلٍّ من المسألتين الآتيتين:

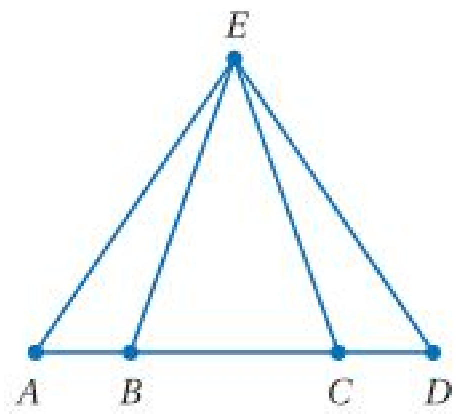
36) **المعطيات:** X نقطة منتصف كلٍّ من $\overline{WY}$ و $\overline{VZ}$

المطلوب: $VW = ZY$



37) **المعطيات:** $AB = DC$

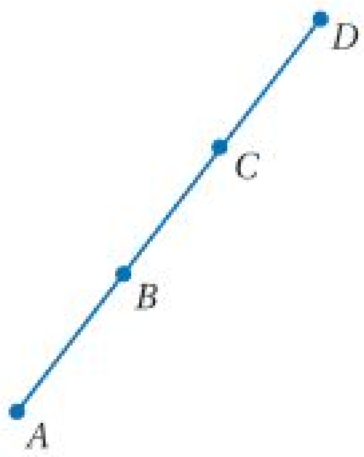
المطلوب: $AC = DB$



38) **جغرافيا:** أراد طارق السفر من مدينة جدة إلى الطائف، مرورًا بمكة المكرمة لاصطحاب أخيه. ويعلم أن المسافة من جدة إلى مكة المكرمة تساوي 79 km ، والمسافة من مكة المكرمة إلى الطائف تساوي 88 km، استنتج أنه سيقطع 167 km في هذه الرحلة. فسر كيف استنتج ذلك؟ افترض أن الطريق الذي يربط هذه المدن الثلاث يشكل مستقيمًا.

مثال 7

اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: B نقطة منتصف $\overline{AC}$

C نقطة منتصف $\overline{BD}$

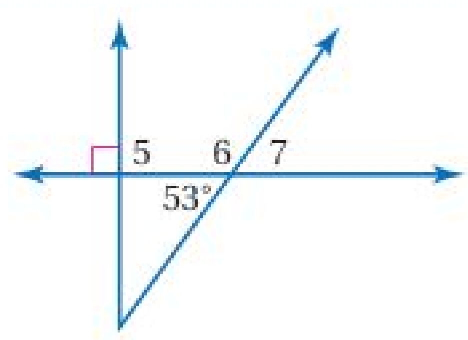
المطلوب: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) B نقطة منتصف $\overline{AC}$	**1)** معطيات
4) $\overline{AB} \cong \overline{BC}$	**2)** نظرية نقطة المنتصف
3) C نقطة منتصف $\overline{BD}$	**3)** معطيات
4) $\overline{BC} \cong \overline{CD}$	**4)** نظرية نقطة المنتصف
5) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	**5)** خاصية التعدي للتطابق

1-8 إثبات علاقات بين الزوايا (ص 68-75)

أوجد قياس كل زاوية فيما يأتي:

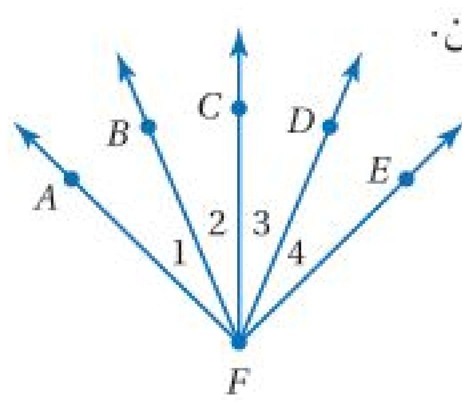


39) $\angle 5$

40) $\angle 6$

41) $\angle 7$

42) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.

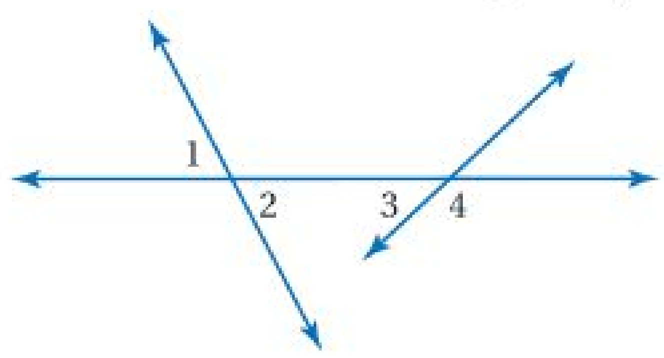


المعطيات: $\angle 1 \cong \angle 4$, $\angle 2 \cong \angle 3$

المطلوب: $\angle AFC \cong \angle EFC$

مثال 8

إذا علمت أن: $m\angle 1 = 72°$, $m\angle 3 = 26°$ ، فأوجد قياس كل زاوية مرقمة في الشكل أدناه.



$m\angle 2 = 72°$؛ لأن $\angle 1$, $\angle 2$ متقابلتان بالرأس.

$\angle 3$, $\angle 4$ متجاورتان على مستقيم؛ إذن فهما متكاملتان.

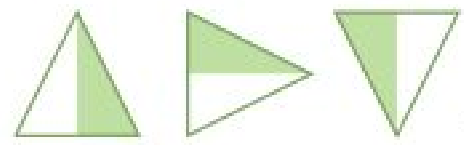
$26° + m\angle 4 = 180°$ تعريف الزاويتين المتكاملتين

$m\angle 4 = 154°$ بطرح 26 من كلا الطرفين

اختبار الفصل

اكتب تخمينًا يصف النمط في كلٍّ من المتتابعتين الآتيتين، ثم استعمله لإيجاد الحد التالي في كلٍّ منهما.

1) $15, 30, 45, 60, \ldots\ldots$

2) ...... 

استعمل العبارات p, q, r لكتابة كل عبارة وصل أو فصل أدناه، ثم أوجد قيمة الصواب لها. فسِّر إجابتك.

p: $5 < -3$

q: جميع الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة.

r: إذا كان $4x = 36$، فإن $x = 9$.

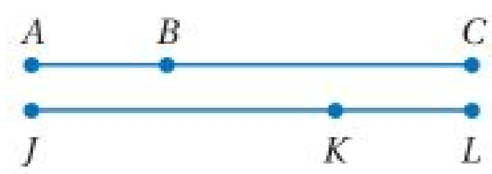
3) p و q

4) $(p \vee q) \wedge r$

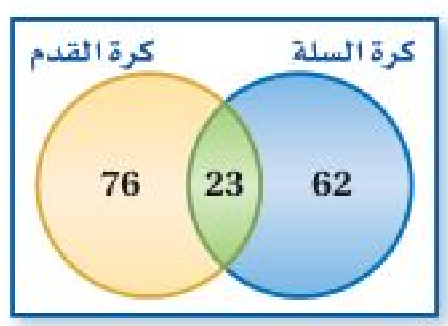
5) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا.

المعطيات: $\overline{JK} \cong \overline{CB}$, $\overline{KL} \cong \overline{AB}$

المطلوب: $\overline{JL} \cong \overline{AC}$



6) **رياضة:** استعمل شكل ڤن الآتي الذي يبين نوع الرياضة التي اختارها الطلاب للإجابة عن السؤالين أدناه.



a) صف اختيار الطلاب الذين هم خارج منطقة التقاطع وداخل دائرة كرة السلة .

b) ما عدد الطلاب الذين اختاروا كرة السلة وكرة القدم؟

7) حدِّد ما إذا كانت النتيجة صائبة أم لا فيما يأتي اعتمادًا على المعطيات. فسِّر تبريرك.

المعطيات: • إذا اجتاز الطبيب اختبار المجلس الطبي، فإنه يستطيع مزاولة مهنة الطب.

• اجتاز فهد اختبار المجلس الطبي.

النتيجة: يمكن أن يزاول فهد مهنة الطب.

8) **برهان:** أكمل البرهان الآتي:

المعطيات: $3(x - 4) = 2x + 7$

المطلوب: $x = 19$

البرهان:

العبارات	المبررات
a) $3(x-4) = 2x + 7$	a) معطيات
b) $3x - 12 = 2x + 7$	b) ___؟___
c) ___؟___	c) خاصية الطرح للمساواة
d) $x = 19$	d) ___؟___

حدِّد ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا.

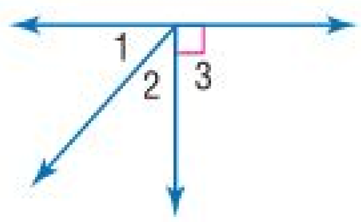
9) الزاويتان المتكاملتان تكونان متجاورتين على مستقيم.

10) إذا وقعت B بين A و C، فإن $AC + AB = BC$.

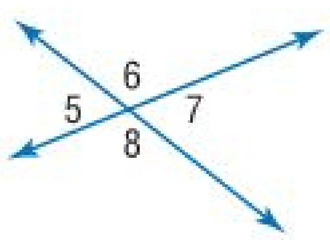
11) إذا تقاطع مستقيمان وكوَّنا زاويتين متطابقتين متجاورتين، فإنهما متعامدان.

أوجد قياس جميع الزوايا المرقَّمة في كلٍّ مما يأتي، واذكر النظريات التي تبرر حلك.

12) $m\angle 1 = x°$, $m\angle 2 = (x - 6)°$



13) $m\angle 7 = (2x + 15)°$, $m\angle 8 = (3x)°$



اكتب كلًّا من العبارتين الشرطيتين الآتيتين على صورة (إذا... فإن...).

14) قياس الزاوية الحادة أقل من $90°$

15) يتقاطع المستقيمان المتعامدان ويكوِّنا زوايا قائمة.

16) **اختيار من متعدد:** أيُّ العبارات الآتية هي المعاكس الإيجابي للعبارة الآتية؟

إذا احتوى المثلث على زاوية منفرجة واحدة، فإنه مثلث منفرج الزاوية.

A إذا لم يكن المثلث منفرج الزاوية، فإنه يحتوي على زاوية منفرجة واحدة.

B إذا لم يكن في المثلث زاوية منفرجة واحدة، فإنه ليس مثلثًا منفرج الزاوية.

C إذا لم يكن المثلث منفرج الزاوية، فإنه لا يحتوي على زاوية منفرجة واحدة.

D إذا كان المثلث منفرج الزاوية، فإنه يحتوي على زاوية منفرجة واحدة.

التبرير المنطقي

أحيانًا كثيرة يتطلب حل مسائل الهندسة استعمال التبريرات المنطقية؛ لذا يمكنك استعمال أساسيات التبرير المنطقي في حل مسائل الاختبارات.

استراتيجيات استعمال التبرير المنطقي

الخطوة 1

اقرأ المسألة لتحدد المعطيات، وما يجب أن تجده للإجابة عن السؤال.

الخطوة 2

حدِّد هل بإمكانك تطبيق أحد مبادئ التبرير المنطقي في هذه المسألة.

- **المثال المضاد:** المثال المضاد هو المثال الذي يناقض عبارة يُفترض أنها صائبة.
  حدِّد بدائل الإجابة التي تراها مناقضةً لنص المسألة واحذفها.
- **المسلّمات:** المسلّمة هي عبارة تصف علاقة أساسية في الهندسة.
  حدِّد هل بإمكانك تطبيق مسلَّمة للتوصل إلى نتيجةٍ منطقيةٍ.

الخطوة 3

إذا لم تصل إلى أي نتيجة من مبادئ الخطوة 2،

فحدِّد ما إذا كانت الأدوات الآتية تساعدك على الحل أم لا.

- **الأنماط:** ابحث عن نمط لعمل تخمينٍ مناسبٍ.
- **جداول الصواب:** استعمل جدول صواب لتنظيم قيم الصواب للعبارات المعطاة في المسألة.
- **أشكال ڤن:** استعمل أشكال ڤن لتمثيل العلاقات بين عناصر المجموعات بوضوح.
- **البراهين:** استعمل التبرير الاستقرائي والتبرير الاستنتاجي للوصول إلى نتيجةٍ على شكل برهانٍ.

الخطوة 4

إذا لم يكن بإمكانك الوصول إلى نتيجة حتى باستعمال مبادئ الخطوة 3، فخمِّن بديل الإجابة الأنسب، ثم ضع علامة على السؤال حتى ترجع إليه إذا بقي متسعٌ من الوقت في نهاية الاختبار.

مثال

اقرأ المسألة جيدًا، وحدِّد المطلوب فيها. ثم استعمل المعطيات لحلها.

عدد طلاب مدرسة 292 طالبًا، شارك 94 منهم في الألعاب الرياضية، و 122 في النوادي الثقافية، و 31 في كليهما. كم طالبًا لم يشارك في الألعاب الرياضية أو في النوادي الثقافية؟

A 95 **C** 122

B 107 **D** 138

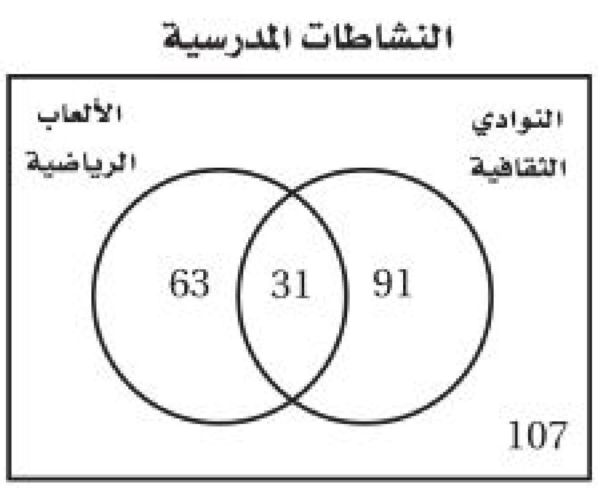
اقرأ المسألة جيدًا. من الواضح أنه ليس هناك أمثلة مضادة واضحة، ولا يمكن استعمال المسلمات للوصول إلى نتيجة منطقية؛ إذن علينا استعمال أدوات لتنظيم المعلومات المعطاة؛ لنراها بوضوح.

يمكننا رسم شكل ڤن لنرى التقاطع بين المجموعتين، وتحديد معطيات السؤال على هذا الشكل.

حدِّد عدد الطلاب الذين شاركوا في الألعاب الرياضية أو في النوادي الثقافية فقط.

الألعاب الرياضية فقط: $94 - 31 = 63$

النوادي الثقافية فقط: $122 - 31 = 91$



استعمل هذه المعلومات لحساب عدد الطلاب الذين لم يشاركوا في الألعاب الرياضية ولا في النوادي الثقافية.

$292 - 63 - 91 - 31 = 107$

إذن عدد الطلاب الذين لم يشاركوا في الألعاب الرياضية ولا في النوادي الثقافية يساوي 107 طلابٍ. وعليه فالإجابة الصحيحة هي B.

تمارين ومسائل

اقرأ كل سؤال مما يأتي، ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة.

1) حدِّد قيمة الصواب للعبارة الآتية. وإذا كانت خاطئة، فأعط مثالًا مضادًّا.

ناتج ضرب عددين زوجيين هو عدد زوجي.

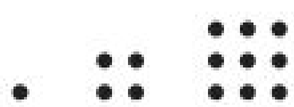
A خاطئة؛ $8 \times 4 = 32$

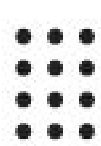
B خاطئة؛ $7 \times 6 = 42$

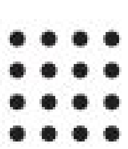
C خاطئة؛ $3 \times 10 = 30$

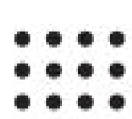
D صحيحة

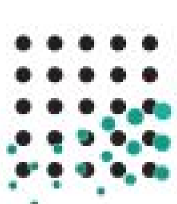
2) أوجد الحد التالي في النمط أدناه.



A 

C 

B 

D 

اختبار تراكمي
للفصل 1

أسئلة الاختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال مما يأتي، ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة.

1) أيُّ عبارات الوصل الآتية صائبة اعتمادًا على p و q أدناه؟

p: يوجد أربعة حروف في كلمة ربيع.

q: يوجد حرفا علّة في كلمة ربيع.

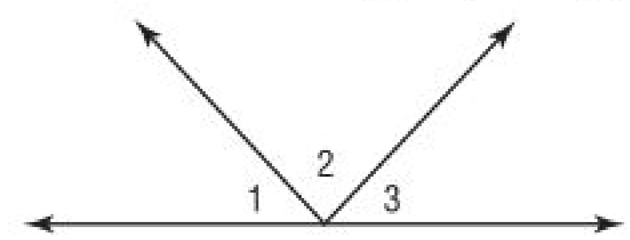
A $\sim p \wedge \sim q$

B $p \wedge q$

C $p \wedge \sim q$

D $\sim p \wedge q$

2) في الشكل الآتي $\angle 1 \cong \angle 3$.



أيُّ الاستنتاجات الآتية صحته ليست مؤكدة؟

A $m\angle 1 - m\angle 2 + m\angle 3 = 90°$

B $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$

C $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 2 + m\angle 3$

D $m\angle 2 - m\angle 1 = m\angle 2 - m\angle 3$

3) الزاويتان المتكاملتان تكونان متجاورتين على مستقيم دائمًا.
أيُّ مما يأتي يعدّ مثالًا مضادًّا للعبارة السابقة؟

A زاويتان غير متجاورتين

B زاويتان منفرجتان غير متجاورتين

C زاويتان قائمتان غير متجاورتين

D زاويتان متكاملتان ومتجاورتان على مستقيم

إرشادات للاختبار

السؤال 3: المثال المضاد هو المثال الذي يُعطى لإثبات أن الجملة المعطاة ليست صحيحة دائمًا.

4) أيّ العبارات أدناه تعدّ نتيجةً منطقيةً للعبارتين الآتيتين؟

إذا نزل المطر اليوم، فستؤجل المباراة.

ستُقام المباريات المؤجلة أيام الجمعة.

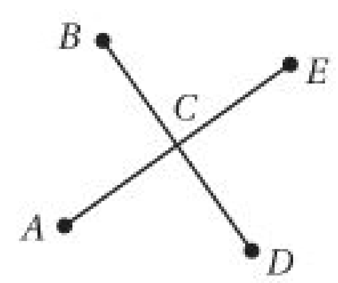
A إذا أُجّلت المباراة، فإنها تُؤجَّل بسبب المطر.

B إذا نزل المطر اليوم، فستُقام المباراة يوم الجمعة.

C لا تقام بعض المباريات المؤجلة أيام الجمعة.

D إذا لم ينزل المطر اليوم، فلن تُقام المباراة يوم الجمعة.

5) في الشكل أدناه تتقاطع $\overline{BD}$ و $\overline{AE}$ في C. أيُّ النتائج الآتية ليست صائبة؟



A $\angle ACB \cong \angle ECD$

B $\angle ACB$ و $\angle ACD$ متجاورتان على مستقيم.

C $\angle BCE$ و $\angle ACD$ متقابلتان بالرأس.

D $\angle BCE$ و $\angle ECD$ متتامتان .

6) **أرجوحة:** في حديقة بيت صغير ست شجرات مزروعة على شكل رؤوس سداسيٍّ منتظم. بكم طريقة يمكنك تعليق الأرجوحة وتثبيتها على شجرتين من الشجرات الستِّ؟

A 22 طريقة

B 12 طريقة

C 15 طريقة

D 36 طريقة

أسئلة ذات إجابات قصيرة

اكتب إجاباتك في ورقة الإجابة.

7) تقع النقاط A, B, C, D على استقامة واحدة، وتقع النقطة B بين A و C وتقع النقطة C بين B و D. أكمل العبارة الآتية:

$$AB + \underline{\quad ؟ \quad} = AD$$

8) يحتوي المستقيم m على النقاط D, E, F، إذا كان $DE = 12\,\text{cm}$، و $EF = 15\,\text{cm}$، والنقطة D بين E و F، فما طول $\overline{DF}$؟

9) استعمل البرهان الآتي للإجابة عن السؤال أدناه.

المعطيات: $\angle A$ هي متمِّمة $\angle B$ ، $m\angle B = 46°$

المطلوب: $m\angle A = 44°$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle A$ هي متممة $\angle B$. $m\angle B = 46°$	1) معطيات
2) $m\angle A + m\angle B = 90°$	2) تعريف الزاويتين المتتامتين
3) $m\angle A + 46° = 90°$	3) بالتعويض
4) $m\angle A + 46° - 46° = 90° - 46°$	4) ___؟___
5) $m\angle A = 44°$	5) بالتبسيط.

ما التبرير الذي يفسر الخطوة 4؟

10) اكتب المعاكس الإيجابي للعبارة الآتية:

إذا كان قياس الزاوية أكبر من $90°$، فإنها منفرجة.

11) النقطة E منتصف $\overline{DF}$ ، إذا كانت $DE = 8x - 3$, $EF = 3x + 7$ ، فأوجد قيمة x؟

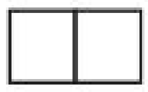
12) اكتب عكس العبارة الآتية:
"إذا كنتَ الرابحَ، فأنا الخاسر".

أسئلة ذات إجابات مطولة

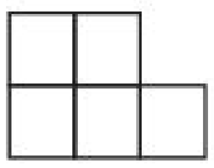
اكتب إجابتك في ورقة الإجابة مبينًا خطوات الحل.

13) إليك النمط الآتي:

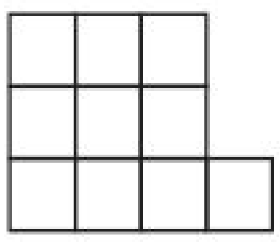
الشكل (1)



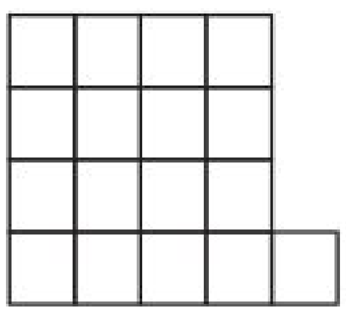
الشكل (2)



الشكل (3)



الشكل (4)



a) ضع تخمينًا لعدد المربعات في أيٍّ من أشكال النمط.

b) اكتب عبارةً جبريةً يمكن استعمالها لإيجاد عدد المربعات في الشكل رقم n من هذا النمط.

c) ما عدد المربعات في الشكل السادس من هذا النمط؟

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

إذا لم تستطع الإجابة عن ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
فعد إلى الدرس...	1-2	1-8	1-1	1-4	1-8	1-5	1-7	1-7	1-8	1-3	1-7	1-3	1-1

الفصل 2

التوازي والتعامد
Parallel And Perpendicular

فيما سبق:

درستُ المستقيمات والزوايا واستعمال التبرير الاستنتاجي لكتابة براهين هندسية.

والآن:

- أحدد علاقات بين زوايا ناتجة عن قطع مستقيم لمستقيمين متوازيين. وأبرهن توازي مستقيمين من خلال علاقات الزوايا المعطاة.
- أستعمل الميل لتحليل المستقيم وكتابة معادلته.
- أجد البعد بين نقطة ومستقيم، والبعد بين مستقيمين متوازيين.

لماذا؟

هندسة: في تصاميم المباني يعتمد المهندسون على خصائص هندسية مختلفة منها التوازي والتعامد.

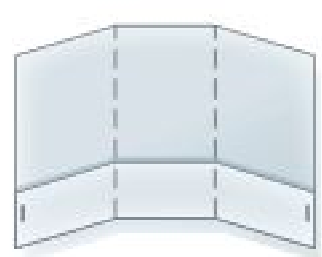
المطويات منظم أفكار

التوازي والتعامد: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول العلاقات بين المستقيمات، مبتدئًا بورقة A4 واحدة وست بطاقات.

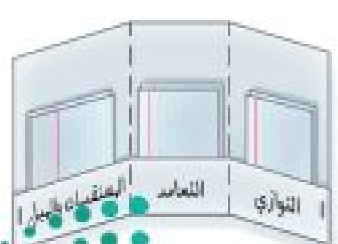
1. **اطوِ** جانب الورقة الأطول بعرض 4 cm لعمل جيب كما في الشكل.

2. **اطوِ** الورقة طوليًّا مرتين كما في الشكل.

3. **افتح** الورقة وثبت الحواف عند الجانبين؛ لتكوّن ثلاثة جيوب.



4. **اكتب** عنوانًا لكل جيب كما هو موضّح. وضع بطاقتين في كل جيب.



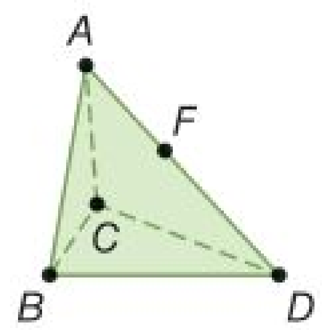
التهيئة للفصل 2

تشخيص الاستعداد:

أجب عن الاختبار الآتي . انظر إلى المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

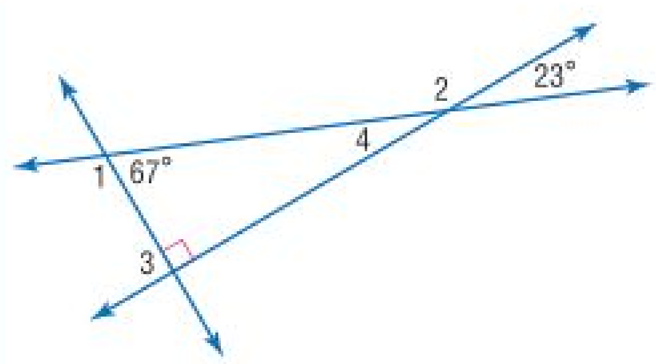
اختبار سريع

استعمل الشكل المجاور.



1) كم مستوى يظهر في الشكل؟ اذكرها.
2) سمّ ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة.
3) هل تقع النقاط B, C, D في المستوى نفسه؟ وضّح إجابتك.
4) **أجهزة:** يوضع جهاز مساحة الأراضي على حامل ثلاثي القوائم. هل تقع الرؤوس السفلية للقوائم الثلاثة في المستوى نفسه؟

أوجد قياس كلٍّ من الزوايا الآتية:



5) $\angle 1$
6) $\angle 2$
7) $\angle 3$
8) $\angle 4$

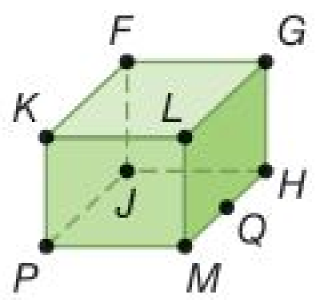
أوجد قيمة x لقيم a, b المعطاة في كل معادلة مما يأتي:

9) $a + 8 = -4(x - b),\ a = 8\ ,\ b = 3$
10) $b = 3x + 4a,\ a = -9\ ,\ b = 12$
11) $\frac{a + 2}{b + 13} = 5x,\ a = 18\ ,\ b = -1$
12) **معارض:** يقدم معرض هدية بسعر تشجيعي قدره 15 ريالًا عند شراء بطاقتَي دخول. إذا دفع أحمد وأخوه 95 ريالًا، فاكتب معادلة تمثل ما دفعه أحمد وأخوه، ثم حُلَّها لإيجاد ثمن بطاقة الدخول الواحدة.

مراجعة سريعة

مثال 1

استعمل الشكل المجاور .



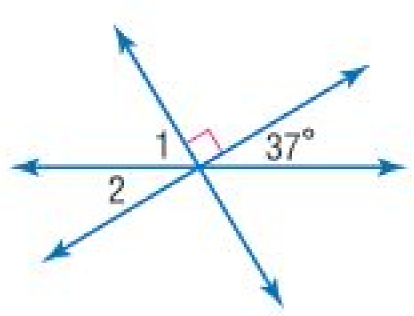
a) **كم مستوى يظهر في الشكل؟ اذكرها.**
ستة مستويات هي:
$FGL, JHM, FKP, GLM, FGH, KLM$.

b) **سمّ ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة.**
النقاط M, Q, H تقع على استقامة واحدة.

c) **هل تقع النقاط F, K, J في المستوي نفسه؟ وضِّح إجابتك.**
نعم. النقاط F, K, J تقع جميعها في المستوى $FKPJ$.

مثال 2

أوجد $m\angle 1$.



$m\angle 1 + 37° + 90° = 180°$ اجمع

$m\angle 1 = 53°$ بسّط

مثال 3

أوجد قيمة x في المعادلة $a + 8 = b(x - 7)$ ، إذا كان $a = 12\ ,\ b = 10$.

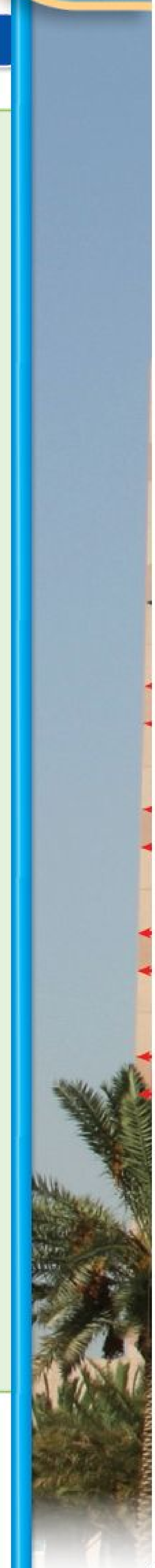
$a + 8 = b(x - 7)$ المعادلة المعطاة

$12 + 8 = 10(x - 7)$ $a = 12\ ,\ b = 10$

$20 = 10x - 70$ بسّط

$90 = 10x$ اجمع 70 للطرفين

$x = 9$ اقسم الطرفين على 10



2-1 المستقيمان والقاطع
Lines and Transeversal

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

فيما سبق:

استعملتُ علاقات الزوايا والقطع المستقيمة لأبرهن نظريات.

(الدروس من 5-1 إلى 8-1)

والآن:

- أتعرّف العلاقات بين مستقيمين أو مستويين.
- أسمّي أزواج الزوايا الناتجة عن مستقيمين وقاطع لهما.

المفردات

المستقيمان المتوازيان
parallel lines

المستقيمان المتخالفان
skew lines

المستويان المتوازيان
parallel planes

القاطع
transversal

الزوايا الداخلية
interior angles

الزوايا الخارجية
exterior angles

الزاويتان المتحالفتان
consecutive angles

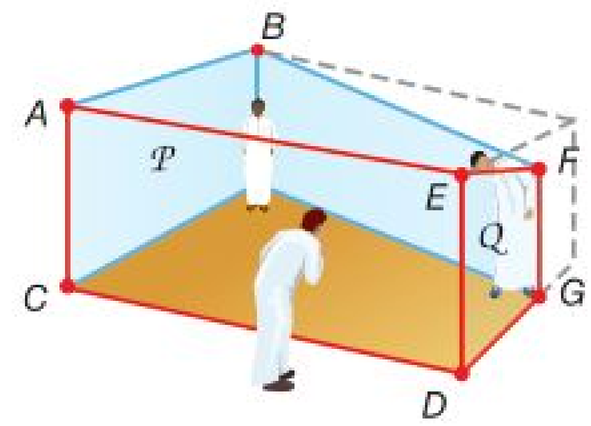
الزاويتان المتبادلتان داخليًا
alternate interior angles

الزاويتان المتبادلتان خارجيًا
alternate exterior angles

الزاويتان المتناظرتان
corresponding angles

لماذا؟

تُظهر غُرفة الخداع البصري أن الشخص الواقف في الزاوية اليمنى أكبر من الشخص الواقف في الزاوية اليسرى. وفي المنظر الأمامي، يبدو الحائطان الأمامي والخلفي متوازيين في حين أنهما ليسا كذلك.



ويبدو السقف والأرضية أفقيين، ولكنهما في الحقيقة ليسا أفقيين.

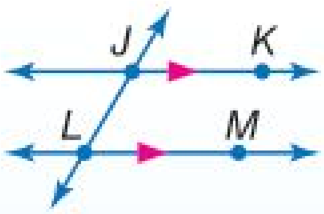
العلاقات بين المستقيمات والمستويات: استُعمِلتْ مستقيمات متوازية ومتقاطعة ومتخالفة بالإضافة إلى مستويات متقاطعة وأخرى متوازية؛ لتصميم غرفة الخداع كما يتضح في الرسم السابق.

مفاهيم أساسية — التوازي والتخالف

أضف إلى مطويتك

المستقيمان المتوازيان هما مستقيمان لا يتقاطعان أبدًا ويقعان في المستوى نفسه.

مثال: $\overleftrightarrow{JK} \parallel \overleftrightarrow{LM}$



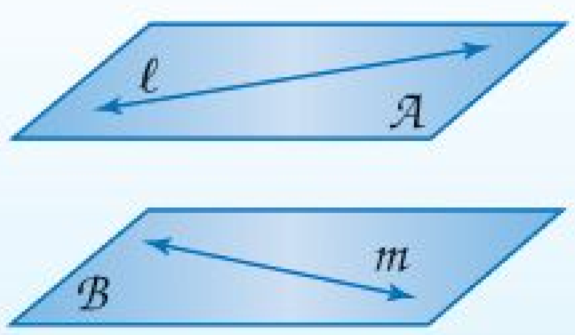
تستعمل رؤوس الأسهم لتدل على توازي مستقيمين.

المستقيمان المتخالفان هما مستقيمان لا يتقاطعان، ولا يقعان في المستوى نفسه.

مثال: المستقيمان ℓ, m متخالفان.

المستويان المتوازيان هما مستويان غير متقاطعين.

مثال: المستويان $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ متوازيان.



تُقرأ $\overleftrightarrow{JK} \parallel \overleftrightarrow{LM}$: المستقيم JK يوازي المستقيم LM

إذا كانت القطع المستقيمة أو أنصاف المستقيمات أجزاءً من مستقيمات متوازية أو متخالفة، فإنها تكون متوازية أو متخالفة أيضًا.

مثال 1 من واقع الحياة — تحديد علاقات التوازي والتخالف

حدِّد كلًّا مما يأتي مستعملًا قطعة الجبن في الشكل المجاور :

a) جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{JP}$.

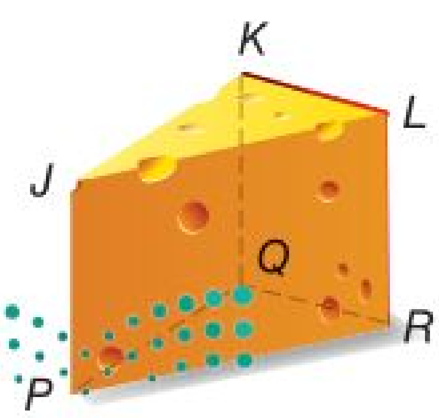
$\overline{KQ}, \overline{LR}$

b) جميع القطع المستقيمة التي تخالف $\overline{KL}$.

$\overline{JP}, \overline{PQ}, \overline{PR}$

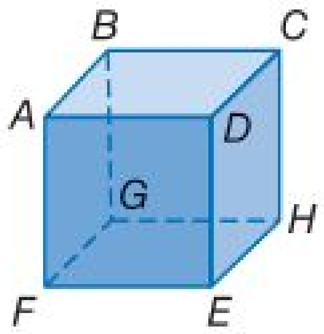
c) مستوى يوازي المستوى PQR.

المستوى JKL هو المستوى الوحيد الموازي للمستوى PQR.



✓ تحقق من فهمك

حدد كلًّا مما يأتي مستعملًا الشكل المجاور :



1A) جميع القطع المستقيمة التي تخالف $\overleftrightarrow{BC}$.

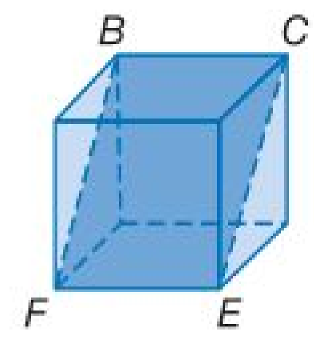
1B) قطعة مستقيمة توازي $\overline{EH}$.

1C) جميع المستويات التي توازي المستوى DCH .

تنبيه!

التوازي والتخالف

في تمرين تحقق من فهمك 1A : $\overleftrightarrow{FE}$ لا يخالف $\overleftrightarrow{BC}$ بل يوازيه، وذلك لأنهما لا يتقاطعان ويقعان في المستوى BCF.

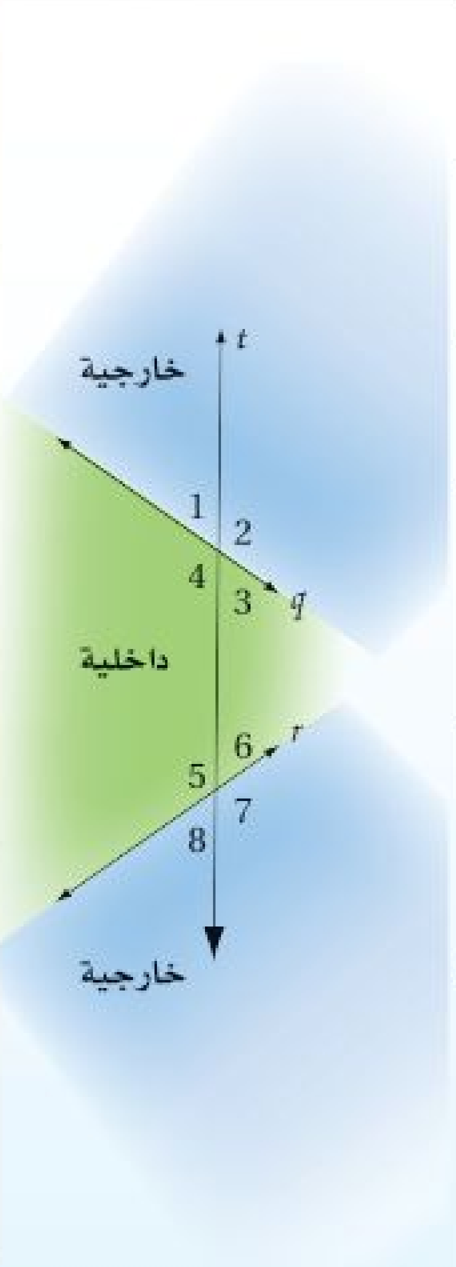


علاقات أزواج الزوايا الناتجة عن القاطع: **القاطع** هو المستقيم الذي يقطع مستقيمين أو أكثر في المستوى نفسه وفي نقاط مختلفة. ففي الشكل أدناه، المستقيم t قاطع للمستقيمين q, r. لاحظ أن المستقيم t يشكّل ثماني زوايا مع المستقيمين q, r . وأزواج محددة من هذه الزوايا لها أسماء خاصة.

مفاهيم أساسية — علاقات أزواج الزوايا الناتجة عن القاطع

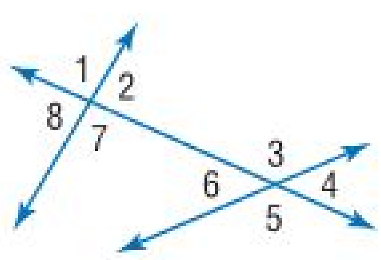
أضف إلى مطويتك

توجد أربع **زوايا داخلية** في المنطقة بين المستقيمين q, r.	$\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$
توجد أربع **زوايا خارجية** في منطقتين ليستا بين q, r.	$\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$
الزاويتان المتحالفتان هما زاويتان داخليتان واقعتان في جهة واحدة من القاطع t.	$\angle 4$ و $\angle 5$ ، $\angle 3$ و $\angle 6$
الزاويتان المتبادلتان داخليًا هما زاويتان داخليتان غير متجاورتين تقعان في جهتين مختلفتين من القاطع t.	$\angle 3$ و $\angle 5$ ، $\angle 4$ و $\angle 6$
الزاويتان المتبادلتان خارجيًا هما زاويتان خارجيتان غير متجاورتين تقعان في جهتين مختلفتين من القاطع t.	$\angle 1$ و $\angle 7$ ، $\angle 2$ و $\angle 8$
الزاويتان المتناظرتان هما زاويتان واقعتان في جهة واحدة من القاطع t، إحداهما داخلية، والأخرى خارجية وغير متجاورتين.	$\angle 1$ و $\angle 5$ ، $\angle 2$ و $\angle 6$ $\angle 3$ و $\angle 7$ ، $\angle 4$ و $\angle 8$



مثال 2 — تصنيف علاقات أزواج الزوايا

مستعملًا الشكل المجاور، صنِّف كل زوج من الزوايا فيما يأتي إلى زاويتين متبادلتين داخليًا، أو متبادلتين خارجيًّا، أو متناظرتين، أو متحالفتين:



a) $\angle 5$ و $\angle 1$

متبادلتان خارجيًّا

b) $\angle 7$ و $\angle 6$

متحالفتان

c) $\angle 4$ و $\angle 2$

متناظرتان

d) $\angle 6$ و $\angle 2$

متبادلتان داخليًّا

✓ تحقق من فهمك

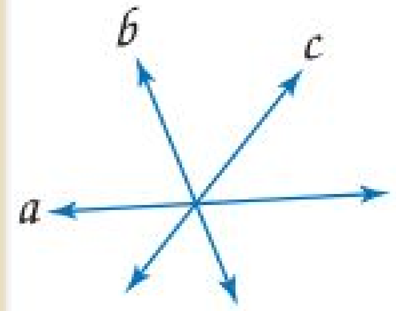
2A) $\angle 3$ و $\angle 7$ **2B)** $\angle 5$ و $\angle 7$ **2C)** $\angle 4$ و $\angle 8$ **2D)** $\angle 2$ و $\angle 3$

عندما يوجد في الشكل أكثر من قاطع واحد، عيّن أولًا القاطع الذي ينتج عنه زوج الزوايا المعطاة، بتعيين المستقيم الذي يصل بين رأسيهما.

إرشادات للدراسة

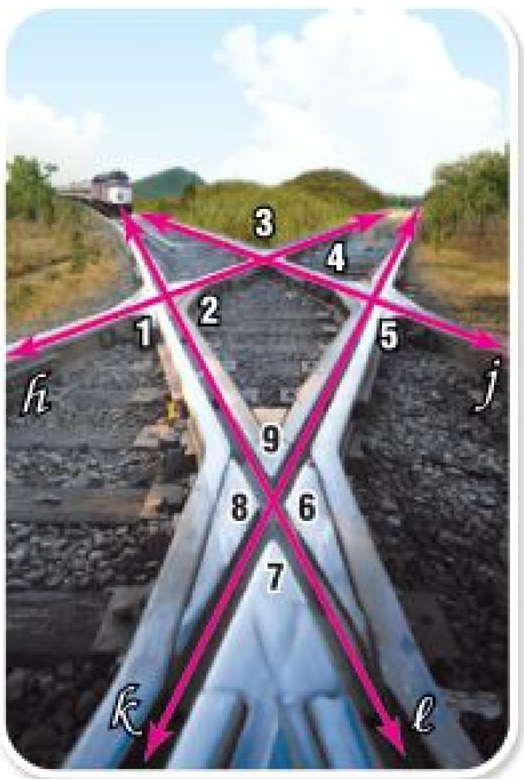
القاطع

في الشكل أدناه، المستقيم c ليس قاطعًا للمستقيمين a, b، لأن المستقيم c يقطع المستقيمين a, b في نقطة واحدة فقط.



مثال 3 تحديد القاطع وتصنيف أزواج الزوايا

استعمل صورة تقاطع سكك القطار المجاورة؛ لتحدد القاطع الذي يصل بين كل زوج من الزوايا فيما يأتي، ثم صنِّف الأزواج إلى زاويتين متبادلتين داخليًّا، أو متبادلتين خارجيًّا، أو متناظرتين، أو متحالفتين.



a) $\angle 1$ و $\angle 3$

القاطع الذي يصل بين $\angle 1$ و $\angle 3$ هو المستقيم h. وهما زاويتان متبادلتان خارجيًّا.

b) $\angle 5$ و $\angle 6$

القاطع الذي يصل بين $\angle 5$ و $\angle 6$ هو المستقيم k. وهما زاويتان متحالفتان.

c) $\angle 2$ و $\angle 6$

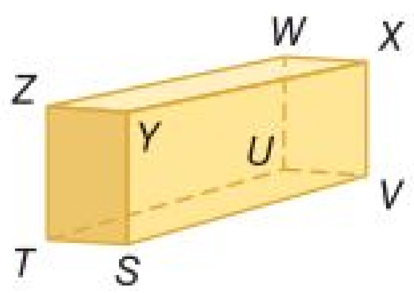
القاطع الذي يصل بين $\angle 2$ و $\angle 6$ هو المستقيم ℓ. وهما زاويتان متناظرتان.

تحقق من فهمك

3A) $\angle 3$ و $\angle 5$　**3B)** $\angle 2$ و $\angle 8$　**3C)** $\angle 5$ و $\angle 7$　**3D)** $\angle 2$ و $\angle 9$

تأكـد

المثال 1 حدد كلًّا مما يأتي مستعملًا متوازي المستطيلات في الشكل المجاور :

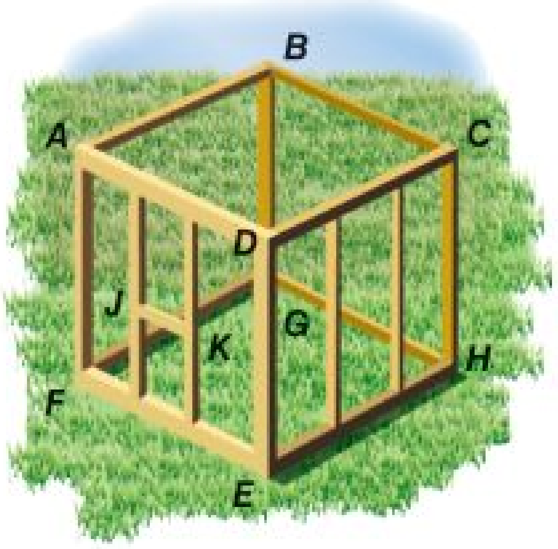


1) جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{SV}$.

2) مستوى يوازي المستوى ZWX .

3) قطعة مستقيمة تخالف $\overline{TS}$ وتحتوي على النقطة W .

4) إنشاءات: استعمل الشكل المجاور لتحديد كلٍّ مما يأتي :



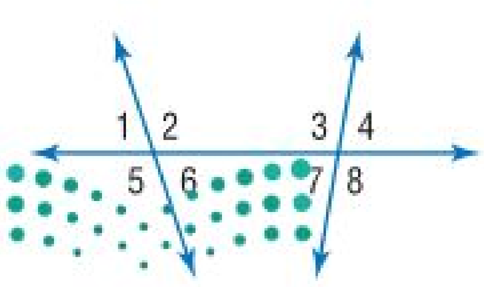
a) ثلاثة أزواج من المستويات المتوازية.

b) ثلاث قطع مستقيمة توازي $\overline{DE}$.

c) قطعتين مستقيمتين توازيان $\overline{FE}$.

d) زوجين من القطع المستقيمة المتخالفة.

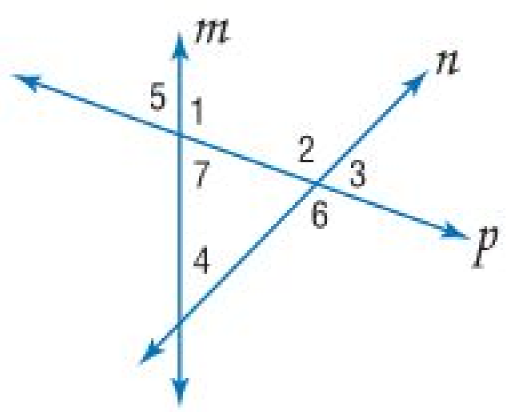
المثال 2 مستعملًا الشكل المجاور، صنِّف كل زوج من الزوايا فيما يأتي إلى زاويتين متبادلتين داخليًّا، أو متبادلتين خارجيًّا، أو متناظرتين، أو متحالفتين.



5) $\angle 1$ و $\angle 8$　**6)** $\angle 2$ و $\angle 4$

7) $\angle 3$ و $\angle 6$　**8)** $\angle 6$ و $\angle 7$

المثال 3 استعمل الشكل المجاور لتحدد القاطع الذي يصل بين كل زوج من الزوايا فيما يأتي، ثم صنِّف زوج الزوايا إلى زاويتين متبادلتين داخليًّا، أو متبادلتين خارجيًّا، أو متناظرتين، أو متحالفتين:



9) $\angle 2$ و $\angle 4$

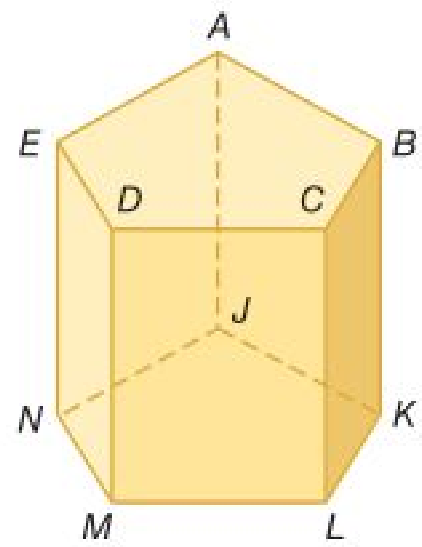
10) $\angle 5$ و $\angle 6$

11) $\angle 4$ و $\angle 7$

12) $\angle 2$ و $\angle 7$

تدرب وحل المسائل

المثال 1 حدِّد كلًّا مما يأتي مستعملًا الشكل المجاور:



13) جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{DM}$.

14) مستوى يوازي المستوى ACD.

15) قطعة مستقيمة تخالف $\overline{BC}$.

16) مستوى يتقاطع مع المستوى EDM.

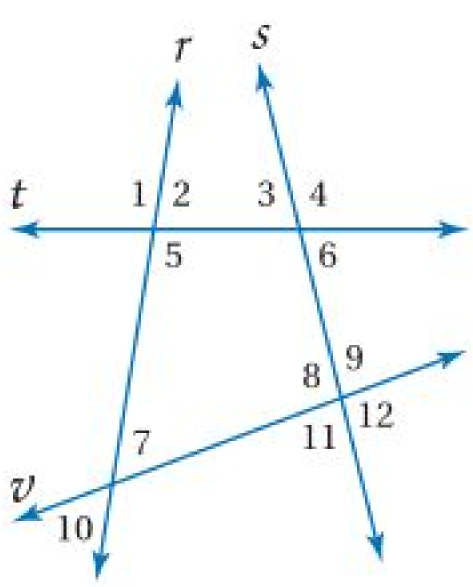
17) جميع القطع المستقيمة التي تخالف $\overline{AE}$.

18) قطعة مستقيمة توازي $\overline{EN}$.

19) قطعة مستقيمة توازي $\overline{AB}$ وتمر بالنقطة J.

20) قطعة مستقيمة تخالف $\overline{CL}$ وتمر بالنقطة E.

المثال 2 مستعملًا الشكل المجاور، صنِّف كل زوج من الزوايا فيما يأتي إلى زاويتين متبادلتين داخليًّا، أو متبادلتين خارجيًّا، أو متناظرتين، أو متحالفتين.



21) $\angle 4$ و $\angle 9$

22) $\angle 5$ و $\angle 7$

23) $\angle 3$ و $\angle 5$

24) $\angle 10$ و $\angle 11$

25) $\angle 1$ و $\angle 6$

26) $\angle 6$ و $\angle 8$

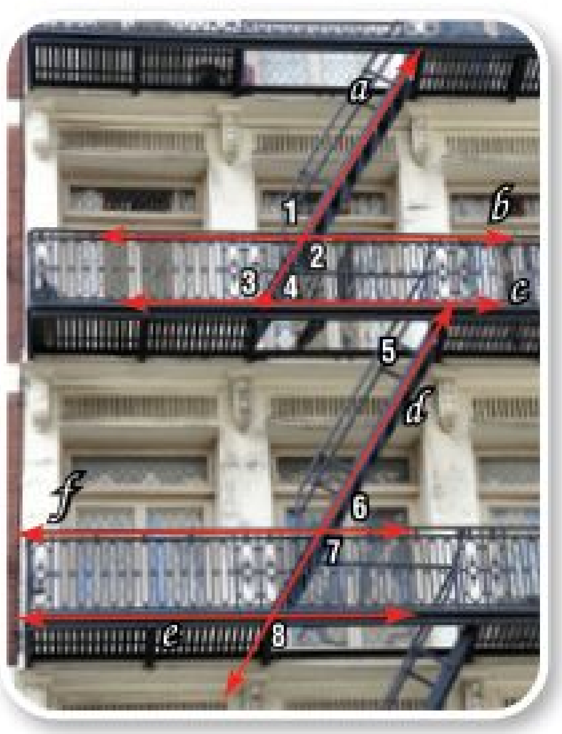
27) $\angle 2$ و $\angle 3$

28) $\angle 9$ و $\angle 10$

29) $\angle 4$ و $\angle 11$

30) $\angle 7$ و $\angle 11$

المثال 3 **سلَّم طوارئ:** استعمل صورة سلَّم الطوارئ المجاورة؛ لتحدد القاطع الذي يصل بين كل زوج من الزوايا فيما يأتي، ثم صنِّف زوج الزوايا إلى زاويتين متبادلتين داخليًّا، أو متبادلتين خارجيًّا، أو متناظرتين:



31) $\angle 1$ و $\angle 3$

32) $\angle 2$ و $\angle 4$

33) $\angle 4$ و $\angle 5$

34) $\angle 5$ و $\angle 6$

35) $\angle 7$ و $\angle 8$

36) $\angle 2$ و $\angle 3$

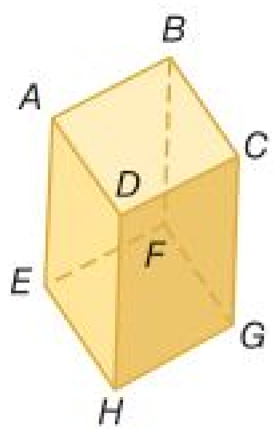
الربط مع الحياة

لا يسمح بتقاطع خطوط التوصيل بين أبراج الكهرباء، لتجنب حدوث تماس يؤدي إلى انقطاع التيار الكهربائي أو إشعال الحرائق.

37) **كهرباء:** استعمل الصورة المجاورة في فقرة الربط مع الحياة والمعلومات أدناها للإجابة عما يأتي:

a) ماذا يجب أن تكون عليه العلاقة بين خطَّي التوصيل الكهربائي p و m؟ وضِّح إجابتك.

b) ما العلاقة بين ذراع الحمل q وخطَّي التوصيل الكهربائي p و m؟



استعمل الشكل المجاور لتصف العلاقة بين كل زوج من القطع المستقيمة الآتية بكتابة: متوازيتان، أو متخالفتان، أو متقاطعتان:

38) $\overline{FG}$ و $\overline{BC}$

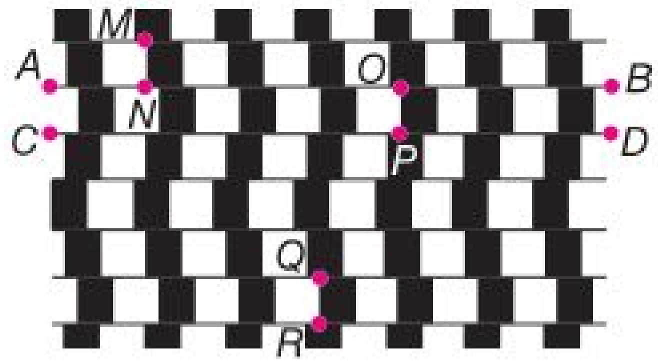
39) $\overline{AB}$ و $\overline{CG}$

40) $\overline{DH}$ و $\overline{HG}$

41) $\overline{DH}$ و $\overline{BF}$

42) $\overline{EF}$ و $\overline{BC}$

43) $\overline{CD}$ و $\overline{AD}$



44) **خداع بصري:** صُمِّم نموذج الخداع البصري المجاور باستعمال مربعات متطابقة ومستقيمات فقط.

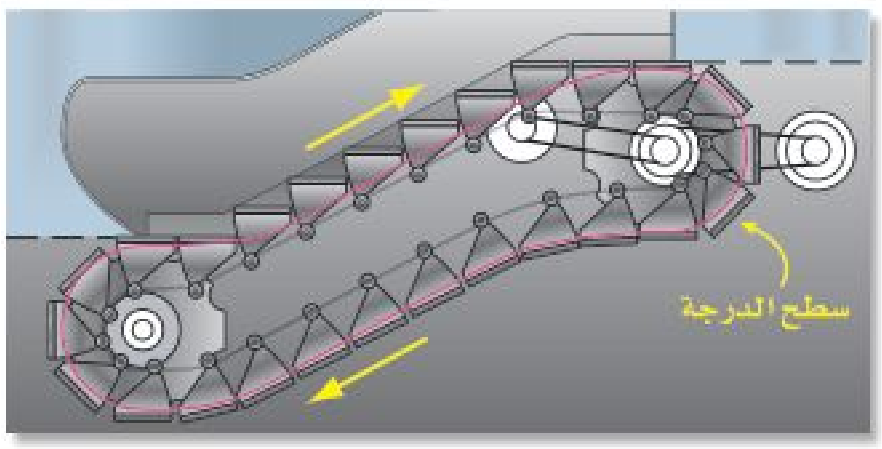
a) ما العلاقة بين $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$؟ فسِّر تبريرك.

b) ما العلاقة بين $\overline{MN}$ و $\overline{QR}$؟ وما العلاقة بين القطعتين المستقيمتين $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ والقطعة المستقيمة $\overline{OP}$؟

الربط مع الحياة

السلالم الكهربائية أكثر فعالية من المصاعد في الارتفاعات القصيرة، وذلك بسبب قدرتها الاستيعابية الكبيرة، إذ يمكن لبعض السلالم الكهربائية نقل 6000 شخص خلال ساعة واحدة.

45) **سلّم كهربائي:** يتكون السلّم الكهربائي من درجات مثبتة على مسار متصل بمحرّك، حيث تُطوى درجات أعلى السلم وأسفله؛ ليتكون سطح مستوٍ عند الدخول والخروج كما في الشكل التالي.



a) ما العلاقة بين أسطح الدرجات الصاعدة؟

b) ما العلاقة بين أسطح الدرجات الثلاث أعلى السلم؟

c) ما العلاقة بين أسطح الدرجات الصاعدة وأسطح الدرجات الهابطة في مسار السلم؟

مسائل مهارات التفكير العليا

46) **مسألة مفتوحة:** يحوي المستوى $\mathcal{P}$ المستقيمين المتوازيين a, b. ويقطع المستقيم c المستوى $\mathcal{P}$ عند النقطة J. إذا كان المستقيمان a, c متخالفين، والمستقيمان b, c غير متخالفين، فارسم شكلًا يمثل هذا الوصف.

47) **تحدٍ:** افترض أن النقاط A, B, C تقع في المستوى $\mathcal{P}$، وأن النقاط D, E, F تقع في المستوى Q. وأن المستقيم m يحوي النقطتين D, F ولا يقطع المستوى $\mathcal{P}$. وأن المستقيم n يحوي النقطتين A, E.

a) ارسم شكلًا يمثل هذا الوصف.

b) ما العلاقة بين المستويين $\mathcal{P}$ و Q؟

c) ما العلاقة بين المستقيمين m و n؟

تبرير: المستويان $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ متوازيان، والمستوى $\mathcal{Z}$ يقطع المستوى $\mathcal{X}$. والمستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ يقع في المستوى $\mathcal{X}$، والمستقيم $\overleftrightarrow{CD}$ يقع في المستوى $\mathcal{Y}$، والمستقيم $\overleftrightarrow{EF}$ يقع في المستوى $\mathcal{Z}$. حدّد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. وضح إجابتك:

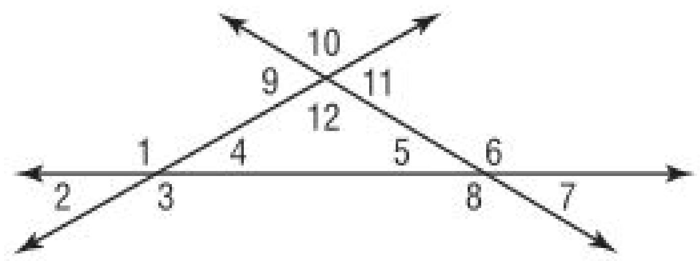
48) $\overleftrightarrow{AB}$ يخالف $\overleftrightarrow{CD}$.

49) $\overleftrightarrow{AB}$ يقطع $\overleftrightarrow{EF}$.

50) **اكتب:** وضّح لماذا لا يكون المستويان متخالفين أبدًا.

تدريب على اختبار

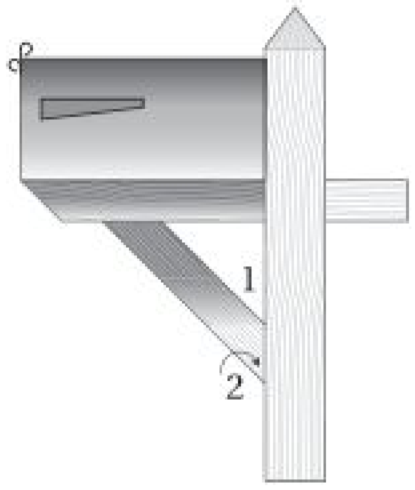
51) أي مما يأتي يمثل زاويتين متبادلتين خارجيًا؟



A $\angle 1$ و $\angle 5$ **C** $\angle 2$ و $\angle 10$

B $\angle 2$ و $\angle 6$ **D** $\angle 5$ و $\angle 9$

52) يمثل الشكل المجاور صندوق بريد.
أيٌّ مما يأتي يصف $\angle 1$ و $\angle 2$؟



A زاويتان متبادلتان خارجيًّا

B زاويتان متبادلتان داخليًّا

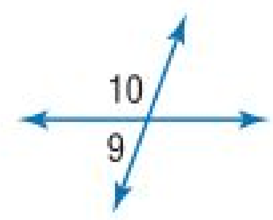
C زاويتان متحالفتان

D زاويتان متناظرتان

مراجعة تراكمية

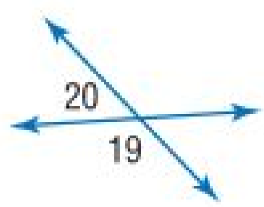
أوجد قياسات الزوايا المرقمة في كلٍّ مما يأتي: (الدرس 1-8)

53) $m\angle 9 = (2x - 4)^\circ$, $m\angle 10 = (2x + 4)^\circ$



54) $m\angle 11 = (4x)^\circ$, $m\angle 12 = (2x - 6)^\circ$

55) $m\angle 19 = (100 + 20x)^\circ$, $m\angle 20 = (20x)^\circ$

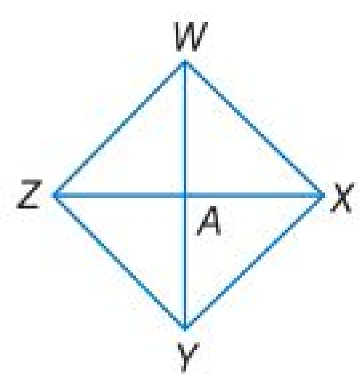


56) **برهان:** أكمل البرهان الآتي: (الدرس 1-7)

المعطيات: $\overline{WY} \cong \overline{ZX}$

A نقطة منتصف $\overline{WY}$ و $\overline{ZX}$.

المطلوب: $\overline{WA} \cong \overline{ZA}$

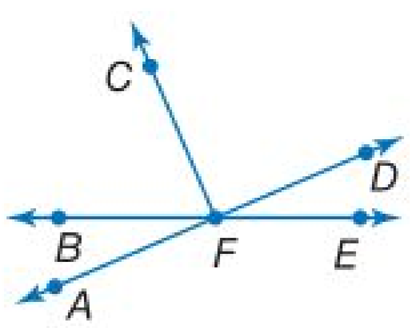


57) استعمل قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي؛ لتحصل على نتيجة صائبة إن أمكن من العبارتين الآتيتين، واذكر القانون الذي استعملته، وإذا تعذَّر الحصول على نتيجة صائبة، فاكتب "لا نتيجة صائبة". (الدرس 1-4)

A إذا كانت الزاويتان متقابلتين بالرأس، فإنهما ليستا متجاورتين على مستقيم.

B إذا تجاورت زاويتان على مستقيم، فإنهما غير متطابقتين.

جبر: في الشكل المجاور: $\overline{FC} \perp \overline{AD}$. (مهارة سابقة)



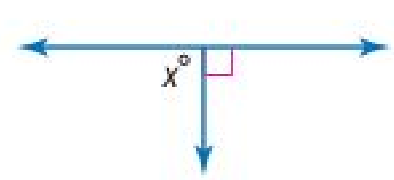
58) إذا كان $m\angle CFD = (12a + 45)^\circ$، فأوجد قيمة a .

59) إذا كان $m\angle AFB = (8x - 6)^\circ$ و $m\angle BFC = (14x + 8)^\circ$، فأوجد قيمة x .

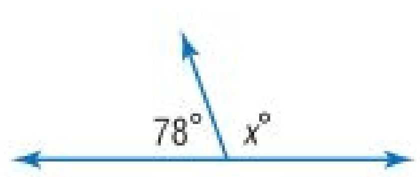
استعد للدرس اللاحق

أوجد قيمة x في كل مما يأتي:

60)



61)



62)

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

استكشاف

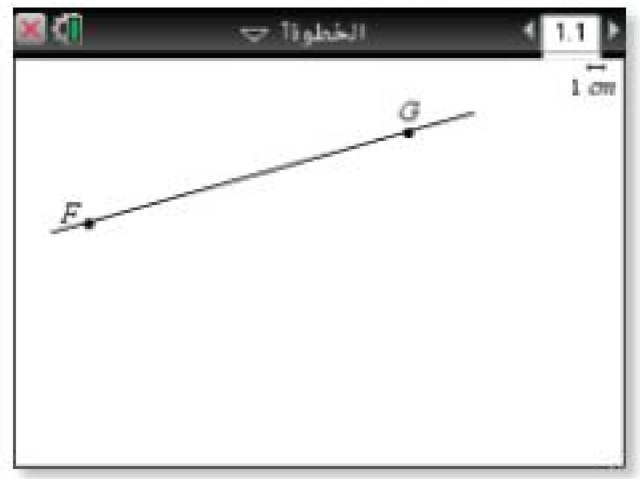
2-2 معمل برمجيات الهندسة: الزوايا والمستقيمات المتوازية Angles and Parallel Lines

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI – nspire؛ لتستكشف قياسات الزوايا الناتجة عن مستقيمين متوازيين وقاطع لهما.

نشاط المستقيمان المتوازيان والقاطع

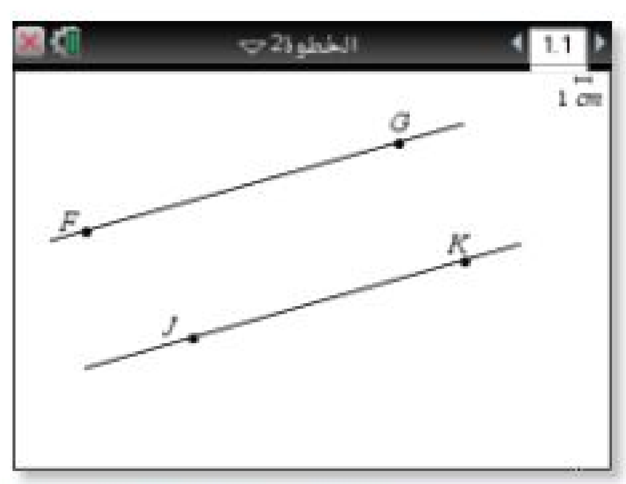
الخطوة 1: ارسم مستقيمًا

- ارسم مستقيمًا وسمِّ النقطتين F, G عليه، بالضغط على المفاتيح menu on ثم اختر 4: النقاط والمستقيمات واختر منها 2: التسمية ثم ارسمه، ثم اختر نقطة عليه بالضغط على menu ومنها اختر 2: نقطة على المستقيم.
- سمِّ كل من النقطتين بالضغط على النقطة، ثم على ctrl menu واختيار 2: التسمية وتسمية النقطتين بالحرفين FG



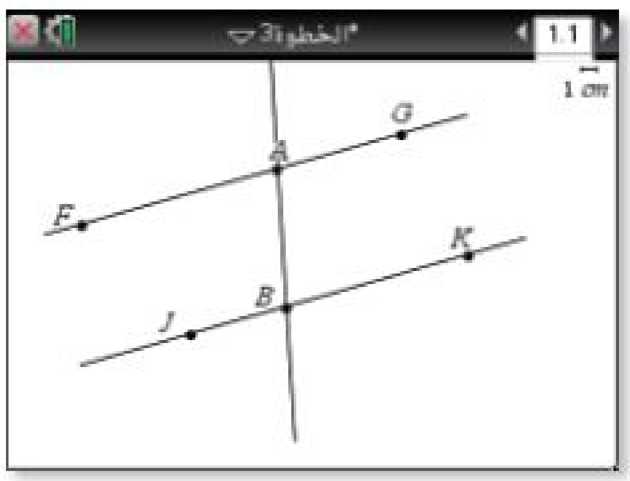
الخطوة 2: ارسم مستقيمًا موازيًا

- حدِّد نقطةً لا تقع على $\overleftrightarrow{FG}$ وسمِّها J بالضغط على menu، ثم 4: النقاط والمستقيمات واختر منها 1: نقطة في المستوى، وحدد النقطة وسمِّها بالضغط على النقطة ثم على ctrl menu واختيار 2: التسمية وتسمية النقطة بالحرف J
- ارسم مستقيما يمرُّ في J ويوازي FG بالضغط على menu واختيار 7: الإنشاء الهندسي، واختر منها 2: مستقيم موازي ثم الضغط على النقطة J والمستقيم FG، فينتج مستقيم موازٍ.
- اختر نقطةً عليه بالضغط على menu، ومنها اختر 2: نقطة على المستقيم ثم اضغط على المستقيم وحدِّد النقطة وسمِّها بالضغط على المفاتيح ctrl menu واختر منها 2: التسمية وسمِّها K



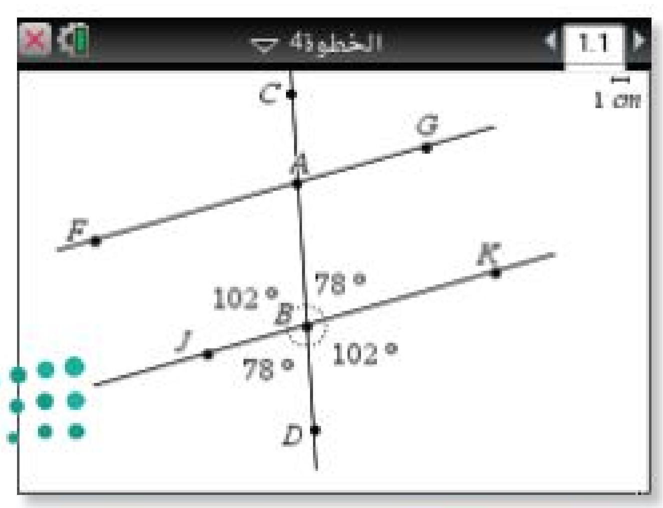
الخطوة 3: ارسم قاطعًا

- ارسم النقطة A على $\overleftrightarrow{FG}$، والنقطة B على $\overleftrightarrow{JK}$، وذلك بالضغط على menu واختر 4: النقاط والمستقيما، ثم حدِّد كلًّا من النقطتين وتسميتهما بالضغط على ctrl menu ثم اختيار 2: التسمية، وسمِّ كلًّا منهما.
- صِلْ بين النقطتين A, B لرسم القاطع $\overleftrightarrow{AB}$، بالضغط على menu واختر منها 4: النقاط والمستقيمات، واختر منها 4: مستقيم ثم اضغط على النقطتين A, B



الخطوة 4: قِسْ كل زاوية

- ارسم نقطتين على AB وسمِّهما C, D بالضغط على menu، واختر 2: نقطة على المستقيم ثم اضغط على المستقيم AB وحدِّد مكان النقطتين كما في الشكل أدناه.
- سمِّ كلًّا منها بالضغط على ctrl menu، ثم اختر 2: التسمية وسمّهما بـ C, D
- لقياس الزوايا الثماني الناتجة عن المستقيمات الثلاثة، اضغط menu واختر منها 6: القياس، ثم اختر الزاوية واضغط على النقاط الثلاث J ثم B ثم D، سيظهر $m\angle JBD$ وليكن $78°$
- كرِّر ذلك مع باقي الزوايا لإيجاد قياساتها.



وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

حلّل النتائج:

1) سجّلِ القياسات من **الخطوة** 4 في جدول يشبه الجدول المجاور. أي الزوايا لها القياس نفسه؟

الزوايا	$\angle FAC$	$\angle CAG$	$\angle GAB$	$\angle FAB$	$\angle JBA$	$\angle ABK$	$\angle KBD$	$\angle JBD$
القياس الأول								

2) اسحب النقطة C أو D لتحرك القاطع $\overleftrightarrow{AB}$ ، بحيث يقطع المستقيمين المتوازيين بزاوية مختلفة.
أضفْ صفًّا بعنوان القياس الثاني إلى جدولك، ثم سجّل القياسات الجديدة.
كرّر هذه الخطوات، بإضافة صفوف أخرى عناوينها: القياس الثالث، القياس الرابع ، ...

3) باستعمال الزوايا المدوَّنة في الجدول، عيّن أزواج الزوايا التي لها الأسماء الخاصة الآتية، وصِفِ العلاقة بين قياساتها، ثم اكتب تخمينًا على صورة (إذا... فإن...) حول قياس كل زوج من الزوايا الناتجة عن مستقيمين متوازيين وقاطع لهما.

a) متناظرتان **b)** متبادلتان داخليًّا **c)** متبادلتان خارجيًّا **d)** متحالفتان

4) اسحب النقطة C أو D، بحيث يكون قياس أيٍّ من الزوايا $90°$.

a) ماذا تلاحظ حول قياسات الزوايا الأخرى؟

b) كوّن تخمينًا حول القاطع الذي يكون عموديًّا على أحد المستقيمين المتوازيين.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

2-2 الزوايا والمستقيمات المتوازية
Angles and Parallel Lines

فيما سبق:

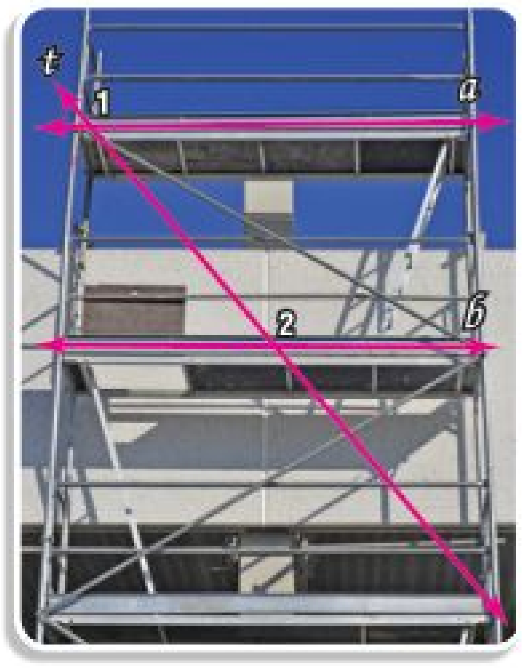
درستُ تسمية أزواج الزوايا الناتجة عن مستقيمين وقاطع لهما.

(الدرس 1-2)

والآن:

- أستعمل نظريات المستقيمين المتوازيين لتحديد العلاقات بين أزواج محددة من الزوايا.
- أستعمل الجبر لأجد قياسات الزوايا.

لماذا؟



تستعمل طريقة السقالات كثيرًا في أعمال البناء، وتتكون من أذرع معدنية موصولة بطريقة هندسية توفر مساحات عمل أفقية عند ارتفاعات مختلفة وبطريقة آمنة. فالقاطع t المبين في الصورة يوفر دعامة لمساحتَي العمل المتوازيتين.

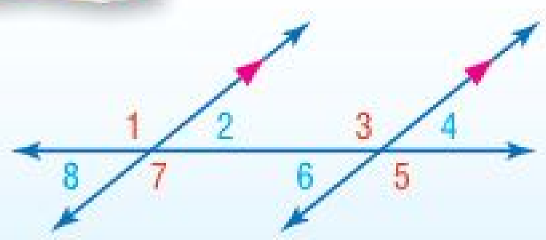
المستقيمان المتوازيان وأزواج الزوايا: في الصورة المجاورة: المستقيم t قاطع للمستقيمين a, b؛ إذن $\angle 1$ و $\angle 2$ متناظرتان.
وبما أن a, b متوازيان؛ لذا فإن هناك علاقة خاصة بين $\angle 1$ و $\angle 2$.

مسلمة 2.1 مسلّمة الزاويتين المتناظرتين

أضف إلى مطويتك

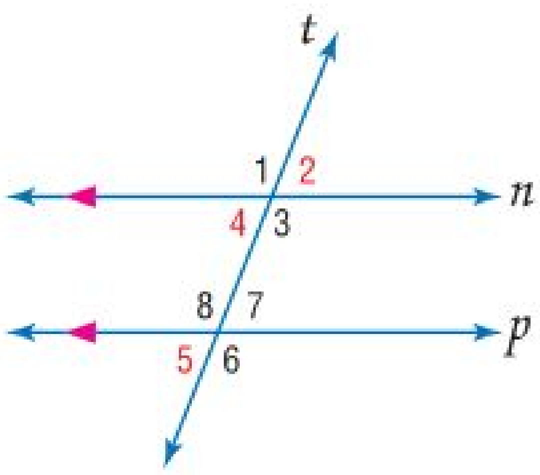
إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين، فإن كل زاويتين متناظرتين متطابقتان.

أمثلة: $\angle 1 \cong \angle 3,\ \angle 2 \cong \angle 4,\ \angle 5 \cong \angle 7,\ \angle 6 \cong \angle 8$



مثال 1 استعمال مسلّمة الزاويتين المتناظرتين

في الشكل المجاور: $m\angle 5 = 72^\circ$. أوجد قياس كلٍّ من الزاويتين الآتيتين، واذكر المسلّمات أو النظريات التي استعملتها.



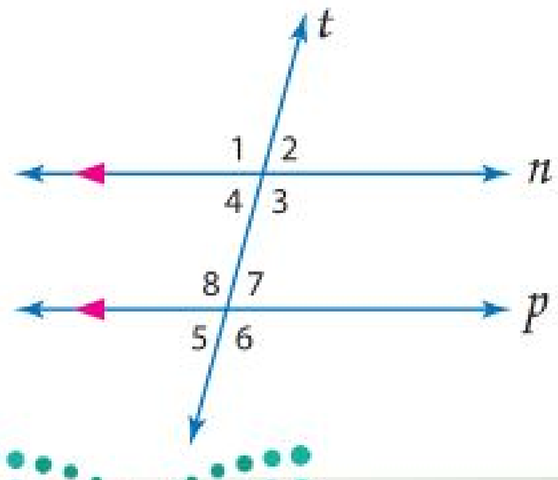
a) $\angle 4$

$\angle 4 \cong \angle 5$	مسلّمة الزاويتين المتناظرتين
$m\angle 4 = m\angle 5$	تعريف تطابق الزوايا
$m\angle 4 = 72^\circ$	بالتعويض

b) $\angle 2$

$\angle 2 \cong \angle 4$	نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس
$\angle 4 \cong \angle 5$	مسلّمة الزاويتين المتناظرتين
$\angle 2 \cong \angle 5$	خاصية التعدي للتطابق
$m\angle 2 = m\angle 5$	تعريف تطابق الزوايا
$m\angle 2 = 72^\circ$	بالتعويض

تحقق من فهمك



في الشكل المجاور: $m\angle 8 = 105^\circ$. أوجد قياس كلٍّ من الزوايا الآتية، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها.

1A) $\angle 1$ **1B)** $\angle 2$ **1C)** $\angle 3$

في **المثال 1** ، الزاويتان المتبادلتان خارجيًّا 5 ,2 متطابقتان ، ويقود هذا **المثال** إلى النظريات الآتية حول العلاقة بين أزواج أخرى من الزوايا الناتجة عن مستقيمين متوازيين وقاطع لهما.

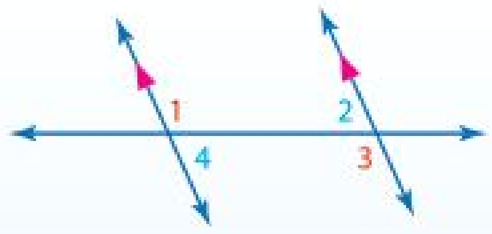
نظريات

أضف إلى مطويتك

المستقيمان المتوازيان وأزواج الزوايا

2.1 نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا: **إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين، فإن كل زاويتين متبادلتين داخليًا متطابقتان.**

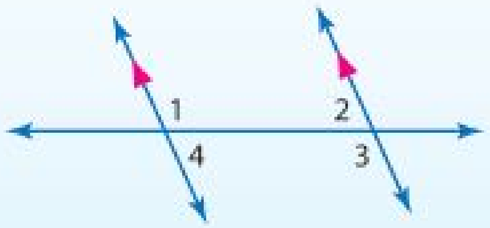
أمثلة: $\angle 3 \cong \angle 1$ و $\angle 4 \cong \angle 2$



2.2 نظرية الزاويتين المتحالفتين: **إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين، فإن كل زاويتين متحالفتين متكاملتان.**

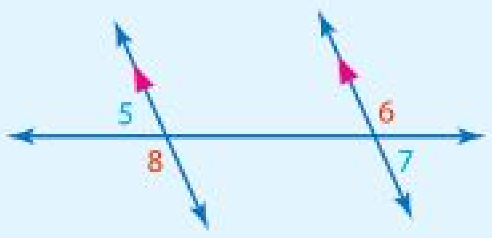
أمثلة: $\angle 1$ و $\angle 2$ متكاملتان.

$\angle 3$ و $\angle 4$ متكاملتان.



2.3 نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًا: **إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين، فإن كل زاويتين متبادلتين خارجيًا متطابقتان.**

أمثلة: $\angle 7 \cong \angle 5$ و $\angle 8 \cong \angle 6$



ستبرهن النظريتين 2.2 و 2.3 في السؤالين 28 و 33 على الترتيب

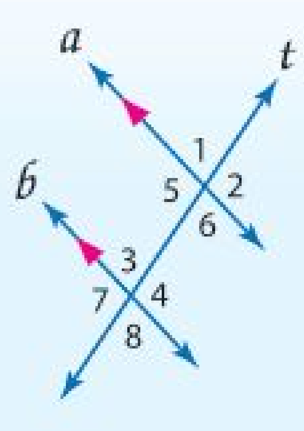
بما أن المسلّمات تُقبل دون برهان ، فيمكنك استعمال مسلّمة الزاويتين المتناظرتين لإثبات كلٍّ من النظريات السابقة.

برهان: نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا

المعطيات: $a \parallel b$

t قاطع للمستقيمين a ، b.

المطلوب: $\angle 4 \cong \angle 5$ ، $\angle 3 \cong \angle 6$



برهان حر:

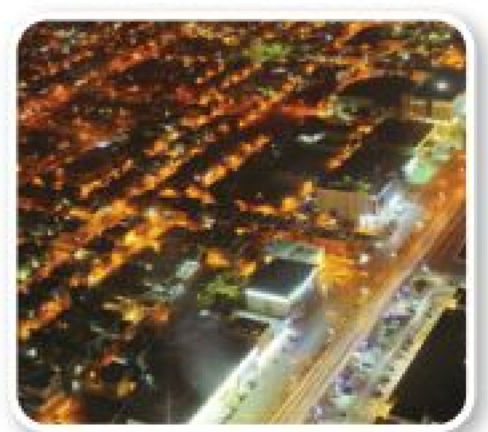
لدينا من المعطيات $a \parallel b$ ، والمستقيم t قاطع لهما. ومن مسلّمة الزاويتين المتناظرتين $\angle 2 \cong \angle 4$ و $\angle 6 \cong \angle 8$. وكذلك $\angle 5 \cong \angle 2$ و $\angle 8 \cong \angle 3$ ؛ لأن الزاويتين المتقابلتين بالرأس متطابقتان؛ لذا فإن $\angle 4 \cong \angle 5$ و $\angle 6 \cong \angle 3$ بحسب خاصية التعدي للتطابق.

مثال 2 من واقع الحياة: استعمال نظريات المستقيمين المتوازيين وأزواج الزوايا

تخطيط المدن: شارع A وشارع B متوازيان ويقطعهما شارع C.

فإذا كان $m\angle 1 = 118°$، فأوجد $m\angle 2$، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها.

$\angle 2 \cong \angle 1$	نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا
$m\angle 2 = m\angle 1$	تعريف تطابق الزوايا
$m\angle 2 = 118°$	بالتعويض



الربط مع الحياة

عند تخطيط الأحياء الجديدة في بعض المدن، يُشترط ألا يقل قياس زوايا تقاطعات شوارعها عن $60°$.

✓ تحقق من فهمك

تخطيط المدن: استعمل الشكل أعلاه للإجابة عن السؤالين الآتيين، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها :

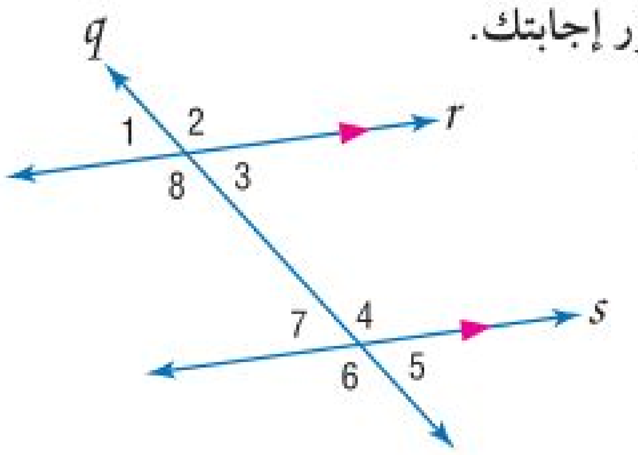
2A) إذا كان $m\angle 1 = 100°$، فأوجد $m\angle 4$.

2B) إذا كان $m\angle 3 = 70°$، فأوجد $m\angle 4$.

الجبر وقياسات الزوايا: يمكنك استعمال العلاقات الخاصة بين الزوايا الناتجة عن مستقيمين متوازيين وقاطع لهما لإيجاد القيم المجهولة.

مثال 3 إيجاد قيم المتغيرات

جبر: استعمل الشكل المجاور لإيجاد المتغير في كلٍّ مما يأتي. برّر إجابتك.



a) إذا كان $m\angle 1 = 85^\circ$, $m\angle 4 = (2x - 17)^\circ$، فأوجد قيمة x.

$\angle 3 \cong \angle 1$	نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس
$m\angle 3 = m\angle 1$	تعريف تطابق الزوايا
$m\angle 3 = 85^\circ$	عوّض

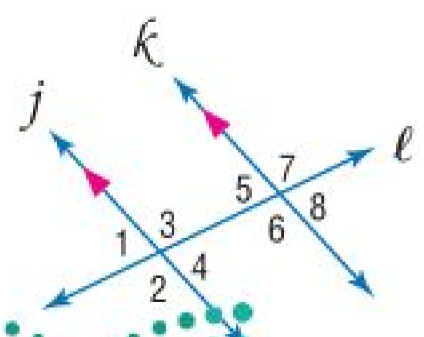
بما أن المستقيمين r, s متوازيان، فإن الزاويتين $\angle 3$, $\angle 4$ متكاملتان بحسب نظرية الزاويتين المتحالفتين.

$m\angle 3 + m\angle 4 = 180$	تعريف الزاويتين المتكاملتين
$85 + 2x - 17 = 180$	عوّض
$2x + 68 = 180$	بسّط
$2x = 112$	اطرح 68 من كلا الطرفين
$x = 56$	اقسم كلا الطرفين على 2

b) إذا كان $m\angle 3 = (4y + 30)^\circ$, $m\angle 7 = (7y + 6)^\circ$، فأوجد قيمة y .

$\angle 3 \cong \angle 7$	نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا
$m\angle 3 = m\angle 7$	تعريف تطابق الزوايا
$4y + 30 = 7y + 6$	عوّض
$30 = 3y + 6$	اطرح $4y$ من كلا الطرفين
$24 = 3y$	اطرح 6 من كلا الطرفين
$8 = y$	اقسم كلا الطرفين على 3

✓ تحقق من فهمك



3A) إذا كان $m\angle 2 = (4x + 7)^\circ$, $m\angle 7 = (5x - 13)^\circ$، فأوجد قيمة x.

3B) إذا كان $m\angle 5 = 68^\circ$, $m\angle 3 = (3y - 2)^\circ$، فأوجد قيمة y.

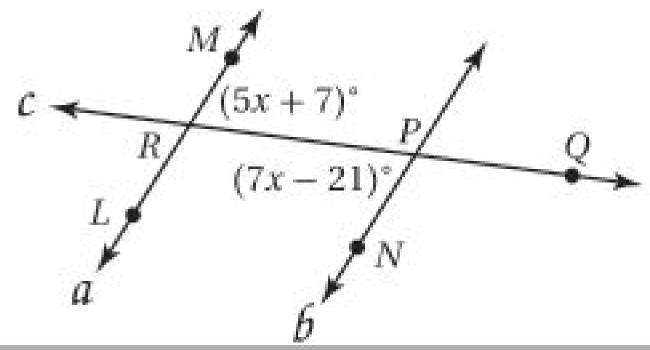
إرشادات للدراسة

تطبيق المسلّمات والنظريات

طبّق مسلّمات ونظريات هذا الدرس على المستقيمات المتوازية التي يقطعها قاطع فقط؛ لذا لا تفترض توازي مستقيمين إلا إذا ورد ذلك في النص، أو وُجدت أسهمٌ على المستقيمات تُشير إلى توازيها.

مثال 4 من الاختبار

مسألة مفتوحة: إذا كان $a \parallel b$
فأوجد $m\angle MRQ$. وبيّن خطوات الحل.



اقرأ سؤال الاختبار

تعلم من الشكل أن $m\angle MRQ = (5x+7)^\circ,\ m\angle RPN = (7x-21)^\circ$، والمطلوب أن تجد $m\angle MRQ$.

حُلَّ سؤال الاختبار

$\angle MRQ, \angle RPN$ متبادلتان داخليًا. وبما أن المستقيمين a ، b متوازيان، إذن يجب أن تكون الزاويتان المتبادلتان داخليًا متطابقتين؛ لذا $\angle MRQ \cong \angle RPN$. وبحسب تعريف التطابق يكون $m\angle MRQ = m\angle RPN$. عوِّض بقياسات الزوايا المُعطاة في هذه المعادلة وحلها لإيجاد قيمة x.

$m\angle MRQ = m\angle RPN$	زاويتان متبادلتان داخليًا
$5x + 7 = 7x - 21$	عوّض
$7 = 2x - 21$	اطرح $5x$ من كلا الطرفين
$28 = 2x$	اجمع 21 إلى كلا الطرفين
$14 = x$	اقسم كلا الطرفين على 2

الآن، استعمل قيمة x لإيجاد $m\angle MRQ$.

$m\angle MRQ = (5x + 7)^\circ$	عوّض
$= (5(14) + 7)^\circ$	$x = 14$
$= 77^\circ$	بسّط

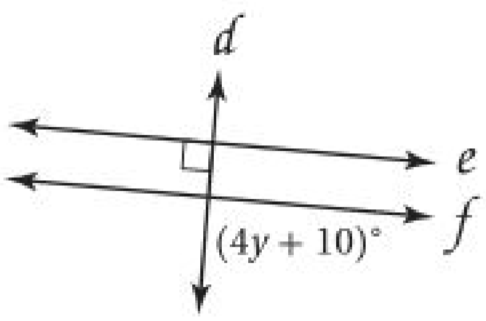
تحقق: تحقق من إجابتك باستعمال قيمة x لتجد $m\angle RPN$.

$$m\angle RPN = (7x - 21)^\circ$$
$$= (7(14) - 21)^\circ$$
$$= 77^\circ \checkmark$$

بما أن $a \parallel b$ فإن $m\angle MRQ = m\angle RPN$، فإن $\angle MRQ \cong \angle RPN$ ، و $a \parallel b$. ✓

✓ تحقق من فهمك

4) إذا كان $e \parallel f$ ، فأوجد قيمة y مبينًا خطوات الحل.



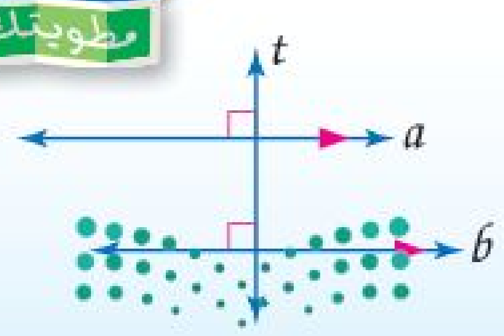
تنتج علاقة خاصة عندما يكون القاطع لمستقيمين متوازيين عموديًا عليهما.

نظرية 2.4 نظرية القاطع العمودي

أضف إلى مطويتك

إذا كان مستقيم عموديًا على أحد مستقيمين متوازيين في مستوى ، فإنه يكون عموديًا على المستقيم الآخر.

مثال: إذا كان $a \parallel b$ ، و $t \perp a$ ، فإن $t \perp b$.



ستبرهن النظرية 2.4 في السؤال 34

إرشادات للاختبار

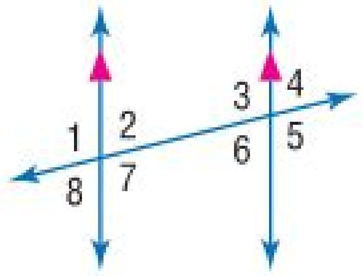
تحديد المطلوب
أعد قراءة سؤال الاختبار بدقة لتحدد المطلوب. ففي المثال 4: يقع بعض الطلاب في خطأ شائع هو التوقف بعد إيجاد قيمة x، والقول إن إجابة هذا السؤال هي 14.

قراءة الرياضيات

العمودي تذكّر أن الرمز $t \perp b$ يقرأ على النحو الآتي: المستقيم b عمودي على المستقيم t.

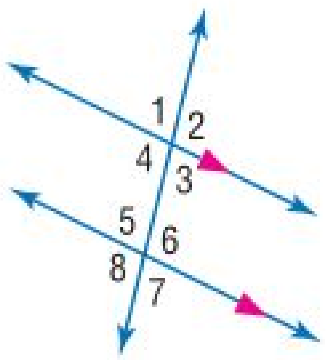
تأكـد

المثال 1 في الشكل المجاور: $m\angle 1 = 94°$. أوجد قياس كلٍّ من الزوايا الآتية، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها:



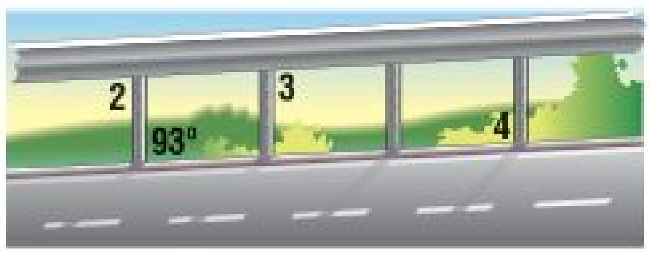
1) $\angle 3$ **2)** $\angle 5$ **3)** $\angle 4$

المثال 2 في الشكل المجاور: $m\angle 4 = 101°$. أوجد قياس كلٍّ من الزوايا الآتية، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها:



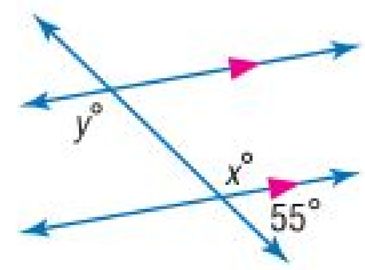
4) $\angle 6$ **5)** $\angle 7$ **6)** $\angle 5$

7) **طرق:** حاجز الحماية في الشكل المجاور يوازي سطح الطريق، والدعامات الرأسية يوازي بعضها بعضًا. أوجد قياسات الزوايا 4 ,3 ,2 .

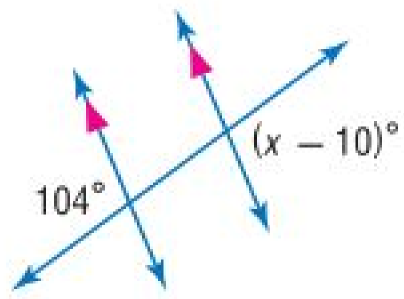


المثال 3 أوجد قيمة كل متغير في الأشكال الآتية. برّر إجابتك:

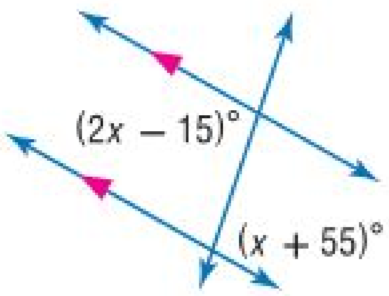
8)



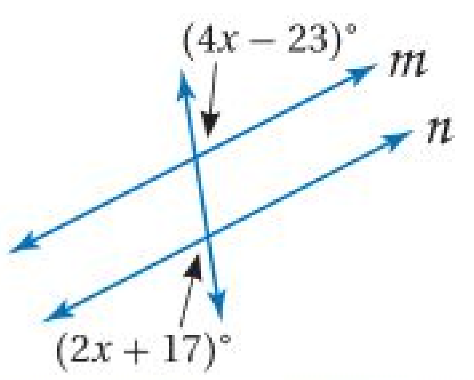
9)



10)

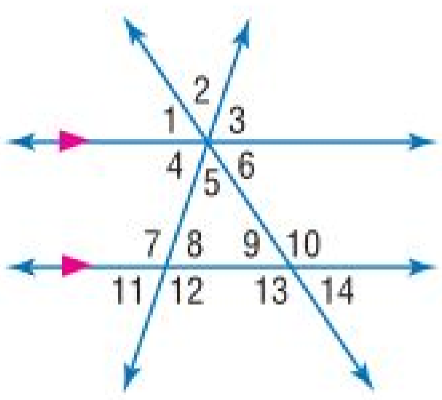


المثال 4 **11)** **إجابة قصيرة:** إذا كان $m \parallel n$، فأوجد قيمة x . بيِّن خطوات حلك.



تدرب وحل المسائل

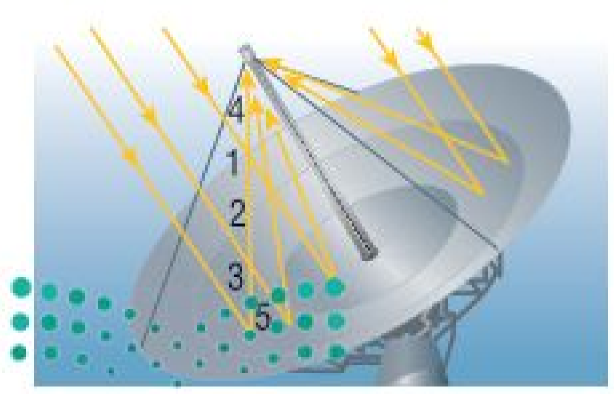
المثالان 1, 2 في الشكل المجاور: $m\angle 11 = 22°$ ، و $m\angle 14 = 18°$ ، أوجد قياس كلٍّ من الزوايا الآتية، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها :



12) $\angle 4$ **13)** $\angle 3$ **14)** $\angle 2$

15) $\angle 10$ **16)** $\angle 5$ **17)** $\angle 1$

طاقة شمسية: يجمع الطبق الشمسي الطاقة بتوجيه أشعة الشمس نحو مُستقبِل يقع في بؤرة الطبق. مفترضًا أن أشعة الشمس متوازية، حدّد العلاقة بين أزواج الزوايا الآتية. برّر إجابتك:

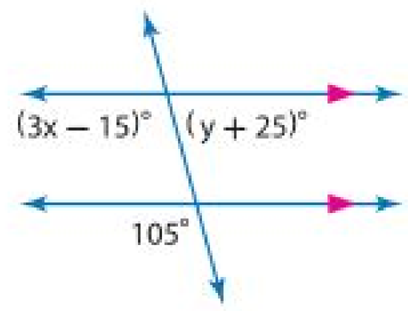


18) $\angle 1$ و $\angle 2$ **19)** $\angle 1$ و $\angle 3$

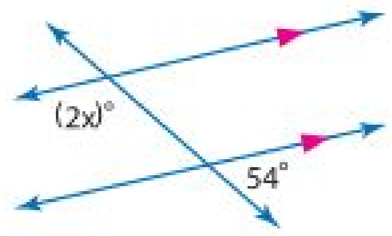
20) $\angle 4$ و $\angle 5$ **21)** $\angle 3$ و $\angle 4$

المثال 3 أوجد قيمة كل متغيّر في الأشكال الآتية. برّر إجابتك:

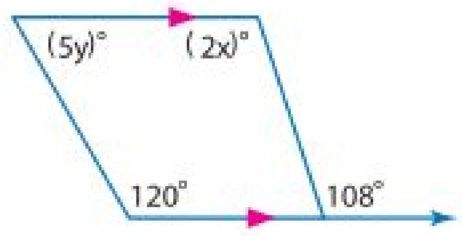
22)



23)



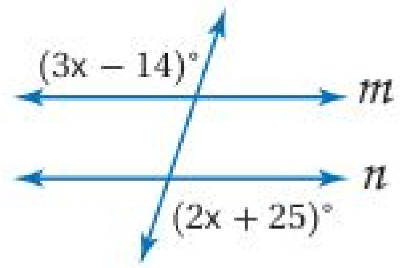
24)



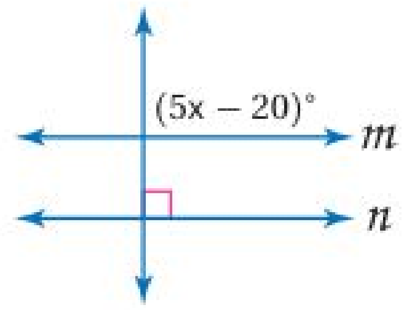
إذا كان $m \parallel n$ ، فأوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي، وحدّد المسلّمة أو النظرية التي استعملتها :

المثال 4

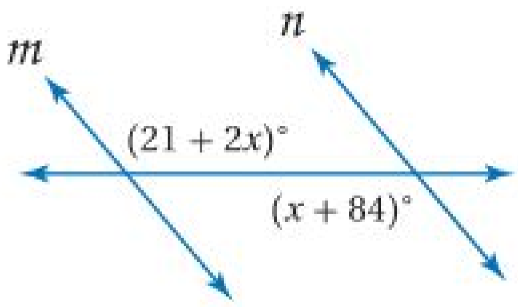
25)



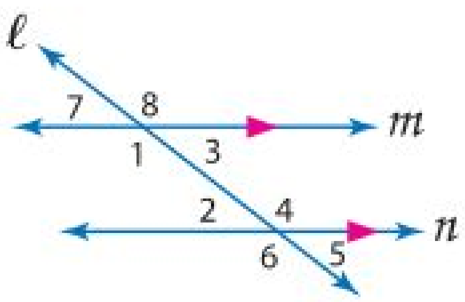
26)



27)



28) **برهان:** أكمل برهان النظرية 2.2 .



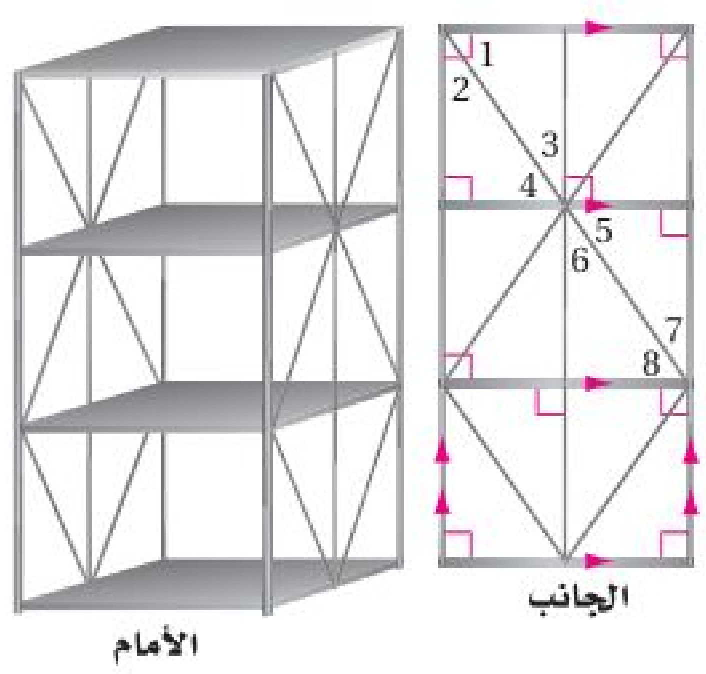
المعطيات: $n \parallel m$ ، ℓ قاطع للمستقيمين m, n.

المطلوب: $\angle 2$, $\angle 1$ متكاملتان، $\angle 4$,$\angle 3$ متكاملتان.

البرهان:

العبارات	المبررات
a) ؟ ____	a) مُعطى
b) $\angle 1, \angle 3$ متجاورتان على مستقيم $\angle 2, \angle 4$ متجاورتان على مستقيم	b) ؟ ____
c) ؟ ____	c) نظرية الزاويتين المتكاملتين.
d) $\angle 1 \cong \angle 4, \angle 2 \cong \angle 3$	d) ؟ ____
e) $m\angle 1 = m\angle 4, m\angle 2 = m\angle 3$	e) تعريف تطابق الزوايا.
f) ؟ ____	f) ؟ ____

تخزين: عند تركيب الرفوف، تُضاف دعامات جانبية متقاطعة. حدّد العلاقة بين كل زوج من الزوايا فيما يأتي. برّر إجابتك:



29) $\angle 1$ و $\angle 8$

30) $\angle 1$ و $\angle 5$

31) $\angle 3$ و $\angle 6$

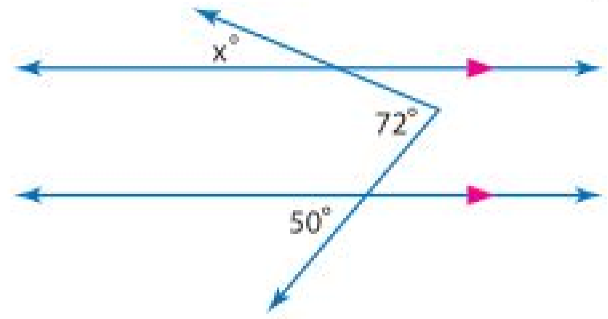
32) $\angle 1$ و $\angle 2$

33) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين لنظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًّا. (نظرية 2.3).

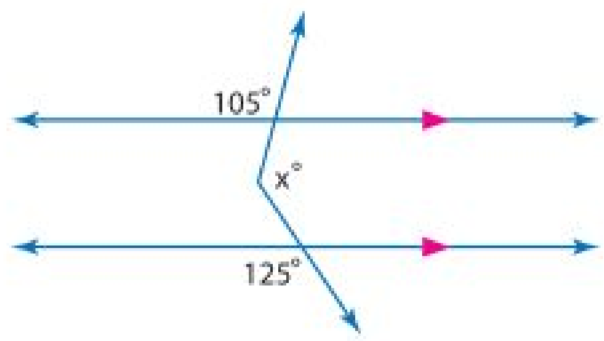
34) **برهان:** أثبت أنه إذا كان مستقيم عموديًّا على أحد مستقيمين متوازيين في مستوًى، فإنه يكون عموديًّا على الآخر. (نظرية 2.4).

أوجد قيمة x في كلٍّ من الشكلين الآتيين: (إرشاد: ارسم مستقيمًا مساعدًا)

35)



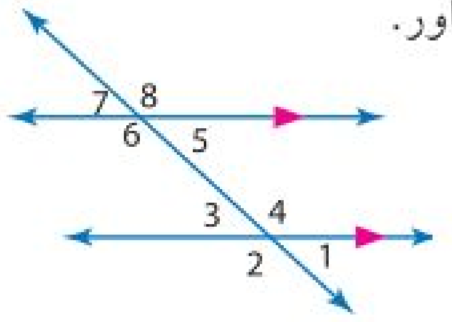
36)



مراجعة المفردات

الاحتمال
تذكر أن الاحتمال هو نسبة عدد نواتج الحادثة إلى العدد الكلي للنواتج.

37) **احتمالات:** افترض أنك اخترت عشوائيًّا زوجًا من الزوايا في الشكل المجاور.



a) ما عدد الطرق الممكنة لاختيار زوج الزوايا؟ برّر إجابتك.

b) صِف العلاقات الممكنة بين زاويتي كل زوج. برّر إجابتك.

c) أوجد احتمال اختيار زوج من الزوايا المتطابقة. برّر إجابتك.

38) **تمثيلات متعددة:** ستبحث في هذه المسألة العلاقة بين الزوايا الخارجية الواقعة في الجهة نفسها.

a) **هندسيًّا:** ارسم خمسة أزواج من المستقيمات المتوازية m و n ، a و b ، r و s ، j و k ، x و y يقطع كلًّا منها قاطع t، ثم قِسْ جميع الزوايا الناتجة. (يمكنك استخدام الآلة البيانية في هذا التمرين)

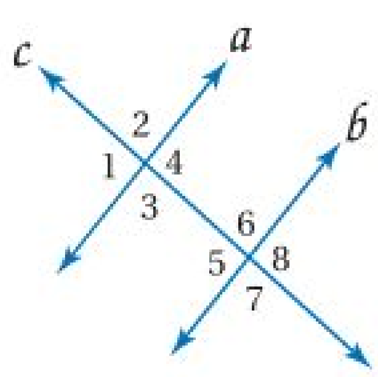
b) **جدوليًّا:** دوِّن بياناتك في جدول.

c) **لفظيًّا:** ضع تخمينًا حول العلاقة بين الزاويتين الخارجيتين الواقعتين في جهة واحدة من القاطع.

d) **منطقيًّا:** ما نوع التبرير الذي استعملته لوضع تخمينك؟ برّر إجابتك .

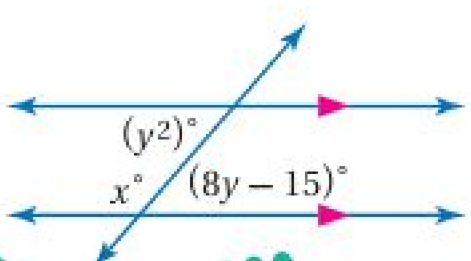
e) **برهان:** برهن تخمينك.

مسائل مهارات التفكير العليا



39) **اكتب:** إذا كان المستقيم a يوازي المستقيم b، و $\angle 2 \cong \angle 1$.
فصِف العلاقة بين المستقيمين b و c. وبرّر إجابتك.

40) **اكتب:** حدِّد أوجه الشبه والاختلاف بين نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا، ونظرية الزاويتين المتحالفتين.

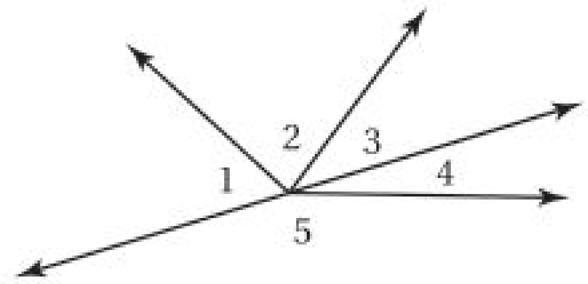


41) **تحدٍ:** أوجد جميع قيم x, y في الشكل المجاور.

42) **تبرير:** ما أقل عدد من قياسات الزوايا التي يجب معرفتها حتى يكون بمقدورك تحديد قياسات جميع الزوايا الناتجة عن مستقيمين متوازيين يقطعهما قاطع؟ وضّح إجابتك.

تدريب على اختبار

43) افترض أن $\angle 4, \angle 5$ متجاورتان على مستقيم، إذا كان $m\angle 1 = (2x)^\circ, m\angle 2 = (3x-20)^\circ, m\angle 3 = (x-4)^\circ$، فما قيمة $m\angle 3$؟



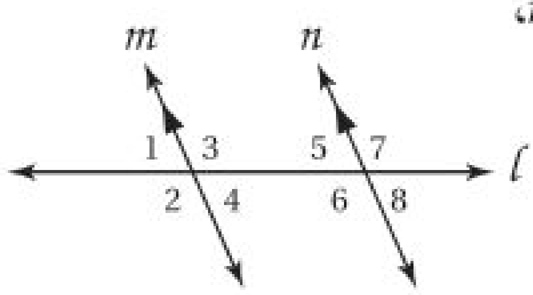
A 26°

B 28°

C 30°

D 32°

44) **إجابة قصيرة:** إذا كان $m \parallel n$، حدِّد أي العبارات الآتية صحيحة، وأيها خاطئة؟ وبرر أجابتك.



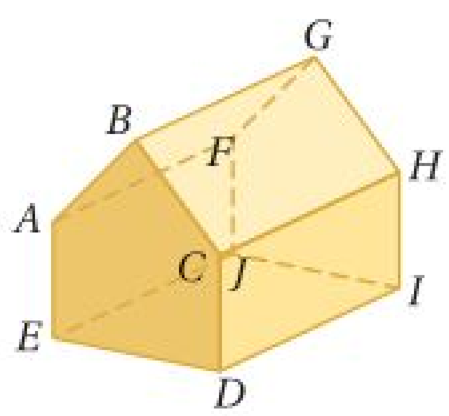
1) $\angle 3, \angle 6$ متبادلتان داخليًّا.

2) $\angle 4, \angle 6$ متحالفتان.

3) $\angle 1, \angle 7$ متبادلتان خارجيًّا.

مراجعة تراكمية

حدّد كلًّا مما يأتي مستعملًا الشكل المجاور: (الدرس 1-2)

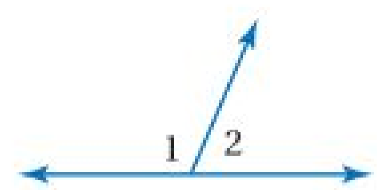


45) جميع القطع المستقيمة التي توازي AB.

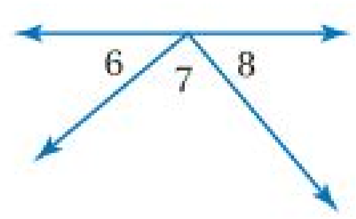
46) جميع القطع المستقيمة التي تخالف CH .

47) جميع المستويات التي توازي AEF.

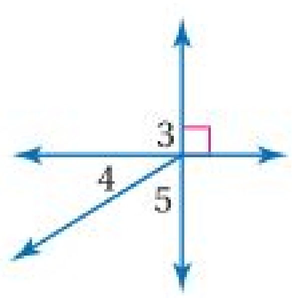
48) إذا كانت $\angle 1, \angle 2$ متجاورتين على مستقيم، و $m\angle 2 = 67^\circ$، فأوجد $m\angle 1$.



49) إذا كانت $\angle 6, \angle 8$ متتامتين، و $m\angle 8 = 47^\circ$ ، فأوجد $m\angle 6, m\angle 7$.



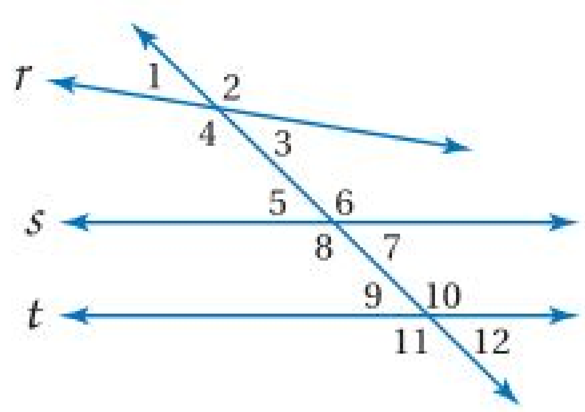
50) إذا كان $m\angle 4 = 32^\circ$ ، فأوجد $m\angle 5, m\angle 3$.



51) **قطارات:** وضع مهندس مخططًا لشبكة سكك حديدية تصل بين المدن A, B, C, D, E, F، فرسم قطعة مستقيمة بين كل مدينتين على الخريطة، ولاحظ أن أي ثلاث مدن منها لا تقع على استقامة واحدة. ما عدد القطع المستقيمة التي رسمها المهندس؟ (الدرس 5-1)

استعد للدرس اللاحق

حدِّد العلاقة بين كل زوج من الزوايا فيما يأتي :



52) $\angle 1, \angle 12$

53) $\angle 7, \angle 10$

54) $\angle 4, \angle 8$

55) $\angle 2, \angle 11$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

2-3 إثبات توازي مستقيمين
Proving Lines Parallel

فيما سبق:

درستُ استعمال خصائص المستقيمات المتوازية لتحديد الزوايا المتطابقة.

(الدرس 2-2)

والآن:

- أميِّز المستقيمات المتوازية بناءً على علاقات بين أزواج من الزوايا الناتجة عن مستقيم قاطع.
- أبرهن توازي مستقيمين باستعمال العلاقات بين أزواج الزوايا.

لماذا؟

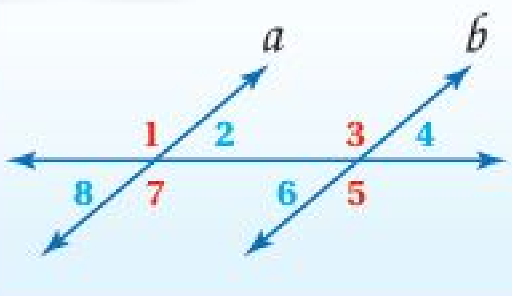
عندما تنظر إلى سكة القطار، تجد أن البعد بين خطَّيها ثابت دائمًا حتى عند المنحنيات والمنعطفات. فقد صُممت السكك بدقة، بحيث يكون خطَّاها متوازيين عند جميع النقاط ليسير عليها القطار بأمان.

تحديد المستقيمين المتوازيين: خطَّا سكة القطار متوازيان، وكذلك جميع الخطوط العرضية في السكة متوازية أيضًا، والزوايا المتكوّنة بين خطَّي السكة والخطوط العرضية للسكة المتوازيةِ متناظرة. درست سابقًا أن الزوايا المتناظرة تكون متطابقة عندما يكون المستقيمان متوازيين. وعكس هذه العلاقة صحيح أيضًا.

مسلمة 2.2 عكس مسلَّمة الزاويتين المتناظرتين

أضف إلى مطويتك

إذا قطع قاطع مستقيمين في مستوى، ونتج عن التقاطع زاويتان متناظرتان متطابقتان، فإن المستقيمين متوازيان.

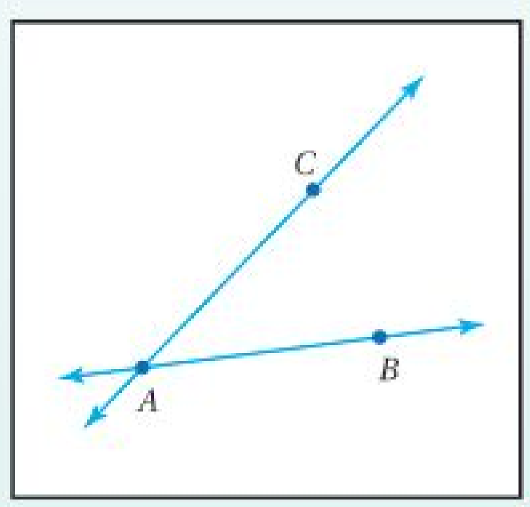


أمثلة: إذا كانت: $\angle 1 \cong \angle 3$ أو $\angle 2 \cong \angle 4$ أو $\angle 5 \cong \angle 7$ أو $\angle 6 \cong \angle 8$، فإن $a \parallel b$.

يمكنك استعمال عكس مسلّمة الزاويتين المتناظرتين لرسم مستقيمين متوازيين.

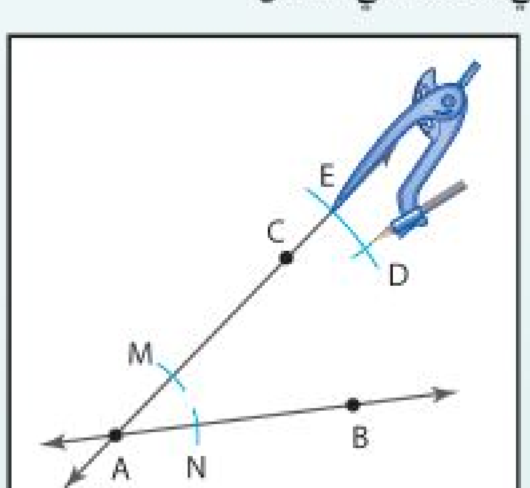
إنشاءات هندسية: رسم مستقيم موازٍ لمستقيم معلوم ويمر بنقطة لا تقع عليه

الخطوة 1: استعمل مسطرة لرسم $\overleftrightarrow{AB}$، وعيِّن نقطة C لا تقع على $\overleftrightarrow{AB}$، وارسم $\overleftrightarrow{CA}$.

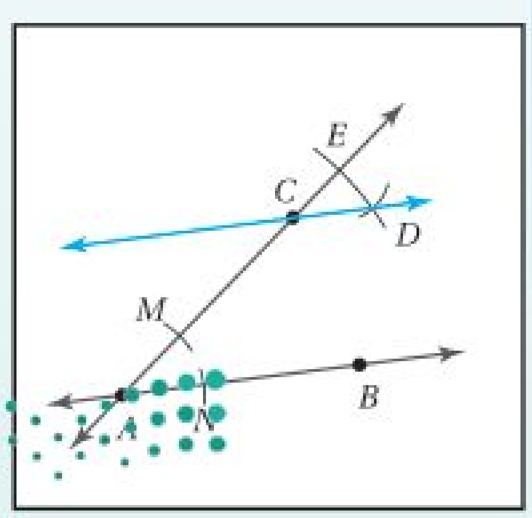


الخطوة 2: استعمل فرجارًا لنقل $\angle CAB$، بحيث تكون النقطة C رأس الزاوية الجديدة، وذلك من خلال الخطوات الآتية:

- ضع رأس الفرجار عند النقطة A ، وارسم قوسين يقطعان $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AB}$ في النقطتين M, N.
- بفتحة الفرجار نفسها، ارسم قوسًا مركزه C يقطع $\overleftrightarrow{AC}$ في النقطة E
- ارجع للنقطة M وافتح الفرجار بنفس طول $\overline{MN}$.
- بفتحة الفرجار نفسها، ارسم قوسًا مركزه E، ويقطع القوس السابق في D كما في الشكل.



الخطوة 3: ارسم $\overleftrightarrow{CD}$.
بما أن $\angle ECD \cong \angle CAB$ من الإنشاء، وهما متناظرتان فإن $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

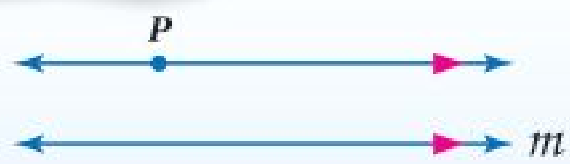


يبيّن الإنشاء السابق أنه يوجد على الأقل مستقيم واحد يمر بالنقطة C ويوازي $\overleftrightarrow{AB}$. والمسلمة الآتية تؤكد أن هذا المستقيم وحيد.

مسلّمة 2.3 مسلّمة التوازي

أضف إلى مطويتك

إذا عُلِمَ مستقيم ونقطة لا تقع عليه، فإنه يوجد مستقيم واحد فقط يمر بتلك النقطة ويوازي المستقيم المعلوم.



ينتج عن المستقيمين المتوازيين وقاطع لهما أزواج من الزوايا المتطابقة. ويمكن أن تحدد أزواج الزوايا هذه ما إذا كان المستقيمان متوازيين أم لا.

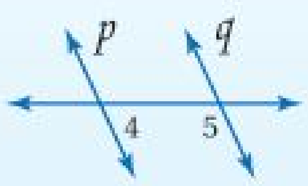
نظريات

أضف إلى مطويتك

2.5 عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًا: إذا قطع قاطع مستقيمين في مستوى، ونتج عن التقاطع زاويتان متبادلتان خارجيًا متطابقتان، فإن المستقيمين متوازيان.

إذا كانت $\angle 1 \cong \angle 3$، فإن $p \parallel q$

2.6 عكس نظرية الزاويتين المتحالفتين: إذا قطع قاطع مستقيمين في مستوى ونتج عن التقاطع زاويتان متحالفتان متكاملتان، فإن المستقيمين متوازيان.

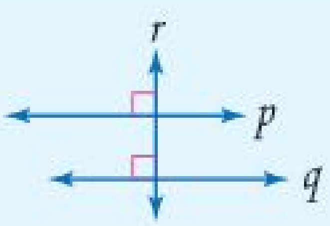


إذا كان $m\angle 4 + m\angle 5 = 180$، فإن $p \parallel q$

2.7 عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا: إذا قطع قاطع مستقيمين في مستوى، ونتج عن التقاطع زاويتان متبادلتان داخليًا متطابقتان، فإن المستقيمين متوازيان.

إذا كانت $\angle 6 \cong \angle 8$، فإن $p \parallel q$

2.8 عكس نظرية القاطع العمودي: إذا قطع قاطع مستقيمين في مستوى، وكان عموديًا على كل منهما، فإن المستقيمين متوازيان.

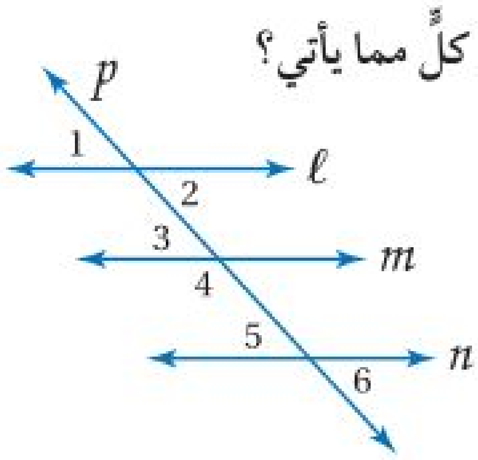


إذا كان $r \perp p$ و $r \perp q$، فإن $p \parallel q$

ستبرهن النظريات **2.5, 2.6, 2.7, 2.8** في المسائل **5, 14, 17, 18**

مثال 1 تعيين المستقيمات المتوازية

هل يمكن إثبات أن أيًّا من مستقيمات الشكل متوازية، اعتمادًا على المعطيات في كلٍّ مما يأتي؟ وإذا كان أيٌّ منها متوازيًا، فاذكر المسلّمة أو النظرية التي تبرّر إجابتك.



a) $\angle 1 \cong \angle 6$

$\angle 1, \angle 6$ متبادلتان خارجيًا بالنسبة للمستقيمين ℓ, n .

وبما أن $\angle 1 \cong \angle 6$، فإن $\ell \parallel n$ بحسب عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًا.

b. $\angle 2 \cong \angle 3$

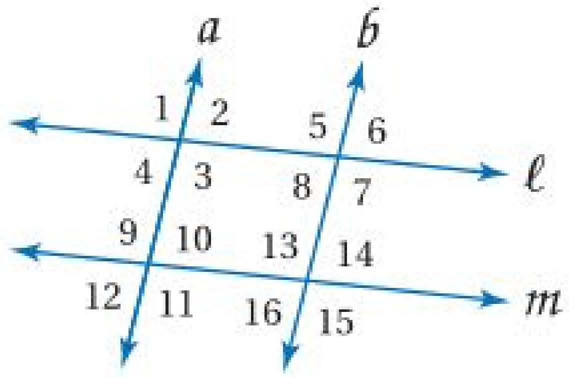
$\angle 2$ ، $\angle 3$ متبادلتان داخليًا بالنسبة للمستقيمين ℓ, m.

وبما أن $\angle 2 \cong \angle 3$، فإن $\ell \parallel m$ بحسب عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا.

إرشادات للدراسة

مسلّمات إقليدس أدرك مؤسس الهندسة الحديثة إقليدس أن عددًا قليلًا من المسلّمات ضروري لبرهنة النظريات في زمانه. المسلّمة 2.3 هي واحدة من مسلّمات إقليدس الخمس الأساسية. وكذلك المسلّمة 1.1 والنظرية 1.10 التي عدها مسلمة.

تحقق من فهمك



(1A $\angle 2 \cong \angle 8$ 		(1B $\angle 3 \cong \angle 11$

(1C $\angle 12 \cong \angle 14$ 		(1D $\angle 1 \cong \angle 15$

(1E $m\angle 8 + m\angle 13 = 180^\circ$ 		(1F $\angle 8 \cong \angle 6$

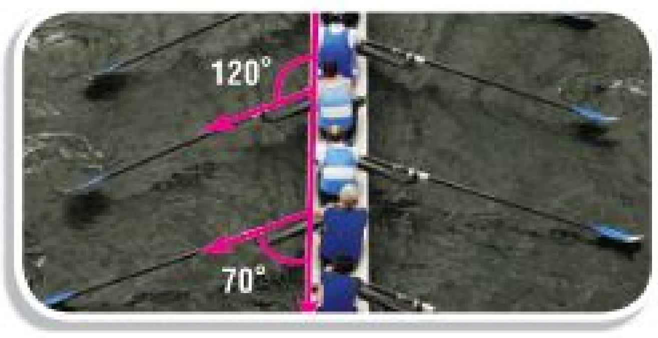
إثبات توازي مستقيمين: يمكن استعمال العلاقة بين أزواج الزوايا الناتجة عن مستقيمين وقاطع لهما لإثبات أن المستقيمين متوازيان.

مثال 2 من واقع الحياة إثبات توازي مستقيمين

سلالم: **كل درجة من درجات السلّم في الشكل المجاور عموديّة على دعامتيه الرئيستين، هل يمكن إثبات أن الدعامتين الرئيستين متوازيتان، وأن جميع الدرجات متوازية؟ وضِّح ذلك إن كان صحيحًا، وإلا فاذكر السبب.**

بما أن الدعامتين الرئيستين عموديتان على كل درجة فهما متوازيتان بحسب عكس **نظرية** القاطع العمودي. وبما أن أي درجتين في السلم عموديتان على كلٍّ من الدعامتين الرئيستين فهما متوازيتان أيضًا.

تحقق من فهمك



2) **تجديف:** حتى يتحرك قارب التجديف في مسار مستقيم، يجب أن تكون مجاديف كل جانب متوازية. هل يمكن أن تبرهن أن مجاديف الجانب الأيسر في الصورة المجاورة متوازية؟ وضِّح ذلك إن كان صحيحًا، وإلا فاذكر السبب.

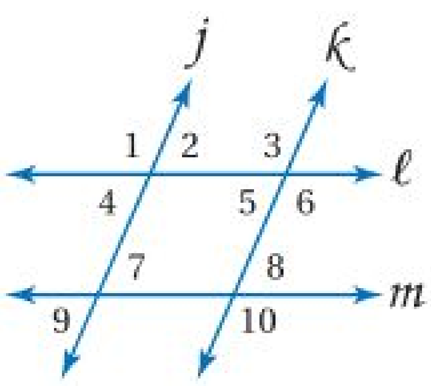
إرشادات للدراسة

إثبات توازي مستقيمين

عندما يقطع قاطع مستقيمين متوازيين، إما أن تكون أزواج الزوايا الناتجة متطابقة أو متكاملة. وإذا نتج عن مستقيمين وقاطع لهما زوايا لا تحقق هذا الشرط، فلا يمكن أن يكون المستقيمان متوازيين.

تأكد

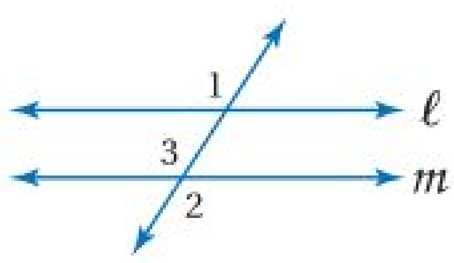
المثال 1 **هل يمكن إثبات أن أيًا من مستقيمات الشكل متوازية، اعتمادًا على المعطيات في كل مما يأتي؟ وإذا كان أيها متوازيًا ، فاذكر المسلّمة أو النظرية التي تبرّر إجابتك.**



1) $\angle 1 \cong \angle 3$ 		2) $\angle 2 \cong \angle 5$

3) $\angle 3 \cong \angle 10$ 		4) $m\angle 6 + m\angle 8 = 180^\circ$

المثال 2 5) **برهان:** أكمل برهان النظرية 2.5 .



المعطيات: $\angle 1 \cong \angle 2$

المطلوب: $\ell \parallel m$

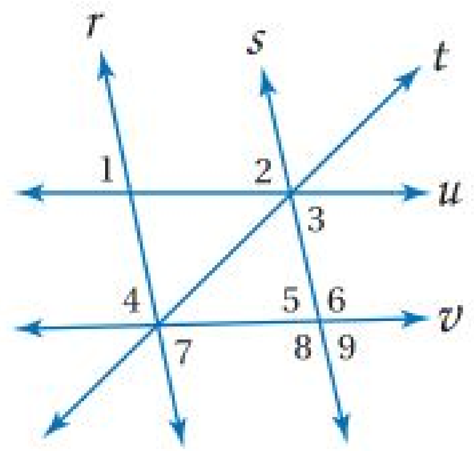
البرهان:

العبارات	المبررات
a) $\angle 1 \cong \angle 2$	a) مُعطى
b) $\angle 2 \cong \angle 3$	b) ؟
c) $\angle 1 \cong \angle 3$	c) خاصية التعدي للتطابق
d) $\ell \parallel m$	d) ؟

6) **كراسي:** هل يمكن إثبات أن مسند الظهر ومسند القدمين لكرسي الاسترخاء في الشكل المجاور متوازيان؟ وضح ذلك إذا كان صحيحًا، وإلا فاذكر السبب.

تدرب وحل المسائل

المثال 1 هل يمكن إثبات أن أيًّا من مستقيمات الشكل متوازية، اعتمادًا على المعطيات في كلٍّ مما يأتي؟ وإذا كان أيّها متوازيًا ، فاذكر المسلمة أو النظرية التي تبرّر إجابتك.

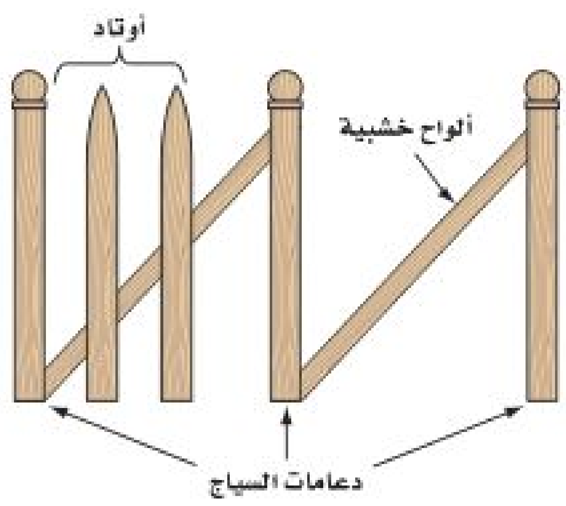


7) $\angle 1 \cong \angle 2$ **8)** $\angle 2 \cong \angle 9$

9) $m\angle 7 + m\angle 8 = 180^\circ$ **10)** $m\angle 3 + m\angle 6 = 180^\circ$

11) $\angle 3 \cong \angle 7$ **12)** $\angle 4 \cong \angle 5$

المثال 2 **13)** **حدائق:** لبناء سياج حول حديقة المنزل، ثبَّت سعود دعامات السياج، ووضع ألواحًا خشبية تميل بزاوية مع كلٍّ من دعامَتَي السياج. وعند تثبيته أوتاد السياج، حرص على أن تكون الزوايا بين الألواح الخشبية والأوتاد متساوية القياس. لماذا يجعل هذا الأوتاد متوازية؟



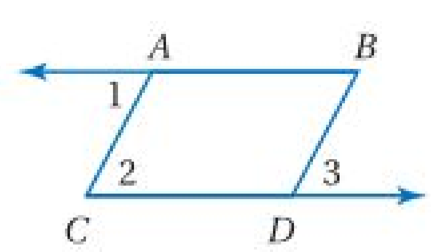
14) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 2.6 .

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لكلٍّ مما يأتي:

15) **المعطيات:** $\angle 1 \cong \angle 3$

$\overline{AC} \parallel \overline{BD}$

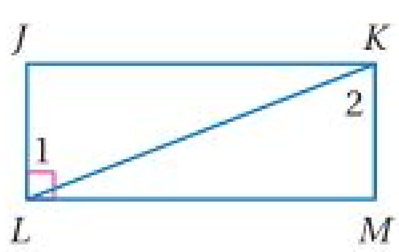
المطلوب: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$



16) **المعطيات:** $\angle 1 \cong \angle 2$

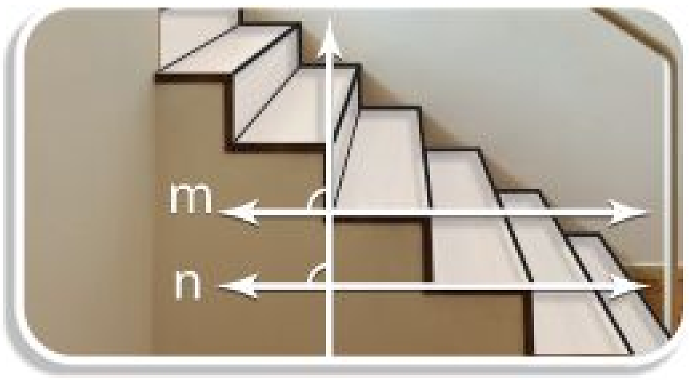
$\overline{LJ} \perp \overline{ML}$

المطلوب: $\overline{KM} \perp \overline{ML}$



برهان: اكتب برهانًا حرًّا لكلٍّ من النظريتين الآتيتين:

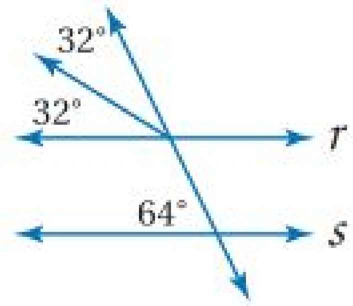
17) النظرية 2.7 **18)** النظرية 2.8



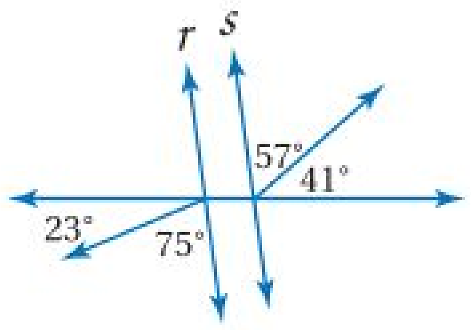
19) **درج:** ما العلاقة بين حوافِّ أسطح الدرجات في الشكل المجاور؟ برر إجابتك.

حدّد ما إذا كان المستقيمان r, s متوازيين أم لا في كلٍّ مما يأتي. برّر إجابتك.

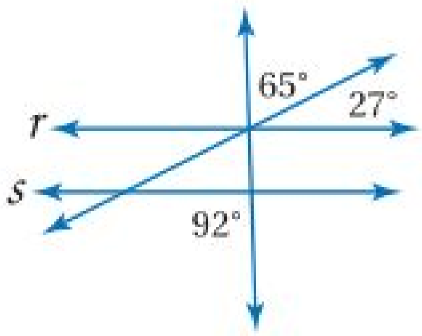
20)



21)

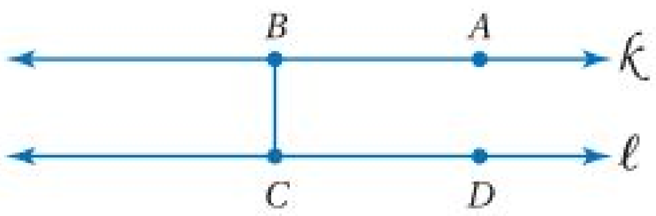


22)



23) **تمثيلات متعددة:** سوف تستكشف في هذه المسألة أقصر مسافة بين مستقيمين متوازيين.

a) **هندسيًا:** ارسم ثلاثة أزواج من المستقيمات المتوازية x و y، s و t، k و ℓ، وارسم أقصر قطعة مستقيمة $\overline{BC}$ بين كل مستقيمين متوازيين، وعيِّن النقطتين A, D كما في الشكل أدناه.

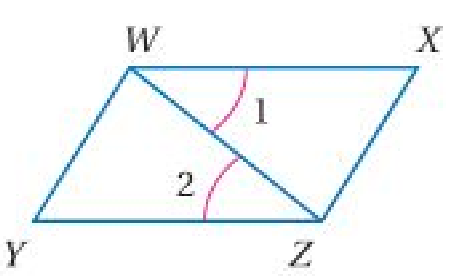


b) **جدوليًا:** قِس $\angle ABC$ و $\angle BCD$ في كل زوج، ثم أكمل الجدول.

زوج المستقيمات المتوازية	$m\angle ABC$	$m\angle BCD$
k و ℓ		
s و t		
x و y		

c) **لفظيًا:** ضع تخمينًا حول الزاوية بين أقصر قطعة مستقيمة وكلٍّ من المستقيمين المتوازيين.

مسائل مهارات التفكير العليا



24) **اكتشف الخطأ:** يحاول كلٌّ من سامي ومنصور تحديد المستقيمات المتوازية في الشكل المجاور. فقال سامي: بما أن $\angle 1 \cong \angle 2$ ، إذن $\overline{WY} \parallel \overline{XZ}$. أما منصور فلم يوافقه وقال: بما أن $\angle 1 \cong \angle 2$ ، إذن $\overline{WX} \parallel \overline{YZ}$. أيٌّ منهما على صواب؟ وضّح إجابتك.

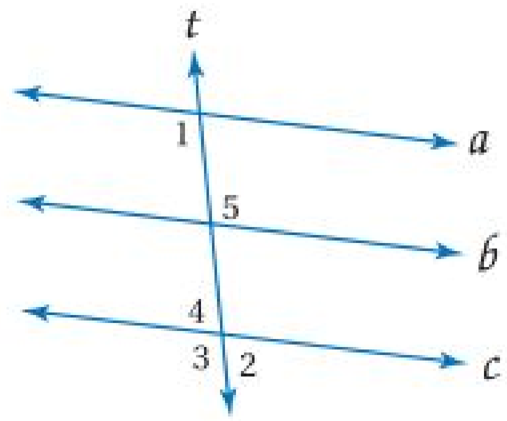
25) **تبرير:** هل تبقى النظرية 2.8 صحيحة إذا كان المستقيمان لا يقعان في المستوى نفسه؟ ارسم شكلًا يبرر إجابتك.

26) **مسألة مفتوحة:** ارسم المثلث ABC.

a) أنشئ مستقيمًا يوازي $\overline{BC}$ ويمر بالنقطة A.

b) استعمل القياس؛ لتتحقق من أن المستقيم الذي رسمته يوازي $\overline{BC}$.

c) أثبت صحة الإنشاء رياضيًّا.



27) تحدٍّ: استعمل الشكل المجاور.

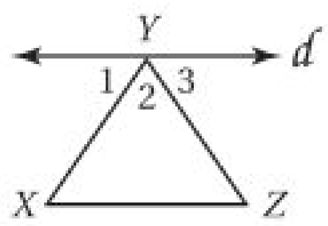
a) إذا كان: $m\angle 1 + m\angle 2 = 180^\circ$، فبرهن أن $a \parallel c$.

b) إذا كان: $a \parallel c$ و $m\angle 1 + m\angle 3 = 180^\circ$،
فبرهن أن $t \perp c$.

28) اكتب: لخّص الطرائق الخمس التي استُعملت في هذا الدرس لإثبات توازي مستقيمين.

تدريب على اختبار

29) أي الحقائق الآتية كافية لإثبات أن المستقيم d يوازي $\overline{XZ}$؟



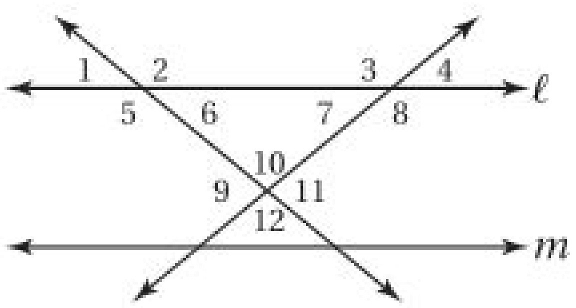
A $\angle 1 \cong \angle 3$

B $\angle 3 \cong \angle Z$

C $\angle 1 \cong \angle Z$

D $\angle 2 \cong \angle X$

30) استعمل الشكل المجاور لتحديد أن صحة أي مما يأتي ليست مؤكدةً:



A $\angle 4 \cong \angle 7$

B $\angle 4$ و $\angle 8$ متكاملتان

C $\ell \parallel m$

D $\angle 5$ و $\angle 6$ متكاملتان

مراجعة تراكمية

أعط مثالًا مضادًّا لتبيّن خطأ كل تخمين في السؤالين الآتيين: (الدرس 1-1)

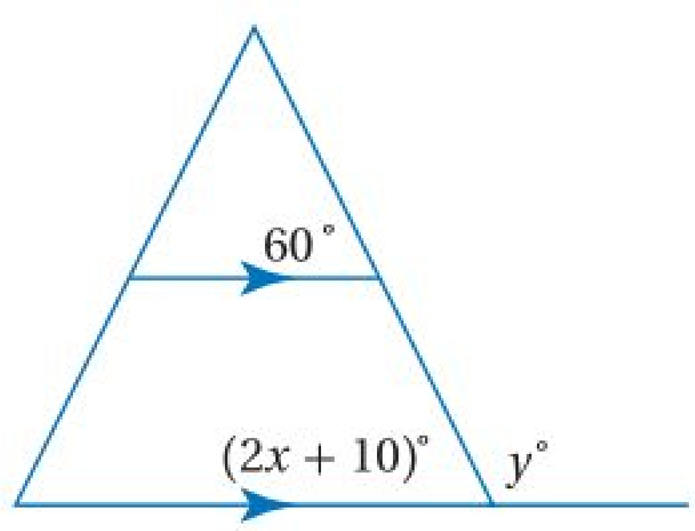
31) المُعطيات: $\angle 1, \angle 2$ متتامتان.

التخمين: $\angle 1, \angle 2$ تكوّنان زاوية قائمة.

32) المُعطيات: W, X, Y, Z أربع نقاط.

التخمين: النقاط W, X, Y, Z لا تقع على استقامة واحدة.

احسب قيمة x , y على الشكل التالي: (الدرس 2-2)



استعد للدرس اللاحق

بسّط كلًّا من العبارات الآتية:

33) $\dfrac{6-5}{4-2}$

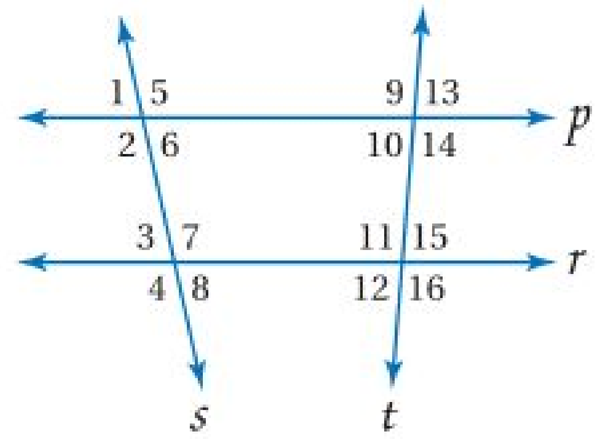
34) $\dfrac{-11-4}{12-(-9)}$

35) $\dfrac{16-12}{15-11}$

الفصل 2 اختبار منتصف الفصل

الدروس 1-2 إلى 3-2

استعمل الشكل أدناه لتحدد القاطع الذي يصل كل زوج من الزوايا فيما يأتي، ثم صنِّف زوج الزوايا إلى زاويتين متبادلتين داخليًّا أو خارجيًّا أو متناظرتين أو متحالفتين: (الدرس 1-2)



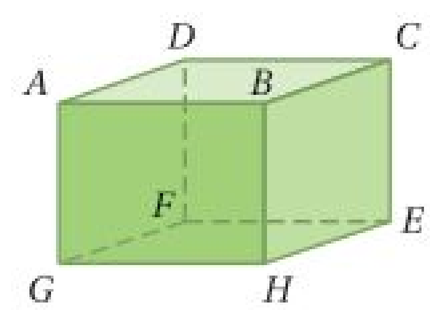
1) $\angle 6$ و $\angle 3$

2) $\angle 1$ و $\angle 14$

3) $\angle 10$ و $\angle 11$

4) $\angle 5$ و $\angle 7$

حدّد كلًّا مما يأتي مستعملًا الشكل أدناه: (الدرس 1-2)

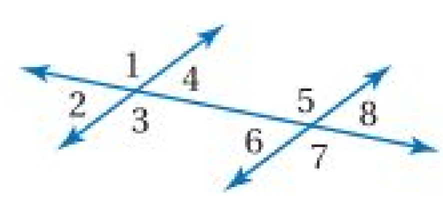


5) جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{HE}$.

6) قطعة مستقيمة تخالف $\overline{GH}$، وتحوي النقطة D .

7) مستوى يوازي المستوى ABC.

8) **اختيار من متعدد:** أيٌّ مما يأتي يصف $\angle 4, \angle 8$؟ (الدرس 1-2)



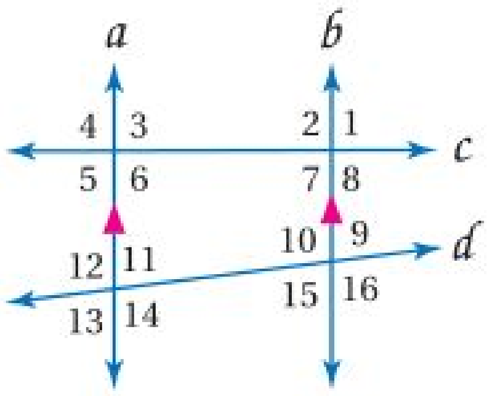
A متناظرتان

B متبادلتان خارجيًّا

C متبادلتان داخليًّا

D متحالفتان

في الشكل المجاور: $m\angle 14 = 118°$, $m\angle 4 = 104°$.
أوجد قياس كلٍّ من الزوايا الآتية،
واذكر المسلمات أو النظريات التي
استعملتها: (الدرس 2-2)



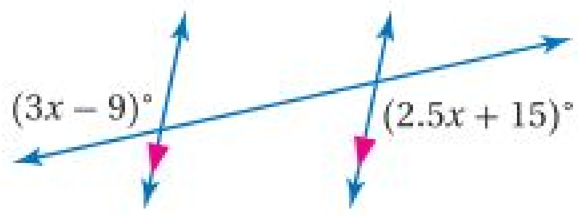
9) $\angle 2$

10) $\angle 9$

11) $\angle 10$

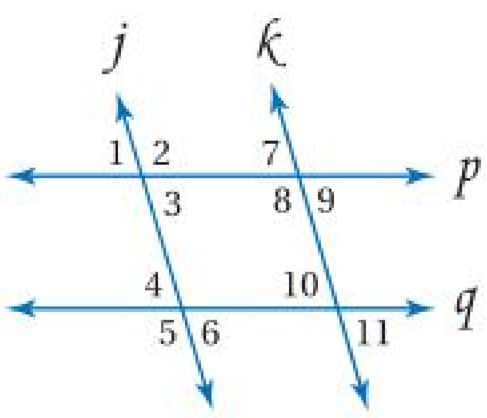
12) $\angle 7$

13) أوجد قيمة x في الشكل الآتي: (الدرس 2-2)



14) **نجارة:** صنع عامر طاولة خشبية لحديقته. فقصَّ طرف أحد رجليها بزاوية 40°، بأي زاوية قصَّ الطرف الآخر بحيث كان سطح الطاولة موازيًا للأرض؟ وضّح إجابتك. (الدرس 2-2)

هل يمكن إثبات أن أيًّا من مستقيمات الشكل الآتي متوازية اعتمادًا على المعطيات في كلٍّ مما يأتي؟ وإن كانت متوازية ، فاذكر المسلّمة أو النظرية التي تبرّر إجابتك. (الدرس 3-2)



15) $\angle 4 \cong \angle 10$

16) $\angle 9 \cong \angle 6$

17) $\angle 7 \cong \angle 11$

2-4 ميل المستقيم
Slope of Line

فيما سبق:

درستُ برهنة توازي مستقيمين باستعمال علاقات الزوايا.

(الدرس 3-2)

والآن:

- أجد ميل المستقيم.
- أستعمل الميل لتحديد المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة.

المفردات:

الميل
slope

معدَّل التغير
rate of change

لماذا؟

تستعمل لوحات مرورية لتنبه السائقين إلى حالة الطريق. فاللوحة المجاورة تشير إلى انحدار الطريق بنسبة 6% ، وهذا يعني أن الطريق ترتفع أو تهبط بمقدار 6 m رأسيًّا لكل 100 m أفقيًّا.

ميل المستقيم: درست سابقًا حساب ميل المستقيم في المستوى الإحداثي باستعمال أي نقطتين عليه، وعرفت أنه نسبة التغير الرأسي إلى التغير الأفقي.

$$\text{الميل} = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$$

يمكنك استعمال إحداثيات النقاط على المستقيم لتشتق صيغة للميل.

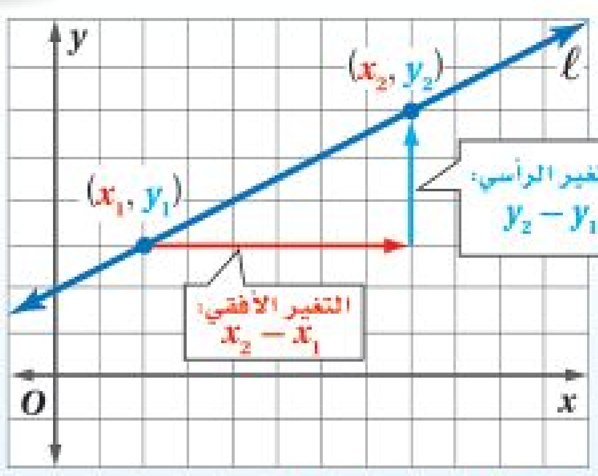
مفهوم أساسي — ميل المستقيم

أضف إلى مطويتك

في المستوى الإحداثي ، **ميل** المستقيم هو نسبة التغير في الإحداثي y إلى التغير في الإحداثي x بين أي نقطتين عليه.

ويعطى الميل m لمستقيم يحوي نقطتين إحداثياهما (x_1, y_1) و (x_2, y_2) بالصيغة:

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ، حيث $x_1 \neq x_2$.

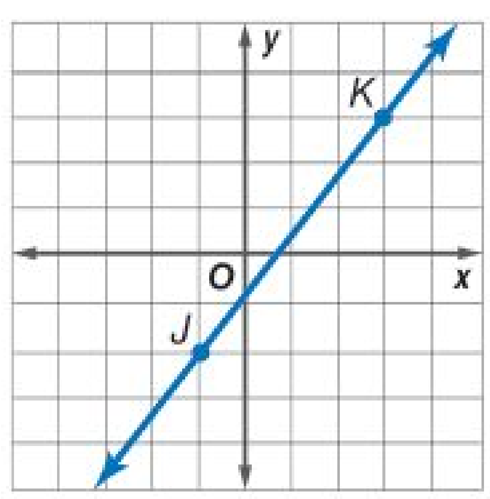


$$m = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال 1 إيجاد ميل المستقيم

أوجد ميل كل مستقيم فيما يأتي:

a)



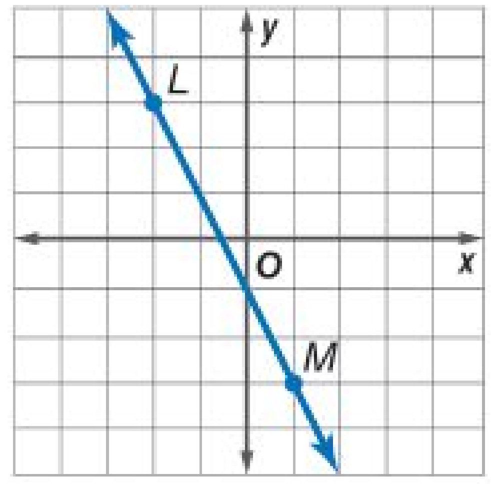
عوِّض عن (x_1, y_1) بـ $(-1, -2)$ ، وعن (x_2, y_2) بـ $(3, 3)$.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ صيغة الميل

$= \frac{3 - (-2)}{3 - (-1)}$ عوِّض

$= \frac{5}{4}$ بسِّط

(b



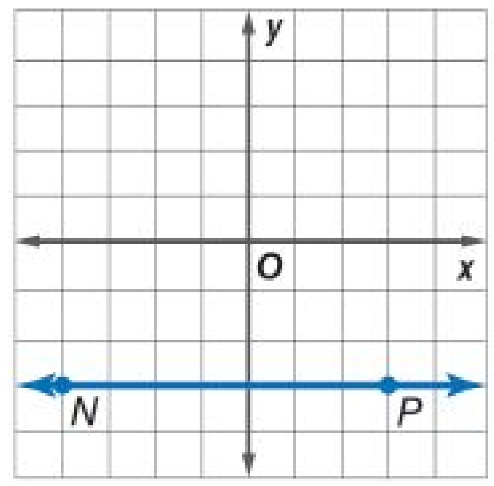
$(x_1, y_1) = (-2, 3), (x_2, y_2) = (1, -3)$

صيغة الميل $\quad m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

عوّض $\quad = \dfrac{-3 - 3}{1 - (-2)}$

بسّط $\quad = -2$

(c



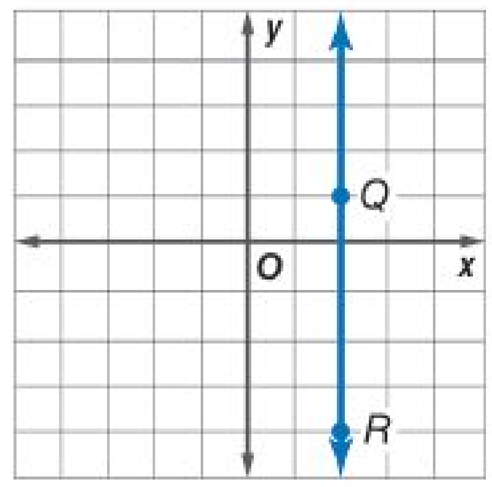
$(x_1, y_1) = (-4, -3), (x_2, y_2) = (3, -3)$

صيغة الميل $\quad m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

عوّض $\quad = \dfrac{-3 - (-3)}{3 - (-4)}$

بسّط $\quad = \dfrac{0}{7} = 0$

(d



$(x_1, y_1) = (2, 1), (x_2, y_2) = (2, -4)$

صيغة الميل $\quad m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

عوّض $\quad = \dfrac{-4 - 1}{2 - 2}$

بسّط $\quad = \dfrac{-5}{0}$

ميل هذا المستقيم **غير معرّف**.

إرشادات للدراسة

القسمة على 0

ميل المستقيم في **المثال 1d** غير معرَّف؛ لأنه لا يوجد عدد تضربه في 0 يُعطي -5. وبما أن هذا صحيح لأي عدد، فإن أي عدد مقسوم على 0 يمثل كمية غير معرَّفة. ومن ذلك يكون ميل أي مستقيم رأسي غير معرَّف.

✓ تحقق من فهمك

1A) المستقيم الذي يحتوي على $(-3, -5), (-2, 6)$. **1B)** المستقيم الذي يحتوي على $(-2, -6), (8, -3)$.

1C) المستقيم الذي يحتوي على $(4, -3), (4, 2)$. **1D)** المستقيم الذي يحتوي على $(4, 3), (-3, 3)$.

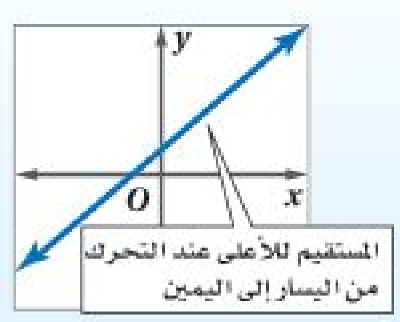
يوضّح **المثال** 1 أربع حالات مختلفة للميل وهي :

ملخص المفهوم

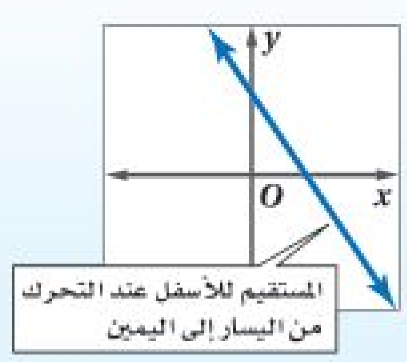
أضف إلى مطويتك

حالات الميل

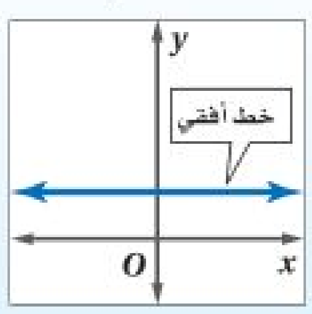
الميل موجب



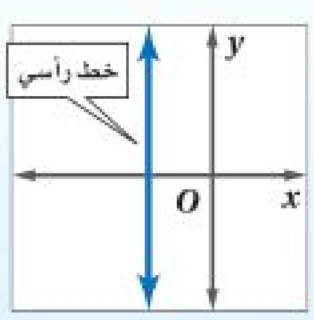
الميل سالب



الميل يساوي صفرًا



الميل غير معرّف



يمكن تفسير الميل على أنه **معدّل التغير** في الكمية y بالنسبة إلى الكمية x، ويمكن استعمال ميل المستقيم أيضًا لتعيين إحداثيَّي أي نقطة على المستقيم.

مثال 2 من واقع الحياة — استعمال الميل معدلًا للتغير

طائرات: تحلِّق طائرة في مسارٍ جويٍّ مستقيم يمر بمدينة الرياض ثم بالمدينة المنورة. إذا كانت الطائرة على بُعد 500 km من المدينة المنورة بعد 0.5 h من مرورها فوق الرياض، ثم أصبحت على بُعد 152 km من المدينة المنورة بعد نصف ساعة أخرى. كم كان بُعدها عن المدينة المنورة بعد 0.75 h من مرورها فوق الرياض إذا كانت سرعتها ثابتةً.

الربط مع الحياة

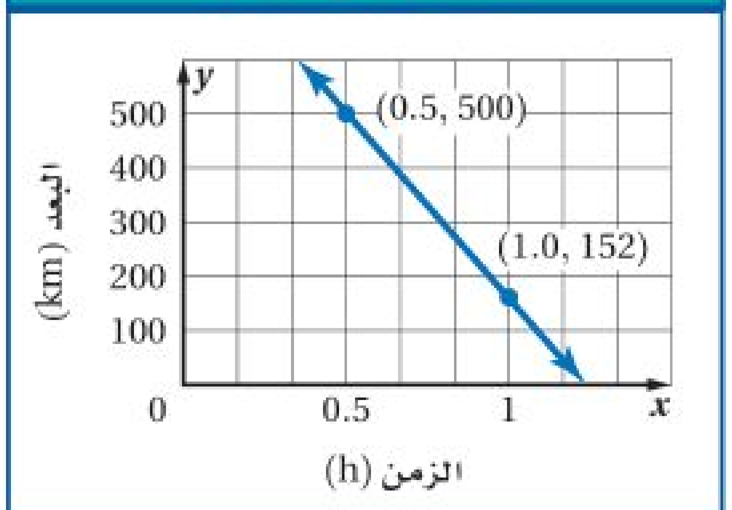
المسارات الجوية

توجد خرائط جوية تضبط مسارات الطائرات وارتفاعاتها وتضمن عدم تصادمها.

افهم: استعمل البيانات المعطاة لترسم المستقيم الذي يمثل البعد y بالكيلومترات كدالة في الزمن x بالساعات.

عيِّن النقطتين $(0.5, 500)$, $(1, 152)$ في المستوى الإحداثي، ثم ارسم مستقيمًا يمر بهما.

البعد عن المدينة المنورة



المطلوب هو إيجاد البعد عن المدينة المنورة بعد 0.75 h

خطط: أوجد ميل المستقيم في الشكل المجاور، واستعمله معدّل تغيّر المسافة بالكيلومتر بالنسبة للزمن بالساعة لإيجاد بُعد الطائرة عن المدينة المنورة بعد 0.75 h

حل: استعمل صيغة الميل لإيجاد ميل المستقيم.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(152 - 500)\text{ km}}{(1.0 - 0.5)\text{ h}} = \frac{-348\text{ km}}{0.5\text{ h}} = \frac{-696\text{ km}}{1\text{ h}}$$

تحلِّق الطائرة بسرعة 696 km/h

والإشارة السالبة تشير إلى تناقص المسافة مع مرور الزمن.

استعمل ميل المستقيم وإحدى النقطتين عليه؛ لتجد البعد y عندما يكون الزمن $x = 0.75$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	صيغة الميل
$-696 = \frac{y_2 - 500}{0.75 - 0.5}$	$m = -696, x_1 = 0.5, y_1 = 500, x_2 = 0.75$
$-696 = \frac{y_2 - 500}{0.25}$	بسّط
$-174 = y_2 - 500$	اضرب كلا الطرفين في 0.25
$326 = y_2$	اجمع 500 إلى كل طرف

إذن كان بعد الطائرة عن المدينة المنورة بعد 0.75 h يساوي 326 km

تحقق يمكننا من الشكل تقدير البعد عن المدينة المنورة بعد 0.75 h بأكثر من 300 km قليلًا. وبما أن 326 قريبة من هذا التقدير فإن الإجابة معقولة. ✓

تحقق من فهمك

2) **مبيعات:** كانت مبيعات مصنع معلبات غذائية 20 مليون علبة عام 2016م، و200 مليون علبة عام 2021م، إذا حافظ المصنع على المعدل نفسه من الزيادة، فكم تكون مبيعاته من العلب عام 2024م؟

المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة: يمكنك استعمال ميلَي مستقيمين لتحدد ما إذا كانا متوازيين أو متعامدين. فالمستقيمات التي لها الميل نفسه تكون متوازية.

مسلمات

أضف إلى مطويتك

المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة

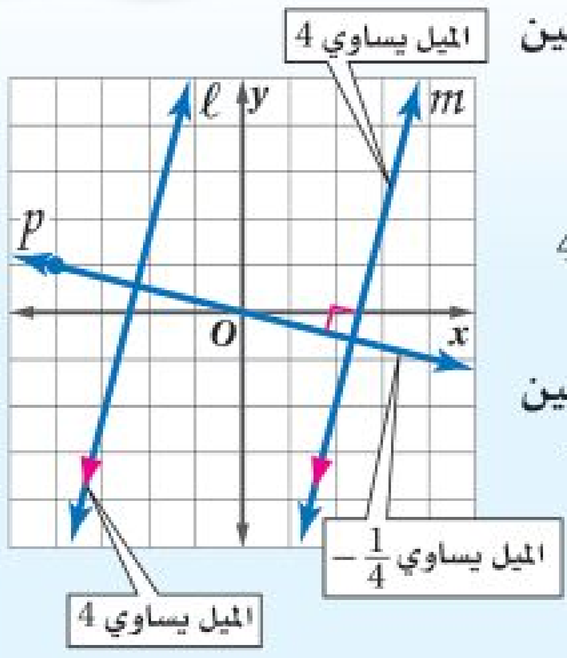
2.4 **ميلا المستقيمين المتوازيين:** يكون للمستقيمين غير الرأسيين الميل نفسه إذا وفقط إذا كانا متوازيين. وجميع المستقيمات الرأسية متوازية.

مثال: المستقيمان المتوازيان ℓ, m لهما الميل نفسه ويساوي 4

2.5 **ميلا المستقيمين المتعامدين:** يكون المستقيمان غير الرأسيين متعامدين إذا وفقط إذا كان حاصل ضرب ميليهما يساوي -1 والمستقيمات الأفقية والرأسية متعامدة.

مثال: المستقيم m عمودي على المستقيم p، أو $m \perp p$

ناتج ضرب الميلين هو $-1 = 4 \cdot -\frac{1}{4}$



مثال 3 تحديد علاقات المستقيمات

حدّد ما إذا كان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك إذا كانت $A(1, 1), B(-1, -5), C(3, 2), D(6, 1)$، ومثّل كل مستقيم بيانيًّا لتتحقق من إجابتك.

الخطوة 1: أوجد ميل كل مستقيم.

ميل $\overleftrightarrow{AB}$: $\frac{-5-1}{-1-1} = \frac{-6}{-2} = 3$

ميل $\overleftrightarrow{CD}$: $\frac{1-2}{6-3} = -\frac{1}{3}$

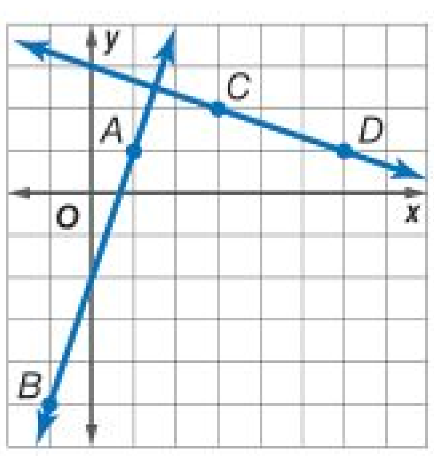
الخطوة 2: حدّد العلاقة إن وجدت بين المستقيمين.

بما أن ميلَي المستقيمين غير متساويين فهما غير متوازيين. ولتحدد ما إذا كانا متعامدين أم لا، أوجد ناتج ضرب ميليهما.

$3\left(-\frac{1}{3}\right) = -1$ ناتج ضرب ميلَي $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$

بما أن حاصل ضرب ميلَي $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ يساوي -1 إذن هما متعامدان.

تحقق: من تمثيل المستقيمين بيانيًّا يبدو أنهما يشكّلان زاوية قائمة عند نقطة تقاطعهما. ✓



إرشادات للدراسة

ميلا المستقيمين المتعامدين

إذا كان ميل المستقيم ℓ يساوي $\frac{a}{b}$، فإن ميل المستقيم العمودي على ℓ هو معكوس مقلوب ميله، أيْ $-\frac{b}{a}$ ؛ لأن $\frac{a}{b}\left(-\frac{b}{a}\right) = -1$

✓ تحقق من فهمك

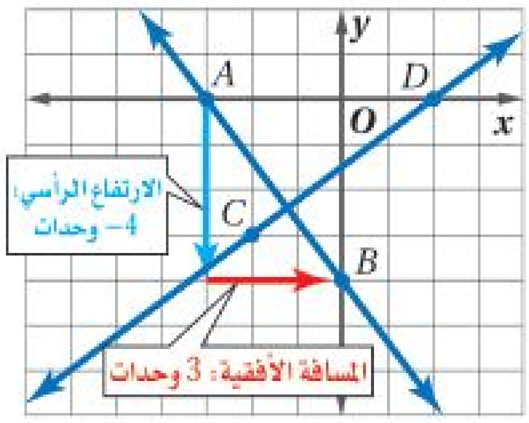
حدد ما إذا كان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك في كلٍّ مما يأتي، ومثّل كل مستقيم بيانيًّا لتتحقق من إجابتك.

3A) $A(14, 13), B(-11, 0), C(-3, 7), D(-4, -5)$

3B) $A(3, 6), B(-9, 2), C(5, 4), D(2, 3)$

مثال 4 استعمال الميل لتمثيل المستقيم بيانيًا

مثل بيانيًّا المستقيم الذي يمر بالنقطة $A(-3, 0)$ ويعامد $\overleftrightarrow{CD}$ ، حيث $C(-2, -3), D(2, 0)$.



لإيجاد ميل $\overleftrightarrow{CD}$ عوّض عن (x_1 , y_1) بـ $(-2 , -3)$ وعن (x_2 , y_2) بـ $(2 ,0)$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-(-3)}{2-(-2)} = \frac{3}{4}$$

إذن ميل المستقيم العمودي على $\overleftrightarrow{CD}$ والمار بالنقطة A

يساوي $\left(-\frac{4}{3}\right)$ ، لأن $\frac{3}{4}\left(-\frac{4}{3}\right) = -1$.

لتمثيل المستقيم بيانيًّا، ابدأ من النقطة A، وتحرك 4 وحدات إلى أسفل، ثم 3 وحدات نحو اليمين، وسمِّ النقطة B ، ثم ارسم $\overleftrightarrow{AB}$.

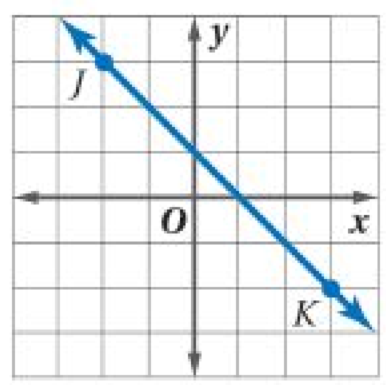
تحقق من فهمك

4) مثّل بيانيًّا المستقيم الذي يمر بالنقطة $P(0, 1)$ ويعامد $\overleftrightarrow{QR}$ ، حيث $Q(-6, -2), R(0, -6)$.

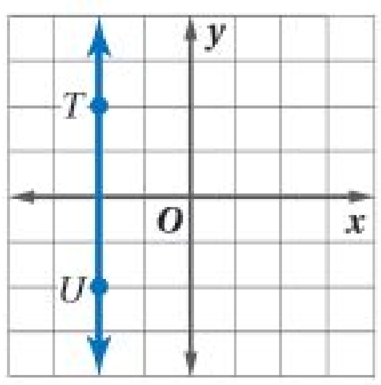
تأكـد

المثال 1 أوجد ميل كل مستقيم فيما يأتي:

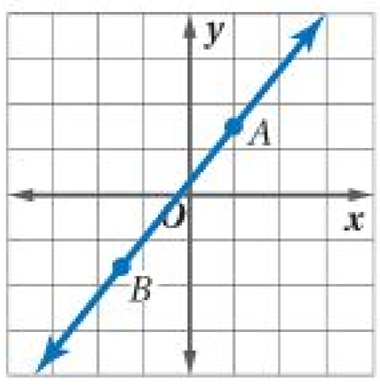
1)



2)

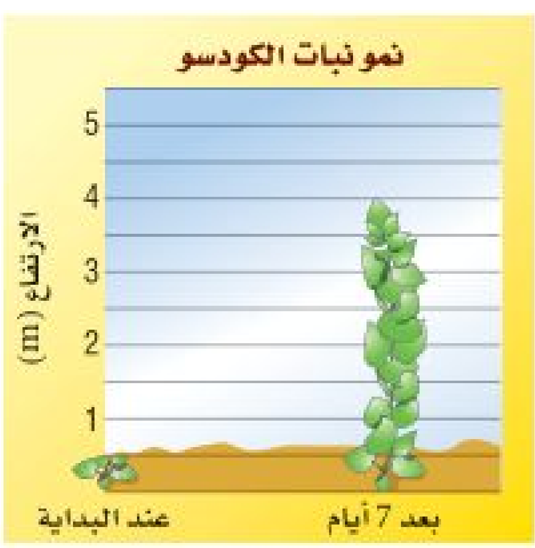


3)



المثال 2

4) **علم النبات:** الكودسو (Kudzu) هو نبات متسلّق سريع النمو. قيس ارتفاع نبتة عند يوم البداية فكان 0.5 m، وبعد سبعة أيام أصبح ارتفاعها 4 m



a) مثّل بيانيًّا المستقيم الذي يمثل ارتفاع النبتة مع مرور الزمن.

b) ما ميل هذا المستقيم؟ وماذا يُمثّل؟

c) افترض أن هذه النبتة استمرت في النمو وفق هذا المعدل، فكم يكون ارتفاعها بعد 15 يومًا؟

المثال 3 حدِّد ما إذا كان $\overleftrightarrow{WX}, \overleftrightarrow{YZ}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك في كلٍّ مما يأتي، ومثّل كل مستقيم بيانيًّا لتتحقق من إجابتك.

5) $W(2, 4), X(4, 5), Y(4, 1), Z(8, -7)$

6) $W(1, 3), X(-2, -5), Y(-6, -2), Z(8, 3)$

7) $W(-7, 6), X(-6, 9), Y(6, 3), Z(3, -6)$

8) $W(1, -3), X(0, 2), Y(-2, 0), Z(8, 2)$

المثال 4 مثّل بيانيًّا المستقيم الذي يحقق الشروط في كلٍّ مما يأتي:

9) يمر بالنقطة $A(3, -4)$، ويوازي $\overleftrightarrow{BC}$ ، حيث $B(2, 4), C(5, 6)$.

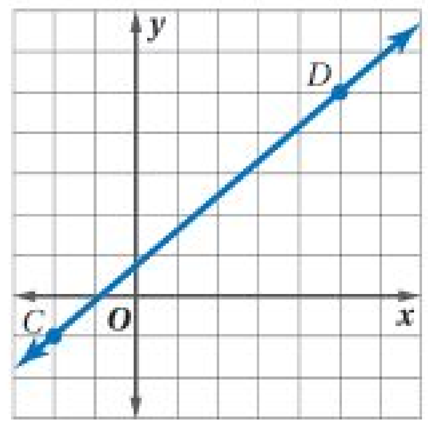
10) ميله يساوي 3 ، ويمر بالنقطة $A(-1, 4)$.

11) يمر بالنقطة $P(7, 3)$، ويعامد $\overleftrightarrow{LM}$ ، حيث $L(-2, -3), M(-1, 5)$.

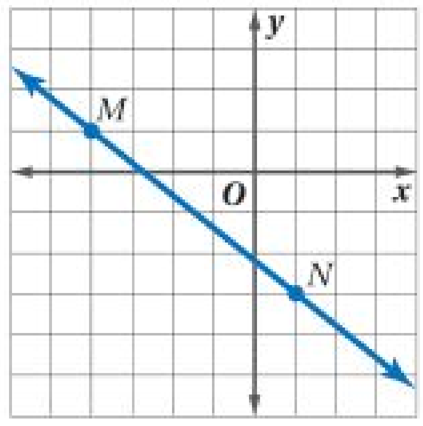
تدرب وحل المسائل

المثال 1 أوجد ميل كل مستقيم فيما يأتي:

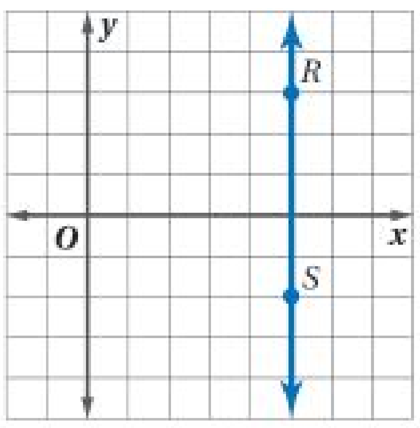
(12



(13



(14



أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين المحددتين في كلٍّ مما يأتي :

(15 $C(3, 1), D(-2, 1)$

(16 $E(5, -1), F(2, -4)$

(17 $G(-4, 3), H(-4, 7)$

(18 $J(7, -3), K(-8, -3)$

(19 $P(-3, -5), Q(-3, -1)$

(20 $R(2, -6), S(-6, 5)$

المثال 2 **(21** **حواسيب:** في عام 1435هـ كان ثمن حاسوب محمول 3000 ريال ، وأصبح 1800 ريال في عام 1439هـ .

a) ارسم مستقيمًا يمثل توقعًا لسعر الحاسوب للسنوات من 1435هـ إلى 1439هـ .

b) كم ينخفض ثمن الحاسوب في كل سنة؟

c) إذا استمر انخفاض السعر بالمعدل نفسه، فكم يكون ثمن الحاسوب عام 1442هـ؟

المثال 3 حدّد ما إذا كان $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك في كلٍّ مما يأتي، ومثّل كل مستقيم بيانيًّا لتتحقق من إجابتك.

(22 $A(1, 5), B(4, 4), C(9, -10), D(-5, -5)$

(23 $A(-6, -9), B(8, 19), C(0, -4)\ D(2, 0)$

(24 $A(4, 2), B(-3, 1), C(6, 0), D(-10, 8)$

(25 $A(8, -2), B(4, -1), C(3, 11), D(-2, -9)$

(26 $A(8, 4), B(4, 3), C(4, -9), D(2, -1)$

(27 $A(4, -2), B(-2, -8), C(4, 6), D(8, 5)$

المثال 4 مثّل بيانيًّا المستقيم الذي يحقق الشروط في كلٍّ مما يأتي:

(28 يمر بالنقطة $A(2, -5)$ ، ويوازي $\overleftrightarrow{BC}$ ،حيث $B(1, 3), C(4, 5)$.

(29 ميله يساوي -2 ، ويمر بالنقطة $H(-2, -4)$.

(30 يمر بالنقطة $X(1, -4)$ ويوازي $\overleftrightarrow{YZ}$ ، حيث $Y(5, 2), Z(-3, -5)$.

(31 يمر بالنقطة $D(-5, -6)$ ويعامد $\overleftrightarrow{FG}$ ، حيث $F(-2, -9), G(1, -5)$.

(32 **سكان:** في عام 1427هـ كان عدد سكان إحدى المدن 416121 نسمة ، وفي عام 1439هـ بلغ عدد سكانها 521273 نسمة.

a) ما المعدّل التقريبي لتغيُّر عدد سكان هذه المدينة من عام 1427هـ إلى 1439هـ ؟

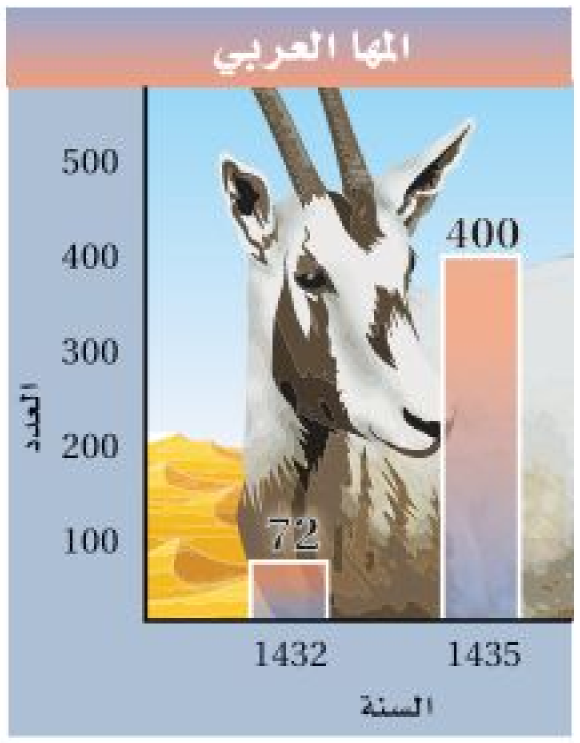
b) إذا استمر ازدياد عدد السكان بالمعدّل نفسه، فكم نسمةً تتوقع أن يبلغ عدد سكان هذه المدينة عام 1447هـ؟

حدد أي المستقيمين في السؤالين الآتيين له أكبر ميل:

33) المستقيم 1: $(0, 5)$ و $(6, 1)$
المستقيم 2: $(4, 10)$ و $(-5, -8)$

34) المستقيم 1: $(-4, 0)$ و $(2, 2)$
المستقيم 2: $(-4, 0)$ و $(4, 5)$

35) **محمية طبيعية:** تؤوي محمية طبيعية حيوانًا مهددًا بالانقراض هو: المها العربي. ويوضح الشكل المجاور عدد المها العربي في المحمية عامَي 1432 هـ و 1435 هـ .



a) أوجد معدل التغيُّر لعدد حيوانات المها العربي في المحمية.

b) مثّل بيانيًّا المستقيم الذي يمثّل الزيادة في العدد.

c) إذا استمر النمو وفق هذا المعدل، فكم يكون عدد حيوانات المها العربي عام 1447هـ ؟

الربط مع الحياة

تبذل المملكة جهودًا حثيثة للحفاظ على البيئة بعناصرها المختلفة، حيث أسس المركز الوطني لتنمية الحياة الفطرية.

أوجد قيمة x أو y اعتمادًا على المعطيات في كلٍّ مما يأتي، ثم مثّل المستقيم بيانيًّا:

36) مستقيم يمر بالنقطتين $(x, -6)$, $(-1, 4)$، وميله يساوي $-\frac{5}{2}$

37) مستقيم يمر بالنقطتين $(4, 3)$, $(-4, 9)$، ويوازي المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(4, y)$, $(-8, 1)$

38) مستقيم يمر بالنقطتين $(3, y)$, $(-3, 1)$، ويوازي المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(9, y)$, $(5, -6)$

39) **مدارس:** في عام 1434هـ كان عدد طلاب مدرسة الفتح 1125 طالبًا . وفي عام 1440هـ ازداد عدد الطلاب حتى بلغ 1425 طالبًا. وعندما أُنشئت مدرسة الأندلس عام 1435هـ كان عدد طلابها 1275 طالبًا. إذا ازداد عدد طلاب مدرسة الأندلس بنفس معدّل زيادة عدد طلاب مدرسة الفتح، فكم يصبح عدد طلاب مدرسة الأندلس عام 1440هـ ؟

مسائل مهارات التفكير العليا

40) **اكتشف الخطأ:** حسب كلٌّ من خالد وطارق ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $Q(3, 5), R(-2, 2)$ هل إجابة أيٍّ منهما صحيحة؟ وضّح تبريرك.

خالد	طارق
$m = \frac{5-2}{-2-3}$ $= -\frac{3}{5}$	$m = \frac{5-2}{3-(-2)}$ $= \frac{3}{5}$

41) **تبرير:** في المربع $ABCD$ إذا كان $A(2, -4), C(10, 4)$.

a) أوجد الرأسين الآخرين B, D للمربع.

b) أثبت أن $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

c) أثبت أن قياس كل زاوية من زوايا المربع يساوي $90°$

42) **اكتب:** يميل برج بيزا في إيطاليا عن الخط الرأسي بزاوية $5.5°$. صف ميل كلٍّ من برج المملكة وبرج بيزا.

43) **تحدٍ:** تعلّمت في هذا الدرس أن $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. اكتب برهانًا جبريًّا لتبيّن أنه يمكن أيضًا حساب الميل باستعمال المعادلة $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

تدريب على اختبار

44) أي المعادلات الآتية تمثل مستقيمًا يعامد المستقيم الذي معادلته $y = \frac{3}{4}x + 8$؟

A $y = -\frac{4}{3}x - 6$

B $y = \frac{4}{3}x + 5$

C $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

D $y = -\frac{3}{4}x - 5$

45) أي القيم الآتية تمثل ميل المستقيم المار بالنقطتين $(2, 4), (0, -2)$؟

A $-\frac{1}{3}$

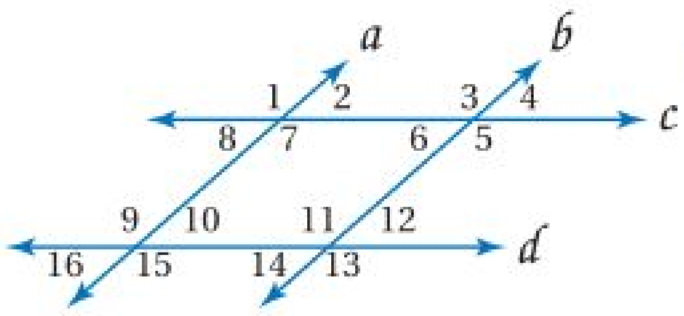
B -3

C $\frac{1}{3}$

D 3

مراجعة تراكمية

في الشكل المجاور: $a \parallel b, c \parallel d$، و $m\angle 4 = 57°$. أوجد قياس كلٍّ من الزوايا الآتية: (الدرس 2-2)



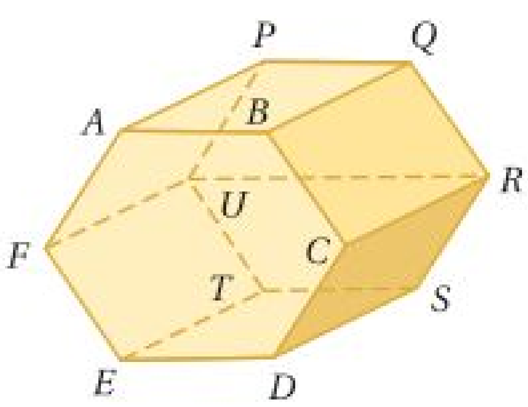
46) $\angle 5$

47) $\angle 1$

48) $\angle 8$

49) $\angle 10$

حدد كلًّا مما يأتي مستعملًا الشكل المجاور. (الدرس 2-1)



50) جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{TU}$.

51) جميع المستويات التي تتقاطع مع المستوى BCR.

52) جميع القطع المستقيمة التي تخالف $\overline{DE}$.

معتمدًا على المعطيات، حدد ما إذا كانت النتيجة صحيحة أم لا في كلٍّ مما يأتي. فسّر تبريرك. (الدرس 1-4)

53) المعطيات: $\angle B, \angle C$ متقابلتان بالرأس.
النتيجة: $\angle B \cong \angle C$

54) المعطيات: $\angle W \cong \angle Y$
النتيجة: $\angle W, \angle Y$ زاويتان متقابلتان بالرأس.

استعد للدرس اللاحق

حُل كل معادلة مما يأتي بالنسبة لـ y:

55) $3x + y = 5$

56) $4x + 2y = 6$

57) $4y - 3x = 5$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

2-5 صيغ معادلة المستقيم
Equations of Line

فيما سبق:
درستُ إيجاد ميل المستقيم. (الدرس 2-4)

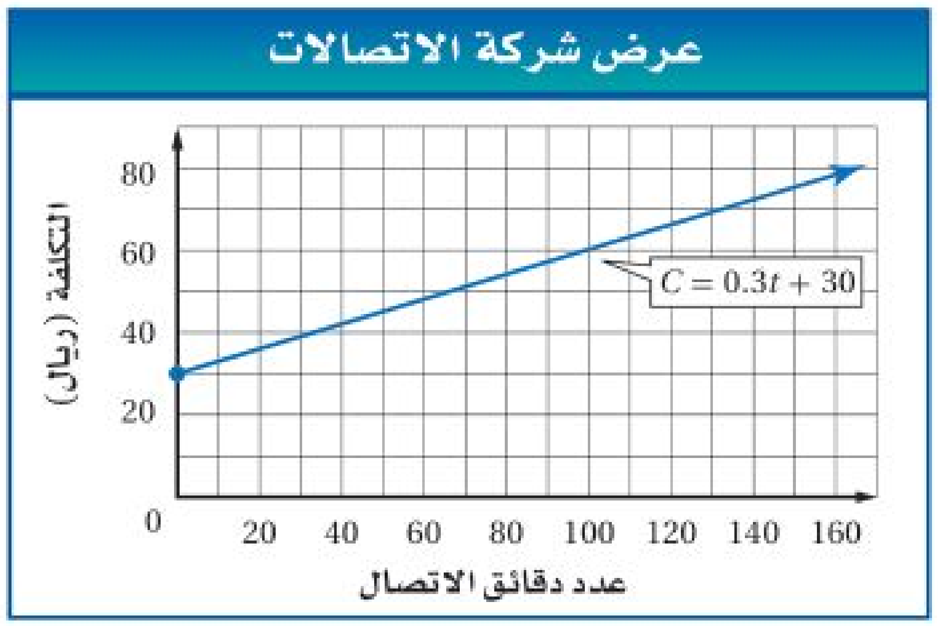
والآن:
- أكتب معادلة مستقيم إذا عرفتُ معلومات حول تمثيله البياني.
- أحل مسألة بكتابة معادلة مستقيم.

المفردات:
صيغة الميل والمقطع
slope-intercept form
صيغة الميل ونقطة
slope-point form

لماذا؟

قدَّمت إحدى شركات الاتصالات عرضًا يدفع بموجبه المشترك 30 ريالًا شهريًّا بالإضافة إلى 0.30 ريال عن كل دقيقة اتصال. فإذا رمزنا للتكلفة الشهرية بالرمز C، ولعدد دقائق الاتصال بالرمز t، فإن:

$$C = 0.3t + 30$$



كتابة معادلة المستقيم: تذكر أنه يمكن كتابة معادلة المستقيم بصيغ مختلفة، ولكنها متكافئة.

مفهوم أساسي — معادلة المستقيم غير الرأسي

أضف إلى مطويتك

صيغة الميل والمقطع لمعادلة المستقيم هي $y = mx + b$، حيث m ميل المستقيم، و b مقطع المحور y.

$$\underbrace{y = 3x + 8}_{}\qquad y = mx + b$$

الميل: 3 ، m — مقطع المحور y: 8 ، b

صيغة الميل ونقطة لمعادلة المستقيم هي $y - y_1 = m(x - x_1)$، حيث (x_1, y_1) إحداثيًا أيَ نقطة على المستقيم، m ميل المستقيم.

نقطة على المستقيم $(3, 5)$

$$y - 5 = -2\,(x - 3)$$

الميل: -2

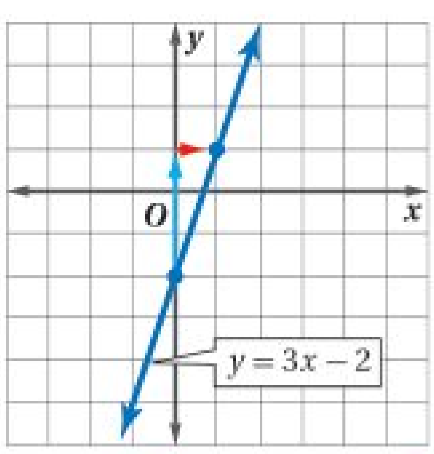
إذا علمت الميل ومقطع المحور y أو نقطة على المستقيم، فإنه يمكنك استعمال هاتين الصيغتين لتكتب معادلة المستقيم.

مثال 1 — معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي ميله 3، ومقطع المحور y له -2، ثم مثّله بيانيًّا.

$y = mx + b$	صيغة الميل والمقطع
$y = 3x + (-2)$	$m = 3, b = -2$
$y = 3x - 2$	بسّط

على المستوى الإحداثي، عيِّن نقطة مقطع المحور y عند $y = -2$، واستعمل قيمة الميل $\frac{3}{1} = 3$ لتحدد نقطة أخرى، وذلك بالانتقال 3 وحدات أعلى مقطع المحور y، ثم وحدة واحدة إلى يمينه. ارسم المستقيم الذي يمر بهاتين النقطتين.



تحقق من فهمك

1) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{1}{2}$، ومقطع المحور y له 8، ثم مثّله بيانيًّا.

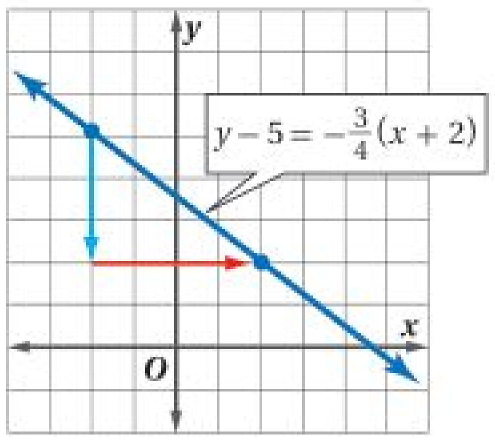
تنبيه !

التعويض بإحداثيات سالبة
عند التعويض بإحداثيات سالبة، استعمل الأقواس لتتجنب الوقوع في أخطاء الإشارات.

مثال 2 معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة

اكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم الذي ميله $-\frac{3}{4}$ ، ويمر بالنقطة $(-2, 5)$ ، ثم مثِّله بيانيًّا.

$y - y_1 = m(x - x_1)$	صيغة الميل ونقطة
$y - 5 = -\frac{3}{4}[x - (-2)]$	$m = -\frac{3}{4}, (x_1, y_1) = (-2, 5)$
$y - 5 = -\frac{3}{4}(x + 2)$	بسّط



عيّن النقطة $(-2, 5)$ في المستوى الإحداثي.
واستعمل قيمة الميل $-\frac{3}{4} = \frac{-3}{4}$ لتحدد نقطة أخرى؛ وذلك بالانتقال 3 وحدات أسفل النقطة $(-2, 5)$، ثم 4 وحدات إلى يمينها.
ارسم المستقيم المار بهاتين النقطتين.

✓ تحقق من فهمك

2) اكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم الذي ميله 4 ، ويمر بالنقطة $(-3, -6)$، ثم مثّله بيانيًّا.

عندما لا يُعطى ميل المستقيم، استعمل أي نقطتين عليه لحساب ميله، ثم استعمل صيغة الميل ونقطة، أو الميل والمقطع لتكتب معادلته.

إرشادات للدراسة

طريقة بديلة
في المثال 3b، يمكنك تعويض إحداثيَّي إحدى النقطتين في صيغة الميل والمقطع لإيجاد مقطع المحور y ، ثم كتابة المعادلة.

$$y = mx + b$$
$$4 = -\frac{1}{2}(-7) + b$$
$$4 = \frac{7}{2} + b$$
$$4 - \frac{7}{2} = b$$
$$b = \frac{1}{2}$$
لذا $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

مثال 3 معادلة المستقيم المار بنقطتين معلومتين

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المار بكل زوج نقاط فيما يأتي:

a) $(0, 3), (-2, -1)$

الخطوة 1: أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - 3}{-2 - 0} = \frac{-4}{-2} = 2$$ استعمل صيغة الميل

الخطوة 2: اكتب معادلة المستقيم.

$y = mx + b$	صيغة الميل والمقطع
$y = 2x + 3$	$b = 3, m = 2$

b) $(-7, 4), (9, -4)$

الخطوة 1: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4 - 4}{9 - (-7)} = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2}$ استعمل صيغة الميل

الخطوة 2:

$y - y_1 = m(x - x_1)$	صيغة الميل ونقطة
$y - 4 = -\frac{1}{2}[x - (-7)]$	$m = -\frac{1}{2}, (x_1, y_1) = (-7, 4)$
$y - 4 = -\frac{1}{2}(x + 7)$	بسّط
$y - 4 = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$	بالتوزيع
$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$	اجمع 4 لكلا الطرفين

✓ تحقق من فهمك

3A) $(-2, 4), (8, 10)$ **3B)** $(0, 0), (2, 6)$

مثال 4 معادلة المستقيم الأفقي

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(5, 6)$ ، $(-2, 6)$.

الخطوة 1: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 6}{5 - (-2)} = \frac{0}{7} = 0$

الخطوة 2:

$y - y_1 = m(x - x_1)$	صيغة الميل ونقطة
$y - 6 = 0\,[x - (-2)]$	$m = 0, (x_1, y_1) = (-2, 6)$
$y - 6 = 0$	بسّط
$y = 6$	اجمع 6 لكلا الطرفين

✓ تحقق من فهمك

4) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(3, 0)$ ، $(5, 0)$.

تحتوي معادلات المستقيمات الأفقية أو الرأسية متغيرًا واحدًا فقط.

مفهوم أساسي معادلات المستقيمات الأفقية أو الرأسية

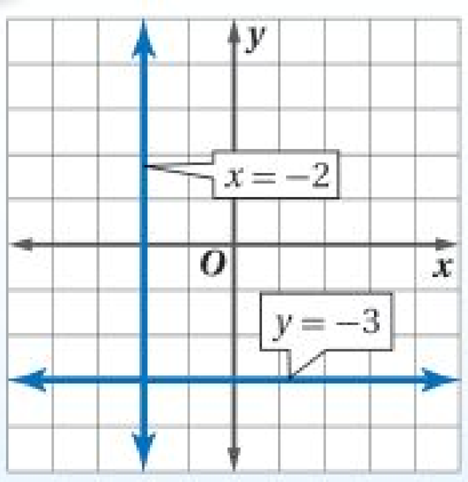
أضف إلى مطويتك

معادلة المستقيم الأفقي هي $y = b$ ،
حيث b مقطع المحور y له.

مثال: $y = -3$

معادلة المستقيم الرأسي هي $x = a$ ،
حيث a مقطع المحور x له.

مثال: $x = -2$



المستقيمات المتوازية غير الرأسية لها الميل نفسه. ويكون المستقيمان غير الرأسيين متعامدين إذا كان ناتج ضرب ميليهما يساوي -1. والمستقيم الرأسي والمستقيم الأفقي دائمًا متعامدان.

مثال 5 معادلات المستقيمات المتوازية أو المتعامدة

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم العمودي على $y = -3x + 2$ ، والمار بالنقطة $(4, 0)$.

ميل المستقيم $y = -3x + 2$ يساوي -3 ؛ لذا فإن ميل المستقيم العمودي عليه يساوي $\frac{1}{3}$.

$y = mx + b$	صيغة الميل والمقطع
$0 = \frac{1}{3}(4) + b$	$m = \frac{1}{3}, (x, y) = (4, 0)$
$0 = \frac{4}{3} + b$	بسّط
$-\frac{4}{3} = b$	اطرح $\frac{4}{3}$ من كلا الطرفين

لذا فمعادلة المستقيم العمودي هي $y = \frac{1}{3}x + \left(-\frac{4}{3}\right)$ ، أو $y = \frac{1}{3}x - 1\frac{1}{3}$.

✓ تحقق من فهمك

5) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي يوازي $y = -\frac{3}{4}x + 3$ ويمر بالنقطة $(-3, 6)$.

قراءة الرياضيات

خطي: كلمة منسوبة إلى خط، وتتضمن معنى الاستقامة. وسميت المعادلات الخطية بهذا الاسم؛ لأن تمثيلها البياني خط مستقيم.

كتابة معادلات لحل المسائل: يمكن تمثيل كثير من المواقف الحياتية باستعمال معادلة خطية.

مثال 6 من واقع الحياة — كتابة معادلة خطيّة

هواتف: يقارن علي بين عرضين مقدمين من شركة اتصالات. يدفع بموجب العرض X مبلغ 20 ريالًا شهريًّا بالإضافة إلى 0.35 ريال عن كل دقيقة اتصال. أما العرض Y فتفاصيله موضحة في فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. أي العرضين أفضل لعلي؟

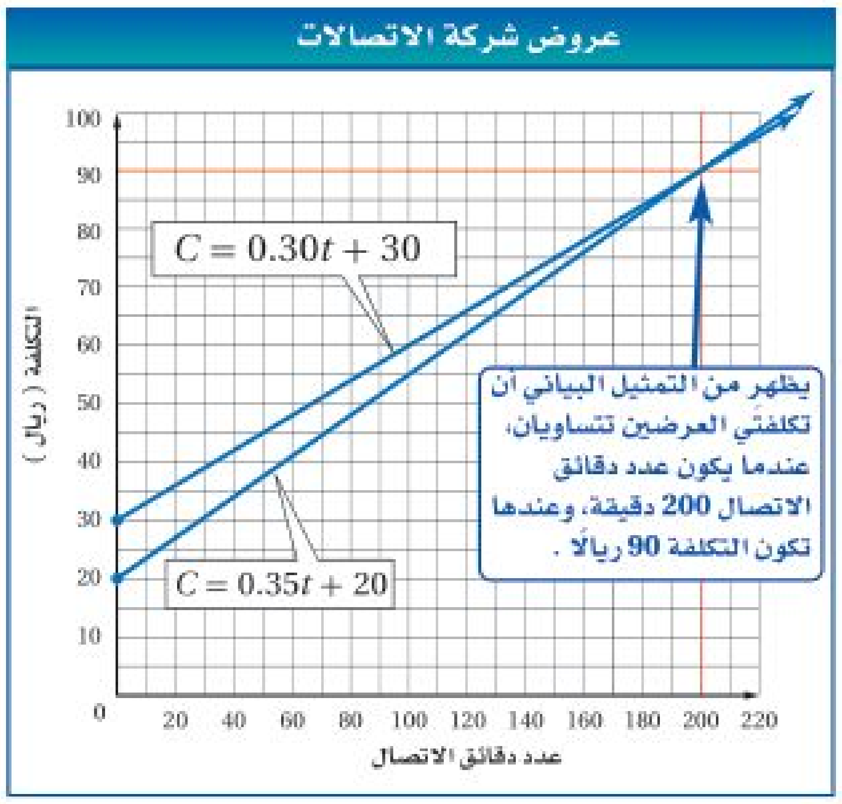
افهم: العرض X : 20 ريالًا شهريًّا زائد 0.35 ريال عن كل دقيقة اتصال.
العرض Y : 30 ريالًا شهريًّا زائد 0.30 ريال عن كل دقيقة اتصال.
قارن بين العرضين لتحدد متى تكون التكلفة الشهرية لأحدهما أقل من التكلفة الشهرية للآخر.

خطط: اكتب معادلة تمثل التكلفة الشهرية C لكلٍّ من العرضين لعدد t من دقائق الاتصال، ثم مثّل المعادلتين بيانيًّا وقارن.

حل: معدَّلا التزايد أو مَيلا معادلتَي التكلفة الشهرية هما 0.35 للعرض X، و 0.30 للعرض Y، وعندما يكون عدد دقائق الاتصال صفرًا، تكون التكلفة الشهرية هي الرسوم فقط؛ لذا فإن مقطع المحور y هو 20 للعرض X، و 30 للعرض Y.

العرض X		العرض Y
$C = mt + b$	صيغة الميل والمقطع	$C = mt + b$
$C = 0.35t + 20$	بالتعويض عن m و b	$C = 0.30t + 30$

عروض شركة الاتصالات



ويظهر أيضًا من التمثيل البياني أنه إذا كان عدد دقائق الاتصال أقل من 200 دقيقة في الشهر ، فإن تكلفة العرض X أقل، بينما تكون تكلفة العرض Y أقل إذا كان عدد دقائق الاتصال أكثر من 200 دقيقة في الشهر.

تحقق: تحقق من تقديرك. إذا كان عدد دقائق الاتصال يساوي 200 دقيقة ، فإن تكلفة العرض X هي $0.35(200) + 20 = 90$ ، وتكلفة العرض Y هي $0.30(200) + 30 = 90$ ✔

إرشادات حل المسألة

التمثيل البياني

في **المثال 6** ، مع أن الرسوم الشهرية في العرض X أقل، إلا أن سعر دقيقة الاتصال الواحدة أعلى. وهذا يجعل المقارنة بين العرضين صعبة. إلَّا أن التمثيل البياني يُسهِّل المقارنة بين موقفين خطيَّين في كثير من الأحيان.

✓ تحقق من فهمك

6) وضع نادي عرضين مختلفين لروَّاده.
العرض X: رسوم اشتراك شهرية مقدارها 75 ريالًا زائد 20 ريالًا عن كل زيارة للنادي.
العرض Y: 35 ريالًا عن كل زيارة للنادي من دون رسوم اشتراك.
فأيُّ العرضين أفضل؟

تأكد

المثال 1 اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المُعطى ميله ومقطع المحور y له في كلٍّ مما يأتي، ثم مثّله بيانيًّا:

1) $m = 4, b = -3$ 2) $m = \frac{1}{2}, b = -1$ 3) $m = -\frac{3}{2}, b = 5$

المثال 2 اكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم المُعطى ميله ونقطة يمر بها في كلٍّ مما يأتي، ثم مثّله بيانيًّا:

4) $m = 5, (3, -2)$ 5) $m = \frac{1}{4}, (-2, -3)$ 6) $m = -4.25, (-4, 6)$

المثالان 3, 4 اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي أُعطيت نقطتان يمر بهما في كلٍّ مما يأتي:

7) $(0, -1), (4, 4)$ 8) $(4, 3), (1, -6)$ 9) $(6, 5), (-1, -4)$

المثال 5

10) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم العمودي على $y = -2x + 6$، والمار بالنقطة $(3, 2)$.

11) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(-1, 5)$، ويوازي المستقيم الذي معادلته $y = 4x - 5$.

المثال 6

12) **عروض:** يقارن سلمان بين عرضين مقدمين من نادٍ رياضي. يدفع بموجب العرض الأول اشتراكًا شهريًّا قدره 100 ريال، بالإضافة إلى 10 ريالاتٍ عن كل زيارة. ويدفع بموجب العرض الثاني اشتراكًا شهريًّا قدره 150 ريالًا، ويسمح له بعشر زيارات شهريًّا.

a) اكتب معادلة تمثل التكلفة الشهرية لكلٍّ من العرضين.

b) مثّل كلتا المعادلتين بيانيًّا.

c) إذا كان سلمان يريد الذهاب إلى النادي 7 مراتٍ شهريًّا، فهل يشترك في العرض الأول أم الثاني؟ فسّر إجابتك.

تدرب وحل المسائل

المثال 1 اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المُعطى ميله ومقطع المحور y له في كلٍّ مما يأتي، ثم مثّله بيانيًّا:

13) $m = -5, b = -2$ 14) $m = -7, b = -4$ 15) $m = 9, b = 2$

16) $m = 12, b = \frac{4}{5}$ 17) $m = -\frac{3}{4}, (0, 4)$ 18) $m = \frac{5}{11}, (0, -3)$

المثال 2 اكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم المُعطى ميله ونقطة يمر بها في كلٍّ مما يأتي، ثم مثّله بيانيًّا:

19) $m = 2, (3, 11)$ 20) $m = 4, (-4, 8)$ 21) $m = -7, (1, 9)$

22) $m = \frac{5}{7}, (-2, -5)$ 23) $m = -\frac{4}{5}, (-3, -6)$ 24) $m = -2.4, (14, -12)$

المثالان 3, 4 اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي أعطيت نقطتان يمر بهما في كلٍّ مما يأتي:

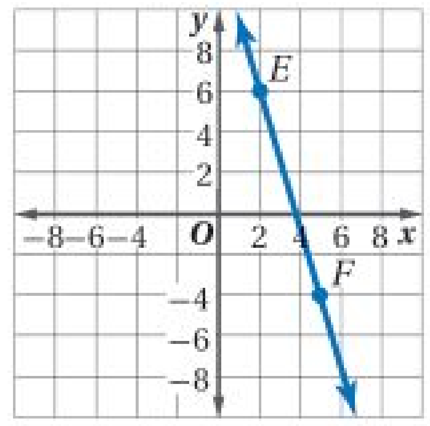
25) $(-1, -4), (3, -4)$ 26) $(2, -1), (2, 6)$

27) $(-3, -2), (-3, 4)$ 28) $(0, 5), (3, 3)$

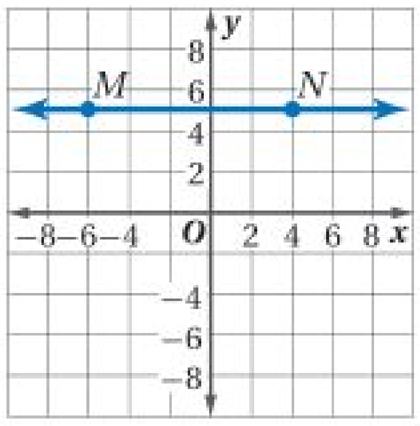
29) $(-12, -6), (8, 9)$ 30) $(2, 4), (-4, -11)$

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الممثل بيانيًا، أو المعطى وصفه في كلٍّ مما يأتي:

31) $\overleftrightarrow{EF}$



32) $\overleftrightarrow{MN}$



33) يحوي النقطتين $(3, 4)$ ، $(-2, -1)$

34) يحوي النقطتين $(-8, -13)$ ، $(-4, -5)$

35) مقطع المحور x يساوي 3، ومقطع المحور y يساوي -2

36) مقطع المحور x يساوي $-\frac{1}{2}$، ومقطع المحور y يساوي 4

المثال 5 اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي يحقق المعطيات في كلٍّ مما يأتي :

37) يمر بالنقطة $(-4, -7)$، ويعامد المستقيم $y = \frac{1}{2}x + 9$.

38) يمر بالنقطة $(-1, -10)$، ويوازي المستقيم $y = 7$.

39) يمر بالنقطة $(6, 2)$، ويوازي المستقيم $y = -\frac{2}{3}x + 1$.

40) يمر بالنقطة $(-2, 2)$، ويعامد المستقيم $y = -5x - 8$.

المثال 6

41) **جمعية خيرية :** نظَّمت جمعية خيرية حفلًا لتكريم مجموعة من حفظة القرآن الكريم، فاستأجرت قاعة لتقيم فيها الحفل. إذا كانت أجرة القاعة 1500 ريال بالإضافة إلى 15.5 ريالًا عن كل شخص يحضر الحفل.

a) اكتب معادلة تمثل تكلفة استئجار القاعة y إذا حضر x شخصًا.

b) مثّل المعادلة بيانيًّا.

c) إذا حضر الحفل 285 شخصًا، فكم تكون تكلفة استئجار القاعة؟

d) إذا رصدت الجمعية 6000 ريال لاستئجار القاعة، فما عدد الأشخاص الذين يمكن أن يحضروا الحفل؟

42) **توفير:** يوفر عبد الله نقودًا ليشتري مذياعًا مرتبطًا بالأقمار الاصطناعية، ويدفع رسوم الاشتراك السنوي بخدمة الأقمار الاصطناعية . فبدأ بتوفير 200 ريال أُهديت إليه في عيد الأضحى ، وبعد ذلك كان يضيف 40 ريالًا كل أسبوع .

a) اكتب معادلة تمثل ما وفّره عبد الله y بعد x أسبوعًا.

b) مثّل المعادلة بيانيًّا.

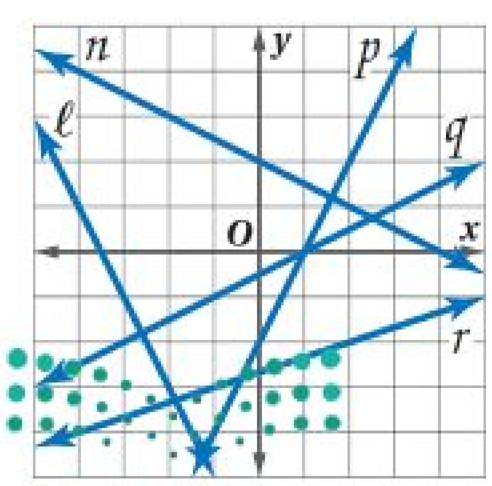
c) متى يوفر 500 ريال؟

d) إذا بدأ التوفير منذ أسبوعين، وكان ثمن المذياع 700 ريال ، ورسم الاشتراك السنوي بخدمة الأقمار الاصطناعية 420 ريالًا ، فمتى يوفر مبلغًا يكفي لذلك ؟ فسِّر إجابتك.

الربط مع الحياة

تصل إشارات بث إذاعة FM إلى $(48 - 64)$ km تقريبًا. أما إشارات البث الإذاعي بواسطة الأقمار الاصطناعية فتصل إلى أكثر من 35200 km

استعمل الشكل المجاور لتسمي أي مستقيم يحقق الوصف في كلٍّ مما يأتي:



43) يوازي المستقيم $y = 2x - 3$.

44) يعامد المستقيم $y = \frac{1}{2}x + 7$.

45) يتقاطع مع المستقيم $y = \frac{1}{2}x - 5$ ، ولكنه لا يعامده.

حدِّد ما إذا كان المستقيمان متوازيين أو متعامدين، أو غير ذلك في كلٍّ ممّا يأتي:

46) $y = 2x + 4, y = 2x - 10$

47) $y = -\frac{1}{2}x - 12, y = 2x + 7$

48) $y - 4 = 3(x + 5), y + 3 = -\frac{1}{3}(x + 1)$

49) $y - 3 = 6(x + 2), y + 3 = -\frac{1}{3}(x - 4)$

50) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(4, 2)$ ويوازي المستقيم $y - 2 = 3(x + 7)$.

51) اكتب معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(-8, 12)$ ويعامد المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(-7, 2)$, $(3, 2)$.

52) **صناعة الفخار:** نظَّمت جمعية حِرَف يدوية دورة في صناعة الفخار، وكان رسم الاشتراك 150 ريالًا، بحيث يغطي اللوازم والمواد وكيسًا واحدًا من طين الصلصال. وكل كيس إضافي يكلف 40 ريالًا. اكتب معادلة تمثل تكلفة الاشتراك وعدد x من الأكياس المستعملة.

الربط مع الحياة

بعد تشكيل الآنية من الصلصال، يتم إدخالها في أفران خاصة عند درجة حرارة تفوق $500°C$.

53) **تمثيلات متعددة:** طلب مدير قصر أفراح من بسام أن ينظِّم وقوف السيارات في أثناء حفل. وقدّم له عرضين للأجر؛ أحدهما أن يدفع له 4 ريالاتٍ عن كل سيارة، والآخر أن يعطيه أجرًا مقداره 150 ريالًا بالإضافة إلى ريالين عن كل سيارة.

a) **جدوليًّا:** أنشئ جدولًا يبيّن ما يتقاضاه بسام عن 20، 50، 100 سيارة في كلا العرضين.

b) **عدديًّا:** اكتب معادلة تمثّل ما يكسبه بسام من كل عرض.

c) **بيانيًّا:** مثِّل بيانيًّا كلًّا من معادلتَي العرضين.

d) **تحليليًّا:** أيُّ العرضين أكثر كسبًا لبسام، إذا كان عدد السيارات 35 سيارةً؟ وأيُّهما أكثر كسبًا لبسام، إذا كان عدد السيارات 80 سيارةً؟ وضح إجابتك.

e) **لفظيًّا:** اكتب عبارة تصف العرض الأكثر كسبًا لبسام تبعًا لعدد السيارات.

f) **منطقيًّا:** إذا كان عدد السيارات 75 سيارةً، فأي العرضين أكثر كسبًا لبسام؟ وضّح تبريرك.

مسائل مهارات التفكير العليا

54) **تحدٍّ:** أوجد قيمة n، بحيث يمر المستقيم العمودي على المستقيم $-2y + 4 = 6x + 8$ بالنقطتين $(n, -4), (2, -8)$.

55) **تبرير:** حدّد ما إذا كانت النقاط $(6, 8)$ ،$(2, 5)$ ،$(-2, 2)$ تقع على استقامة واحدة. برّر إجابتك.

56) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلات زوجين مختلفين من المستقيمات المتعامدة التي تتقاطع في النقطة $(-3, -7)$.

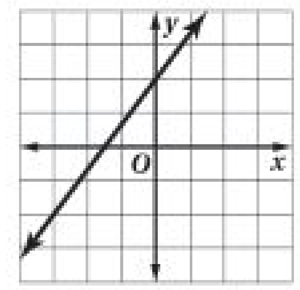
57) **اكتشف الخطأ:** كتب كلٌّ من راكان وفيصل معادلة مستقيم ميله -5 ، ويمر بالنقطة $(-2, 4)$، أيُّهما إجابته صحيحة؟ وضّح تبريرك.

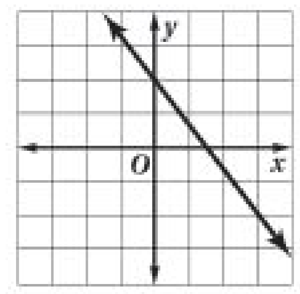
فيصل	راكان
$y - 4 = -5(x - (-2))$ $y - 4 = -5(x + 2)$ $y - 4 = -5x - 10$ $y = -5x - 6$	$y - 4 = -5(x - (-2))$ $y - 4 = -5(x + 2)$

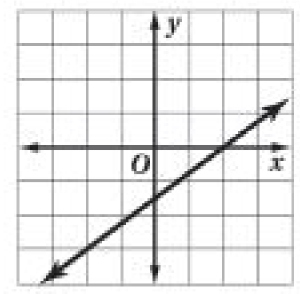
58) **اكتب:** أيهما أسهل كتابة: معادلة مستقيم بصيغة الميل ونقطة، أم بصيغة الميل والمقطع؟

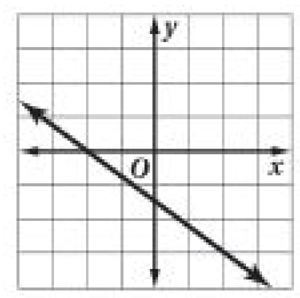
تدريب على اختبار

59) أيٌّ مما يأتي هو التمثيل البياني للمستقيم الذي يمر بالنقطة $(-2, -3)$؟

A


B


C


D


60) أيٌّ مما يأتي هي معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(-2, 1)$ ، ويعامد المستقيم $y = \frac{1}{3}x + 5$؟

A $y = 3x + 7$

B $y = \frac{1}{3}x + 7$

C $y = -3x - 5$

D $y = -\frac{1}{3}x - 5$

مراجعة تراكمية

أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين A, B في كلٍّ مما يأتي: (الدرس 2-4)

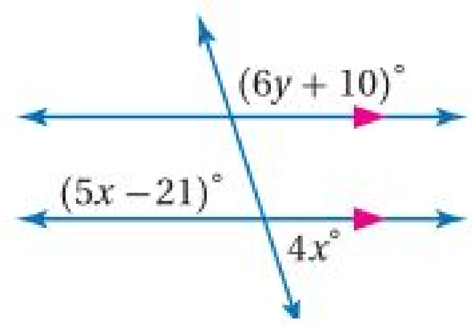
61) $A(4, 3), B(5, -2)$

62) $A(0, 2), B(-3, -4)$

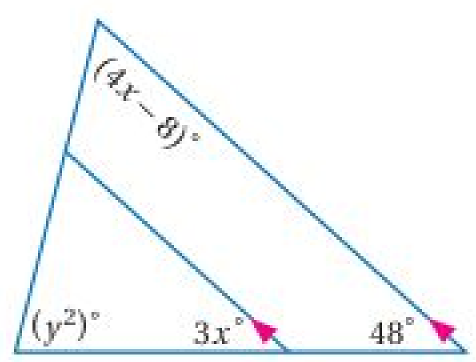
63) $A(2, 5), B(5, 1)$

أوجد قيمة x, y في كلٍّ من الشكلين الآتيين : (الدرس 2-2)

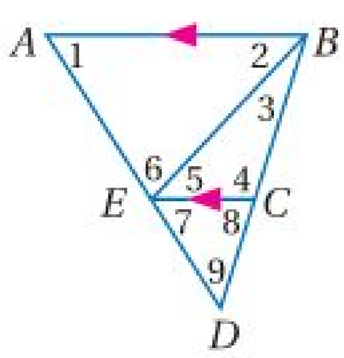
64)



65)



في الشكل المجاور: $m\angle 1 = 58^\circ$, $m\angle 2 = 47^\circ$, $m\angle 3 = 26^\circ$. أوجد قياس كلٍّ من الزوايا الآتية: (الدرس 2-2)



66) $\angle 7$

67) $\angle 5$

68) $\angle 6$

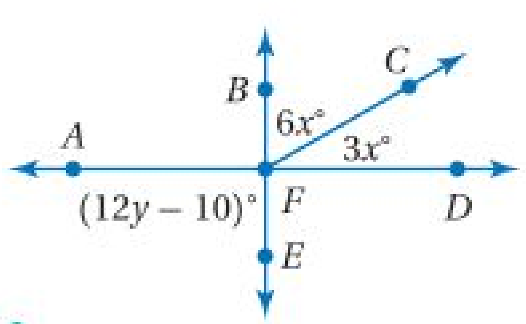
69) $\angle 4$

70) $\angle 8$

71) $\angle 9$

استعد للدرس اللاحق

72) إذا كان $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ متعامدتين، فأوجد قيمة كلٍّ من x, y



وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

توسّع معمل الهندسة

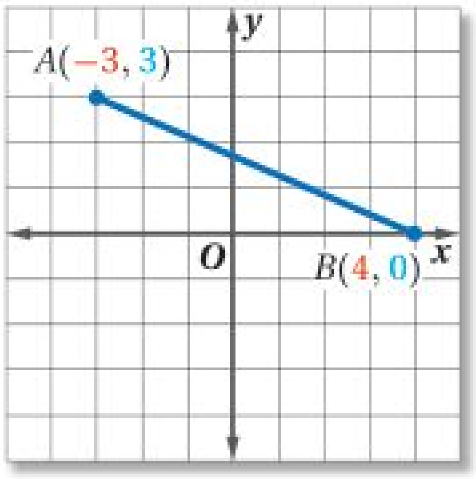
2-5 معادلة العمود المنصف

Equations of Perpendicular Bisectors

يمكنك تطبيق ما تعلمته عن الميل ومعادلة المستقيم لإيجاد معادلة العمود المنصف لقطعة مستقيمة.

نشاط

أوجد معادلة العمود المنصِّف للقطعة المستقيمة $\overline{AB}$ إذا كان طرفاها هما النقطتين $A(-3, 3)$, $B(4, 0)$، ثم مثّله بيانيًّا.



الخطوة 1: منصّف القطعة المستقيمة يمر بنقطة منتصفها.

استعمل صيغة نقطة المنتصف لتجد نقطة منتصف $\overline{AB}$.

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = M\left(\frac{-3+4}{2}, \frac{3+0}{2}\right)$$
$$= M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

الخطوة 2: يكون العمود المنصّف عموديًّا على القطعة المستقيمة، ويمر بنقطة منتصفها. ولتجد ميل العمود المنصّف أوجد أولًا ميل $\overline{AB}$.

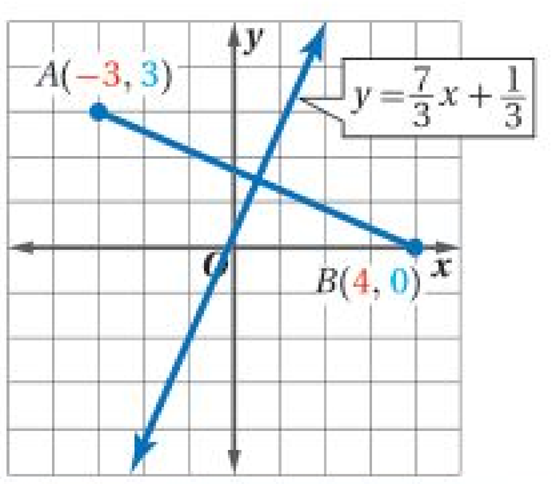
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{صيغة الميل}$$
$$= \frac{0-3}{4-(-3)} \quad x_1 = -3, x_2 = 4, y_1 = 3, y_2 = 0$$
$$= -\frac{3}{7} \quad \text{بسّط}$$

الخطوة 3: استعمل صيغة الميل ونقطة لكتابة معادلة المستقيم.

ميل العمود المنصّف يساوي $\frac{7}{3}$؛ لأن $-\frac{3}{7}\left(\frac{7}{3}\right) = -1$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{صيغة الميل ونقطة}$$
$$y - \frac{3}{2} = \frac{7}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad m = \frac{7}{3}, (x_1, y_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$
$$y - \frac{3}{2} = \frac{7}{3}x - \frac{7}{6} \quad \text{خاصية التوزيع}$$
$$y = \frac{7}{3}x + \frac{1}{3} \quad \text{اجمع } \frac{3}{2} \text{ لكلا الطرفين}$$

الخطوة 4: للتحقق: مثّل المستقيم $y = \frac{7}{3}x + 3$



تمارين:

أوجد معادلة العمود المنصّف للقطعة المستقيمة $\overline{PQ}$ ، ومثله بيانيًّا في كلٍّ مما يأتي:

1) $P(5, 2), Q(7, 4)$

2) $P(-3, 9), Q(-1, 5)$

3) $P(-2, 1), Q(0, -3)$

4) $P(0, 1.6), Q(0.5, 2.1)$

2-6 الأعمدة والمسافة
Perpendiculars and Distance

فيما سبق:

درستُ كتابة معادلة مستقيم عُرفت معلومات حول تمثيله البياني.

(الدرس 2-5)

والآن:

- أجد البعد بين نقطة ومستقيم.
- أجد البعد بين مستقيمين متوازيين.

المفردات:

المسافة العمودية
perpendicular distance

البعد بين نقطة ومستقيم
distance from a point to a line

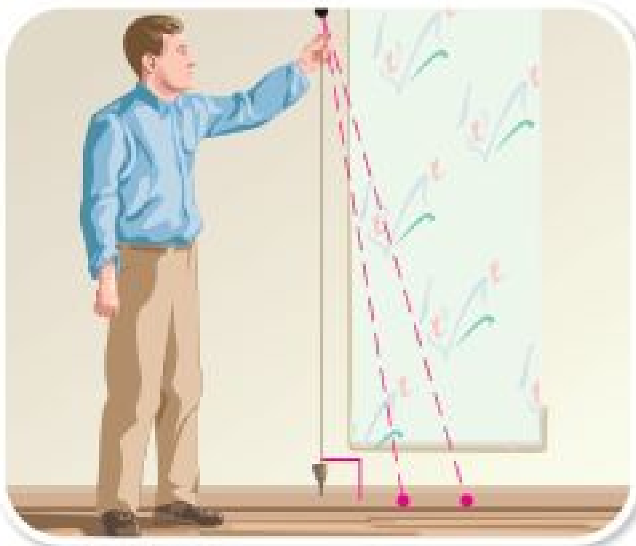
المحل الهندسي
locus

متساوي البعد
equidistant

لماذا؟

الخيط الشاقولي عبارة عن خيط مربوط في أحد طرفيه ثقل معدني يسمى الشاقول، وعندما يُعلق الخيط من طرفه الآخر يتأرجح الشاقول تأرجحًا حرًّا، ثم يسكن بحيث يكون تحت نقطة التعليق مباشرة.

يُستعمل الخيط الشاقولي؛ لإنشاء خط رأسي عند البناء أو عند لصق ورق الجدران.



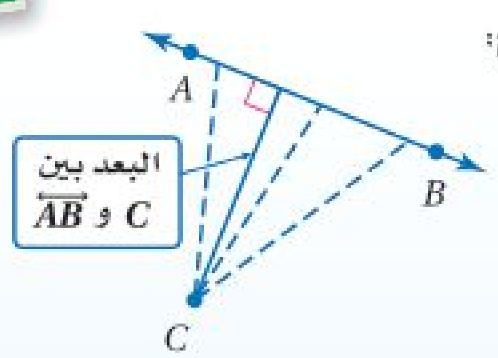
البعد بين نقطة ومستقيم: يمثل طول الخيط الشاقولي أقصر مسافة بين نقطة التعليق ومستوى الأرض أسفله. **فالمسافة العمودية** بين نقطة ومستقيم هي أقصر مسافة في جميع الحالات، وهي تمثل **البعد بين النقطة والمستقيم**.

مفهوم أساسي — البُعد بين نقطة ومستقيم

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: البعد بين مستقيم ونقطة لا تقع عليه هو طول القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من تلك النقطة.

النموذج:



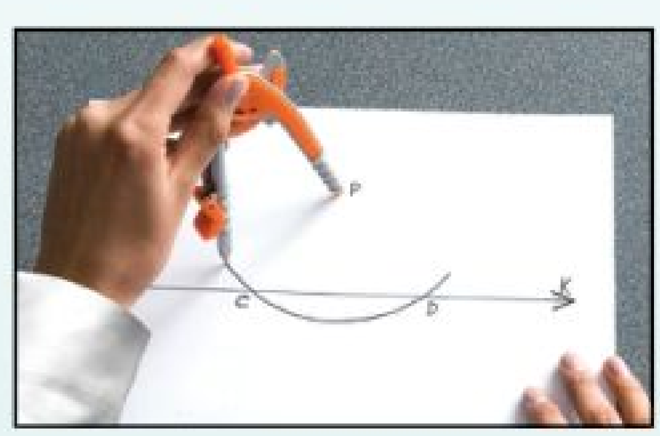
إن إنشاء مستقيم عمودي على مستقيم معلوم من نقطة لا تقع عليه، يبين أنه يوجد مستقيم واحد فقط يمر بتلك النقطة ويكون عموديًّا على المستقيم.

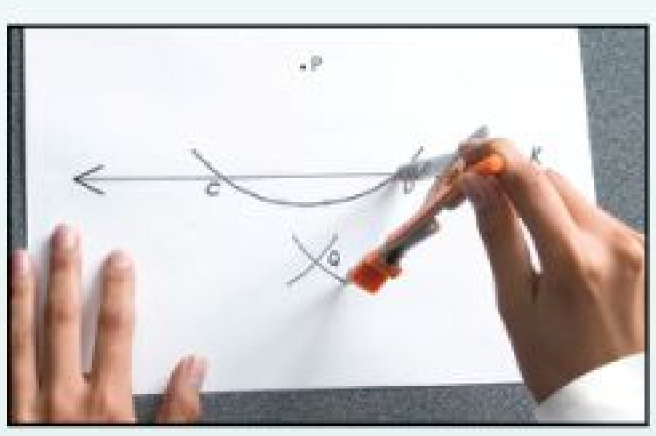
إنشاءات هندسية — إنشاء مستقيم عمودي على مستقيم من نقطة لا تقع عليه

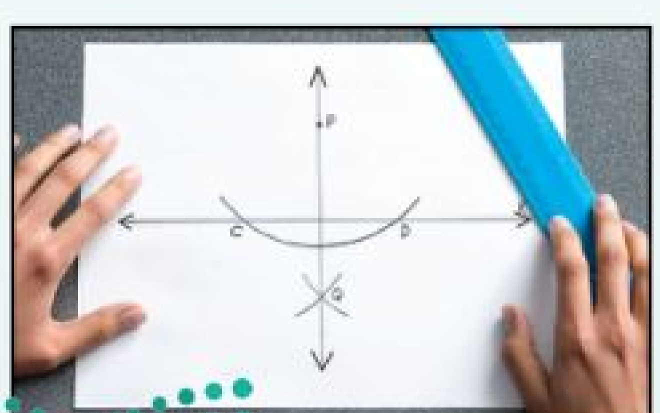
الخطوة 1: ضع الفرجار عند النقطة P. وارسم قوسًا يقطع k في موقعين مختلفين. سم نقطتَي التقاطع C, D

الخطوة 2: ضع الفرجار عند النقطة C، وارسم قوسًا تحت المستقيم k باستعمال فتحة فرجار أكبر من $\frac{1}{2}CD$ وباستعمال فتحة الفرجار نفسها، ارسم من D قوسًا آخر يقطع القوس السابق. وسم نقطة التقاطع Q.

الخطوة 3: استعمل مسطرة لرسم $\overleftrightarrow{PQ}$







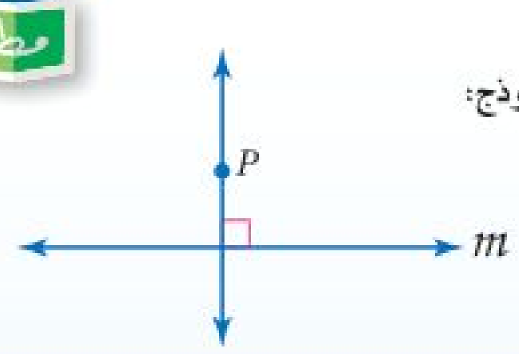
تنص المسلمة الآتية على أن المستقيم العمودي على مستقيم معلوم من نقطة لا تقع عليه هو مستقيم وحيد.

مسلّمة 2.6 مسلمة التعامد

أضف إلى مطويتك

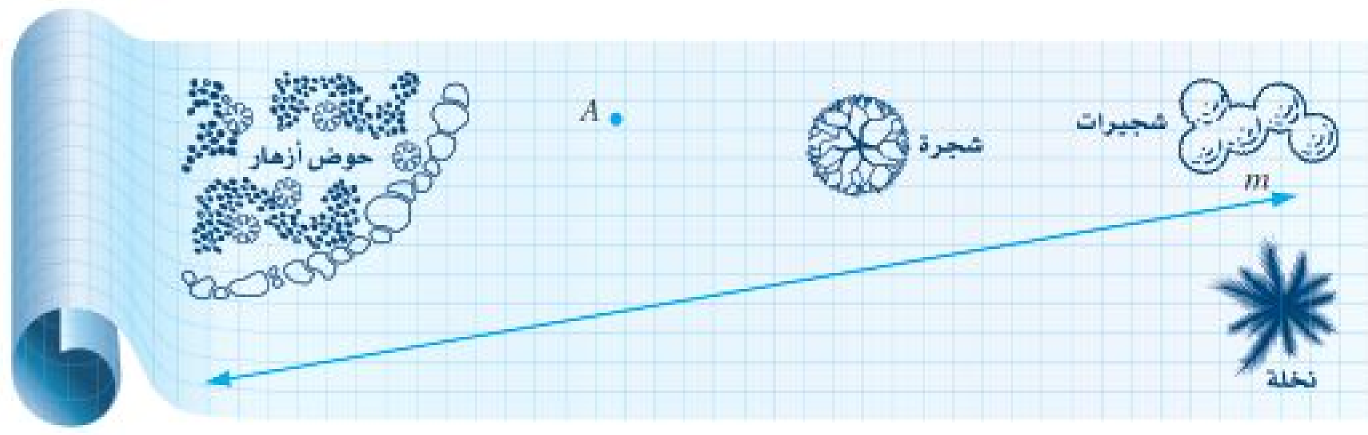
التعبير اللفظي: لأي مستقيم ونقطة لا تقع عليه يوجد مستقيم واحد فقط يمر بالنقطة، ويكون عموديًا على المستقيم المعلوم.

النموذج:



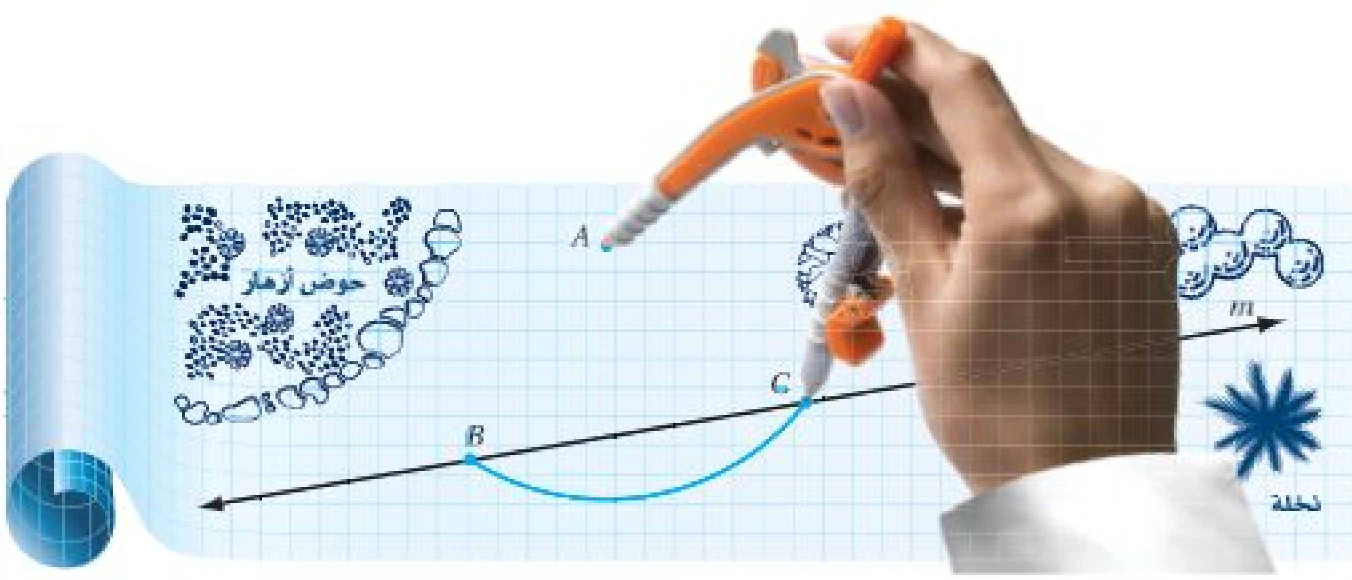
مثال 1 من واقع الحياة إنشاء أقصر قطعة مستقيمة بين نقطة ومستقيم

هندسة مدنية: لاحظ مهندس مدني أن جزءًا من ساحة حديقة عامة تتجمع عنده المياه. ويريد أن يضع أنبوب تصريف أرضيًّا من النقطة A وسط هذه المنطقة إلى خط التصريف الرئيس الممثل بالمستقيم m. أنشئ القطعة المستقيمة التي يُمثّل طولها أقصر أنبوب يربط خط التصريف الرئيس بالنقطة A.

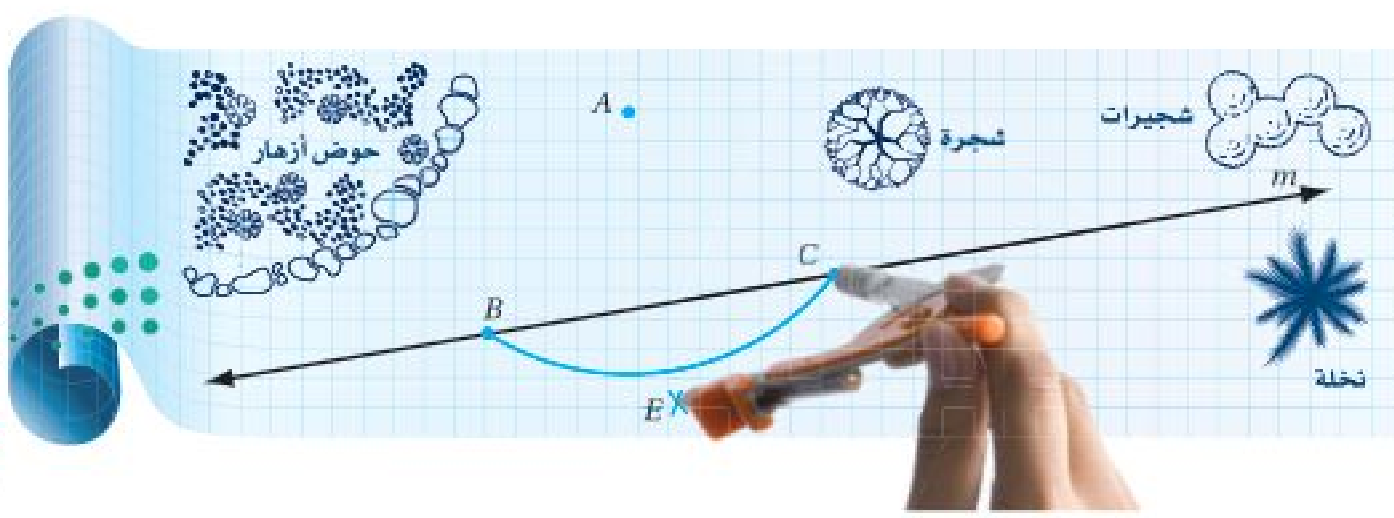


القطعة المستقيمة التي يمثل طولها أقصر أنبوب، هي القطعة المستقيمة العمودية من النقطة إلى المستقيم. لإنشاء القطعة المستقيمة اتبع الخطوات التالية:

الخطوة 1: استعمل الفرجار لتعيّن النقطتين B, C على المستقيم m، بحيث تكونا على البعد نفسه من النقطة A ، وذلك بوضع رأس الفرجار عند النقطة A ورسم قوس يقطع m في النقطتين B, C



الخطوة 2: استعمل الفرجار لتعيِّن نقطة أخرى مثل E لا تقع على المستقيم m ، وتكون على البعد نفسه من B, C ، وذلك بوضع رأس الفرجار عند النقطة C، ورسم قوس تحت المستقيم m باستعمال فتحة فرجار أكبر من $\frac{1}{2}\ BC$ ، ورسم قوس آخر يتقاطع مع القوس السابق عند E باستعمال فتحة الفرجار نفسها بوضع رأس الفرجار عند B



الربط مع الحياة

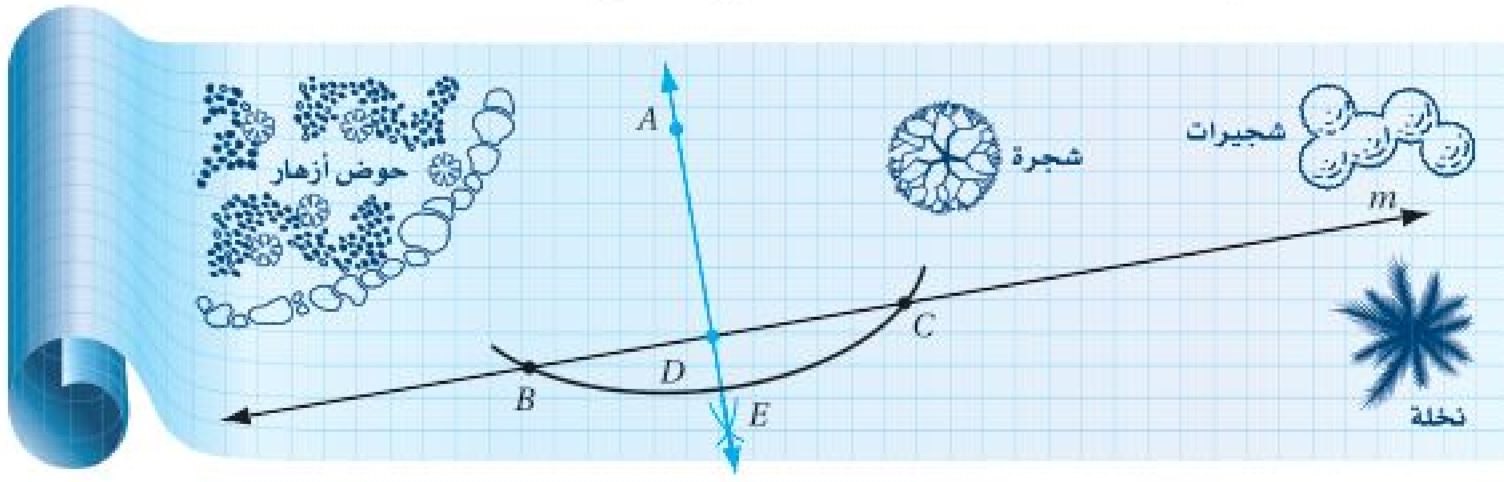
تقسم الهندسة المدنية إلى تخصصات منها: هندسة الإنشاءات، وهندسة الطرق، وهندسة الخرسانة، وهندسة المساحة، وهندسة التربة، وهندسة المياه.

إرشادات للدراسة

رسم أقصر مسافة

الأداة الأساسية لرسم قطعة مستقيمة عمودية على مستقيم من نقطة لا تقع عليه هو المثلث القائم الزاوية كما يمكنك استعمال أدوات مثل ركن ورقة، ولكن إنشاء هذه القطعة غير ممكن إلا باستعمال فرجار ومسطرة.

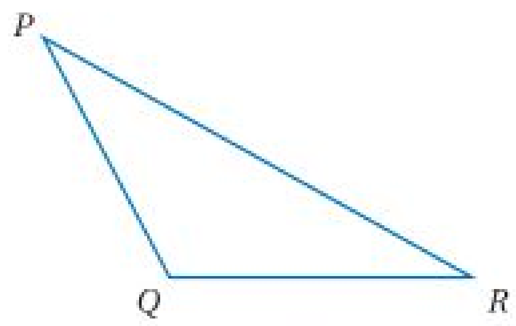
الخطوة 3: ارسم العمود $\overleftrightarrow{AE}$، وارمز لنقطة تقاطع $\overleftrightarrow{AE}$ مع $\overleftrightarrow{BC}$ بالرمز D



يمثّل AD طول أقصر أنبوب يحتاجه المهندس لربط النقطة A بخط التصريف الرئيس.

تحقق من فهمك

1) أنشئ القطعة المستقيمة التي يمثل طولها المسافة بين Q و $\overleftrightarrow{PR}$ وسمّها.



مثال 2 البعد بين نقطة ومستقيم في المستوى الإحداثي

الهندسة الإحداثية: يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(4, -6)$, $(-5, 3)$. أوجد البعد بين المستقيم ℓ والنقطة $P(2, 4)$.

الخطوة 1: أوجد معادلة المستقيم ℓ. ابدأ بإيجاد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(4, -6)$, $(-5, 3)$.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-6 - 3}{4 - (-5)} = \frac{-9}{9} = -1$$

استعمل ميل المستقيم ℓ، والنقطة $(4, -6)$ الواقعة عليه لتجد مقطع المحور y له.

$y = mx + b$	صيغة الميل والمقطع
$-6 = -1(4) + b$	$m = -1, (x, y) = (4, -6)$
$-6 = -4 + b$	بسّط
$-2 = b$	اجمع 4 لكلا الطرفين

معادلة المستقيم ℓ هي: $y = -x + (-2)$، أو $y = -x - 2$.

الخطوة 2: اكتب معادلة المستقيم w العمودي على المستقيم ℓ والمار بالنقطة $P(2, 4)$.

بما أن ميل المستقيم ℓ يساوي -1، فإن ميل المستقيم w يساوي 1.

$y = mx + b$	صيغة الميل والمقطع
$4 = 1(2) + b$	$m = 1, (x, y) = (2, 4)$
$4 = 2 + b$	بسّط
$2 = b$	اطرح 2 من كلا الطرفين

معادلة المستقيم w هي $y = x + 2$.

الخطوة 3: حل نظام المعادلات لتجد نقطة التقاطع.

المستقيم ℓ: $y = -x - 2$

المستقيم w: $(+)\ y = x + 2$

$2y = 0$	اجمع المعادلتين
$y = 0$	اقسم كلا الطرفين على 2

إرشادات للدراسة

المسافة بين نقطة والمحورين x, y

لاحظ أن المسافة بين نقطة والمحور x يمكن إيجادها بتحديد الإحداثي الصادي للنقطة، أما المسافة بينها وبين المحور y فيمكن إيجادها بتحديد الإحداثي السيني لها.

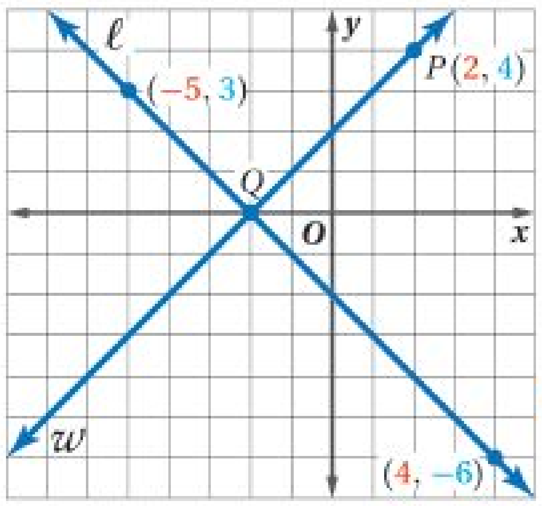
أوجد قيمة x.

$$0 = x + 2$$ عوّض 0 بدل y في معادلة المستقيم w

$$-2 = x$$ اطرح 2 من كلا الطرفين

إذن نقطة التقاطع هي $Q(-2, 0)$

للتحقق من نقطة التقاطع، ارسم المستقيمين ℓ, w في المستوى الإحداثي، وأوجد نقطة التقاطع بيانيًّا.



الخطوة 4: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين؛ لتجد المسافة بين $P(2, 4), Q(-2, 0)$.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$ صيغة المسافة بين نقطتين

$$= \sqrt{(-2 - 2)^2 + (0 - 4)^2}$$ $x_2 = -2, x_1 = 2, y_2 = 0, y_1 = 4$

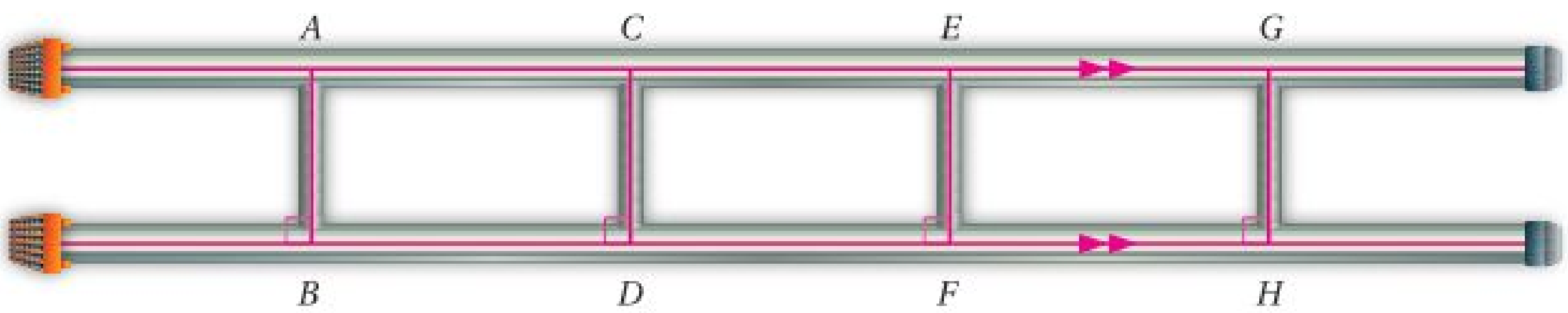
$$= \sqrt{32}$$ بسّط

البعد بين النقطة والمستقيم هو $\sqrt{32}$ أو 5.66 وحدات تقريبًا .

✓ تحقق من فهمك

2) المستقيم ℓ يمر بالنقطتين $(1, 2)$، $(5, 4)$. أنشئ مستقيمًا عموديًّا على ℓ من النقطة $P(1, 7)$، ثم أوجد البعد بين P و ℓ.

البُعد بين مستقيمين متوازيين: يُعرَّف المستقيمان المتوازيان على أنهما مستقيمان يقعان في المستوى نفسه ولا يتقاطعان. وهناك تعريف آخر ينص على أنهما مستقيمان يقعان في المستوى نفسه، بحيث يكون البعد بينهما ثابتًا، وهذا يعني أن البعد بين أي نقطة على أحدهما والآخر ثابتة .



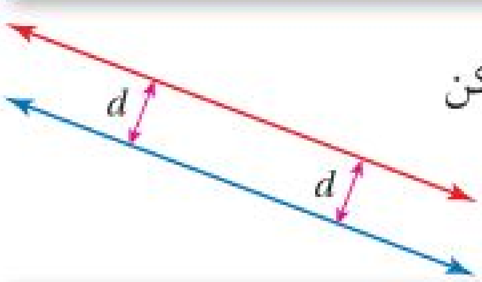
$AB = CD = EF = GH$

يقودنا ذلك إلى تعريف البعد بين مستقيمين متوازيين.

مفهوم أساسي — البعد بين مستقيمين متوازيين

أضف إلى مطويتك

البعد بين مستقيمين متوازيين، هو المسافة العمودية بين أحد المستقيمين وأي نقطة على المستقيم الآخر.



الشكل الذي تمثله مجموعة النقاط التي تحقق شرطًا ما يسمى **محلًّا هندسيًّا** . ويمكن وصف المستقيم الموازي لمستقيم معلوم بالمحل الهندسي لجميع النقاط **المتساوية البعد** عن المستقيم في المستوى نفسه.

نظرية 2.9 — المستقيمان المتساويا البعد عن مستقيم ثالث

أضف إلى مطويتك

إذا كان المستقيمان في المستوى متساويَي البعد عن مستقيم ثالث فإنهما متوازيان.

ستبرهن **نظرية 2.9** في السؤال 21

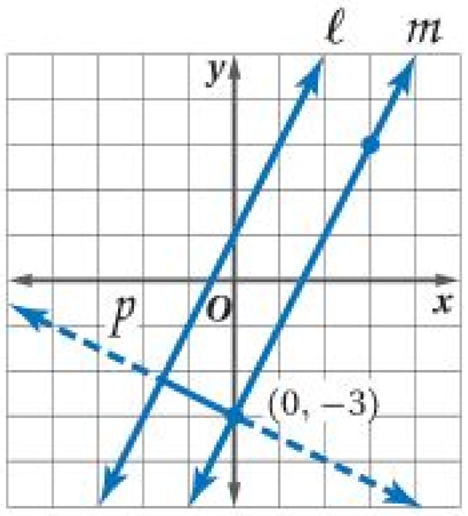
إرشادات للدراسة

طريقة الحذف
عند حل نظام معادلات باستعمال طريقة الحذف، قد تحتاج إلى ضرب إحدى المعادلات في عدد لتتمكن من الحذف عند جمع الحدود المتشابهة.

إرشادات للدراسة

متساوي البعد
سوف تستعمل مفهوم متساوي البعد لتصف نقاطًا خاصة ومستقيمات مرتبطة بأضلاع المثلث وزواياه في الدرس 1–4.

مثال 3 المسافة بين مستقيمين متوازيين



أوجد البعد بين المستقيمين المتوازيين ℓ, m اللذين معادلتيهما $y = 2x + 1, y = 2x - 3$ على الترتيب.

يتعين عليك حل نظام من المعادلات لإيجاد نقطتَي نهايتَي القطعة المستقيمة العمودية على كلٍّ من ℓ, m.

ميل المستقيم ℓ يساوي ميل المستقيم m ويساوي 2.

ارسم المستقيم p على أن يمر بنقطة مقطع المحور y للمستقيم m وهي $(0, -3)$، ويكون عموديًّا على كلا المستقيمين.

الخطوة 1: لاحظ أن ميل المستقيم p هو معكوس مقلوب العدد 2، ويساوي $-\frac{1}{2}$، وأن المستقيم p يمر بالنقطة $(0, -3)$، وهي مقطع المحور y للمستقيم m. والآن: اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم p.

$y = mx + b$ صيغة الميل والمقطع

$y = -\frac{1}{2}x - 3$ $m = -\frac{1}{2},\ b = -3$

الخطوة 2: حدد نقطة تقاطع المستقيمين ℓ و p بحل نظام المعادلات الآتي:

المستقيم ℓ: $y = 2x + 1$

المستقيم p: $y = -\frac{1}{2}x - 3$

$2x + 1 = -\frac{1}{2}x - 3$ عوّض $2x + 1$ بدلًا من y في معادلة المستقيم p

$2x + \frac{1}{2}x = -3 - 1$ جمّع الحدود المتشابهة في كل طرف

$\frac{5}{2}x = -4$ بسّط

$x = -\frac{8}{5}$ اضرب كلا الطرفين في $\frac{2}{5}$

$y = -\frac{1}{2}\left(-\frac{8}{5}\right) - 3$ عوّض $-\frac{8}{5}$ بدلًا من x في معادلة المستقيم p

$= -\frac{11}{5}$ بسّط

نقطة التقاطع هي $\left(-\frac{8}{5}, -\frac{11}{5}\right)$ أو $(-1.6, -2.2)$.

الخطوة 3: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين؛ لتجد المسافة بين النقطتين $(0, -3)$ و $(-1.6, -2.2)$.

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ صيغة المسافة بين نقطتين

$= \sqrt{(-1.6 - 0)^2 + [-2.2 - (-3)]^2}$ $x_2 = -1.6, x_1 = 0, y_2 = -2.2, y_1 = -3$

≈ 1.8 بسّط

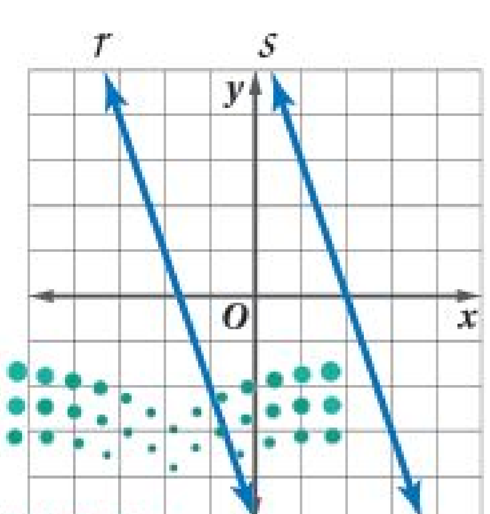
البُعد بين المستقيمين 1.8 وحدة تقريبًا.

إرشادات للدراسة

طريقة التعويض

عند حل نظام مكون من معادلتين خطيتين باستعمال التعويض، عوّض قيمة أحد متغيرات المعادلة الأولى في المعادلة الثانية لتحصل على معادلة في متغير واحد.

✓ تحقق من فهمك



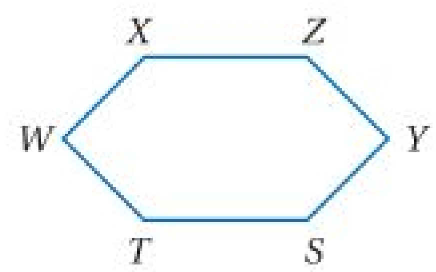
3A) أوجد البعد بين المستقيمين المتوازيين r, s اللذين معادلتاهما $y = -3x - 5$, $y = -3x + 6$ على الترتيب.

3B) أوجد البعد بين المستقيمين المتوازيين a, b اللذين معادلتيهما $x + 3y = 6$, $x + 3y = -14$، على الترتيب.

تأكــد

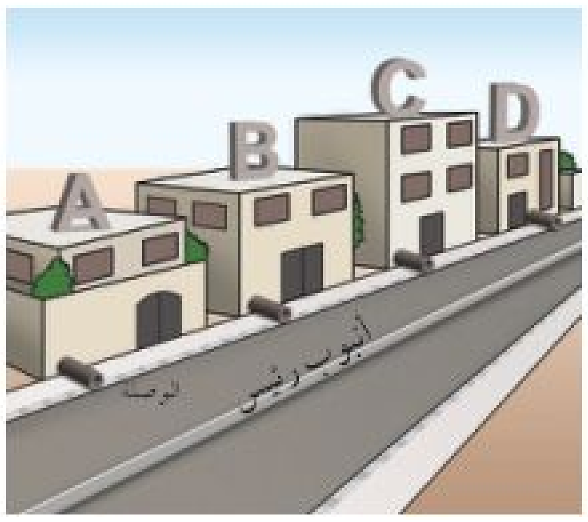
المثال 1 أنشئ القطعة المستقيمة التي تمثّل البُعد في كلٍّ مما يأتي:

1) البعد بين Y و $\overleftrightarrow{TS}$



2) البعد بين C و $\overleftrightarrow{AB}$

3) **أنابيب:** تزوِّد مؤسسة المياه المنازل بالمياه من خلال أنابيب تربطها بالأنبوب الرئيس في الشارع. في الشكل المجاور: ارسم القطعة المستقيمة التي تمثل أقصر أنبوب توصيل بين الوصلة في المنزل A والأنبوب الرئيس في الشارع.



المثال 2 **هندسة إحداثية:** أوجد البعد بين النقطة P والمستقيم ℓ في كلٍّ مما يأتي:

4) يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(-2, 0)$, $(4, 3)$، وإحداثيا النقطة P هما $(3, 10)$.

5) يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(-4, 9)$, $(-6, 1)$، وإحداثيا النقطة P هما $(4, 1)$.

6) يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(-2, 9)$, $(4, 18)$، وإحداثيا النقطة P هما $(-9, 5)$.

المثال 3 أوجد البعد بين كل مستقيمين متوازيين فيما يأتي:

7) $y = -2x + 4$

$y = -2x + 14$

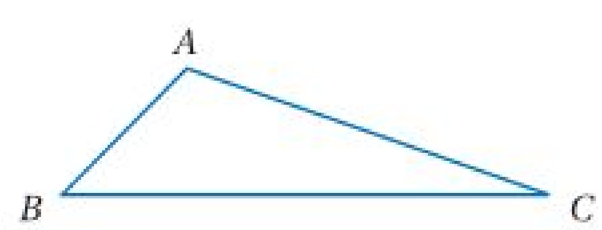
8) $y = 7$

$y = -3$

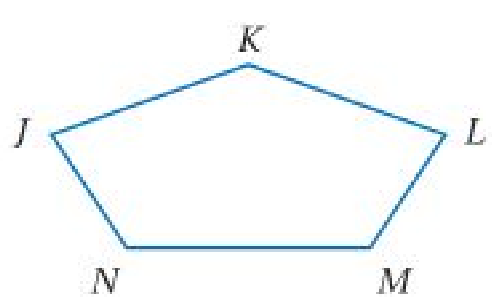
تدرب وحل المسائل

المثال 1 أنشئ القطعة المستقيمة التي تمثل البعد في كل مما يأتي:

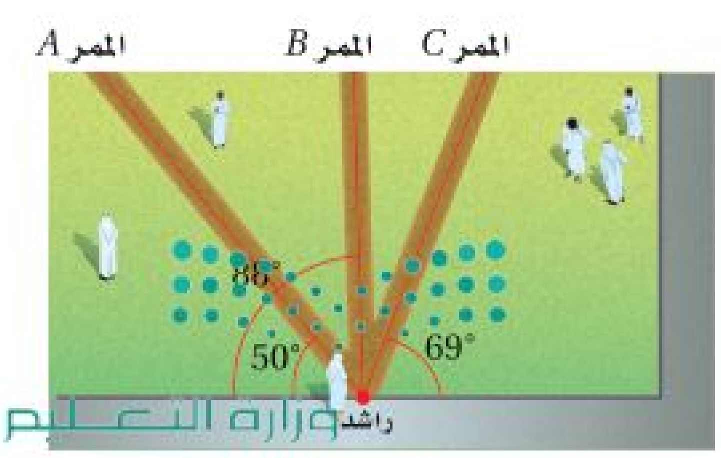
9) البعد بين A و $\overleftrightarrow{BC}$



10) البعد بين K و $\overleftrightarrow{LM}$



11) **مدرسة:** يعبر راشد الساحة الأمامية لمدرسته، حيث يوجد ثلاثة ممرات ممكنة مبينة في الشكل المجاور. أي الممرات الثلاثة هو الأقصر؟ وضّح تبريرك.



المثال 2 **هندسة إحداثية:** أوجد البعد بين النقطة P والمستقيم ℓ في كلٍّ مما يأتي :

12) يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(7, 4)$,$(-3, 0)$. وإحداثيا النقطة P هما $(4, 3)$.

13) يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(4, 1)$,$(-2, 1)$. وإحداثيا النقطة P هما $(5, 7)$.

14) يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(3, 1)$,$(-8, 1)$. وإحداثيا النقطة P هما $(-2, 4)$.

المثال 3 أوجد البعد بين كل مستقيمين متوازيين فيما يأتي:

15) $y = -2$ ، $y = 4$

16) $x = 3$ ، $x = 7$

17) $y = \frac{1}{3}x - 3$ ، $y = \frac{1}{3}x + 2$

18) $y = 15$ ، $y = -4$

19) $3x + y = 3$ ، $y + 17 = -3x$

20) $y = -\frac{5}{4}x + 3.5$ ، $4y + 10.6 = -5x$

21) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 2.9 .

أوجد البعد بين المستقيم و النقطة في كلٍّ مما يأتي:

22) $y = -3, (5, 2)$

23) $y = \frac{1}{6}x + 6, (-6, 5)$

24) $x = 4, (-2, 5)$

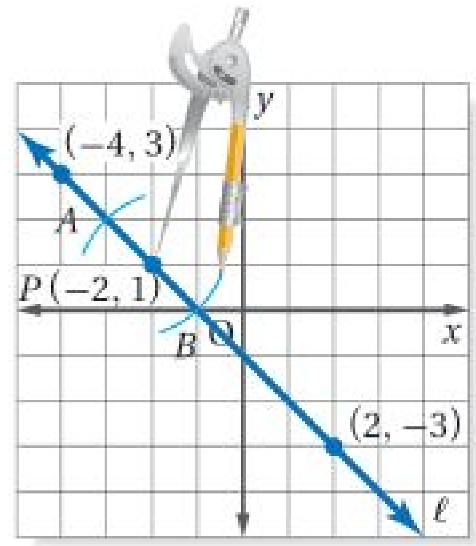
25) **ملصقات:** يعلق شاكر مُلصقين على حائط غرفته كما هو مبين في الشكل. كيف يمكن له أن يستعمل البعد بين مستقيمين؛ ليتأكد أن حافتَي الملصقين متوازيتان؟

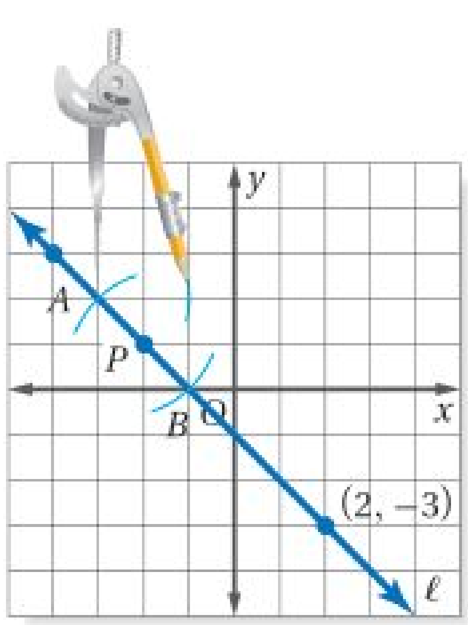
إنشاءات هندسية: يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(2, -3)$,$(-4, 3)$. والنقطة $P(-2, 1)$ تقع على المستقيم ℓ. تتبّع الخطوات أدناه وأجب عما يأتي:

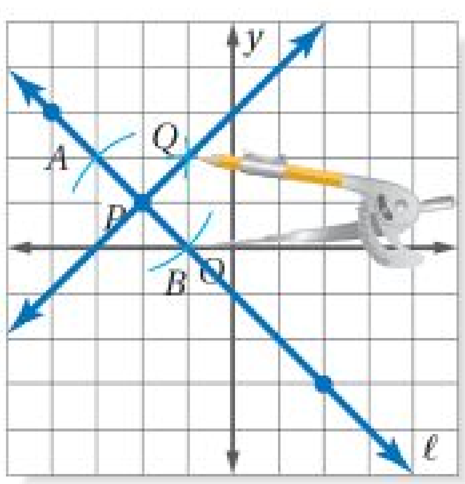
الخطوة 1: ارسم المستقيم ℓ وعيِّن النقطة P عليه، ثم ضع الفرجار عند النقطة P. وباستعمال فتحة الفرجار نفسها، ارسم قوسين عن يسار ويمين النقطة P. سمِّ نقطتَي التقاطع A و B.

الخطوة 2: افتح الفرجار فتحة أكبر من AP. وضعه عند النقطة A، وارسم قوسًا أعلى المستقيم ℓ.

الخطوة 3: باستعمال فتحة الفرجار نفسها، ضع الفرجار عند النقطة B، وارسم قوسًا يقطع القوس السابق، سمِّ نقطة التقاطع Q. ثم ارسم $\overleftrightarrow{PQ}$.







26) ضع تخمينًا للعلاقة بين المستقيمين ℓ و $\overleftrightarrow{PQ}$ ؟ أثبت تخمينك باستعمال ميلَي المستقيمين.

27) كرر النشاط أعلاه باستعمال مستقيم آخر ونقطة عليه.

28) **هندسة إحداثية:** ميل $\overline{AB}$ يساوي 2 ، ونقطة منتصفها $M(3, 2)$. ونقطة منتصف قطعة مستقيمة أخرى عمودية على $\overline{AB}$ هي $P(4, -1)$ ، ولها نقطة الطرف B نفسها.

a) مثّل القطعتين المستقيمتين بيانيًّا.

b) أوجد إحداثيات A و B.

29) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، سوف تستكشف مساحات مثلثات متكوّنة من نقاط على مستقيمين متوازيين.

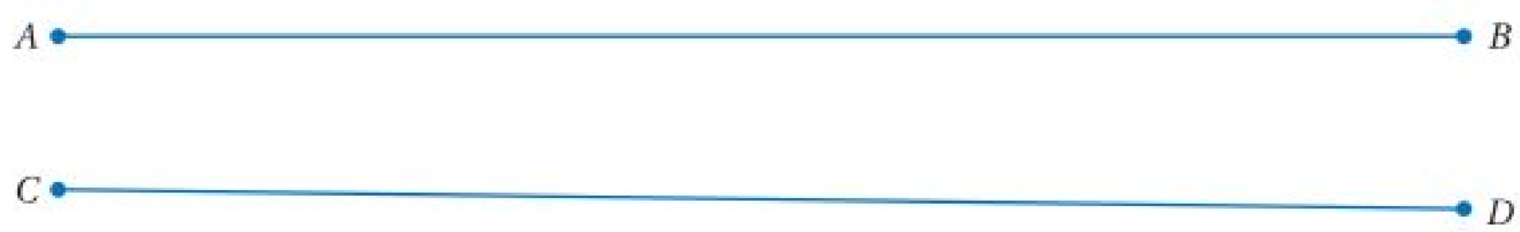
a) **هندسيًّا:** ارسم مستقيمين متوازيين، وسمّهما كما في الشكل المجاور.

b) **لفظيًّا:** أين تضع النقطة C على المستقيم m ، حتى يكون للمثلث ABC أكبر مساحة؟ وضّح تبريرك.

c) **تحليليًّا:** إذا كان $AB = 11$ cm ، فما القيمة العظمى لمساحة $\triangle ABC$؟

مسائل مهارات التفكير العليا

30) **اكتشف الخطأ:** رسم ماجد القطعتين المستقيمتين $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ أدناه باستعمال حافة مستقيمة، ويدّعي أنه إذا مدّ هاتين القطعتين المستقيمتين فإنهما لن تتقاطعا أبدًا. خالفه زيد الرأي وقال: إنهما تتقاطعان. أيٌّ منهما على صواب؟ برِّر إجابتك.



31) **اكتب:** صفْ طريقة يمكن استعمالها لرسم مستقيم يبعد البعد نفسه عن المستقيمين المتوازيين $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$

32) **تحدٍّ:** افترض أن مستقيمًا عموديًّا على مستقيمين متوازيين ويقطعهما في النقطتين $(0, 6)$, $(a, 4)$. إذا كانت المسافة بين المستقيمين المتوازيين $\sqrt{5}$ وحدات، فأوجد قيمة a ومعادلتَي المستقيمين المتوازيين.

33) **تبرير:** حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا. وضّح تبريرك.

يمكن إيجاد البُعد بين مستقيم ومستوى.

34) **مسألة مفتوحة:** ارسم مضلعًا محدبًا غير منتظم باستعمال مسطرة.

a) أنشئ قطعة مستقيمة تمثل البُعد بين أحد الرؤوس وضلع غير مجاور له.

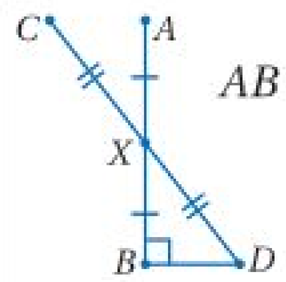
b) استعمل القياس لتتحقق من أن القطعة المستقيمة التي رسمتها عمودية على الضلع الذي اخترته.

35) **تحدٍّ:** أعد كتابة النظرية 2.9 بدلالة مستويين متساويَي البعد عن مستو ثالث، وارسم مثالًا على ذلك.

36) **اكتب:** لخِّص الخطوات الضرورية لإيجاد البُعد بين مستقيمين متوازيين إذا عُلمت معادلتاهما.

تدريب على اختبار

37) إذا كانت $\overline{AB}$ و $\overline{BD}$ متعامدتين و $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ تنصف إحداهما الأخرى عند النقطة X، $AB = 16$، $CD = 20$، فما طول $\overline{BD}$ ؟



A 6 **C** 10

B 8 **D** 18

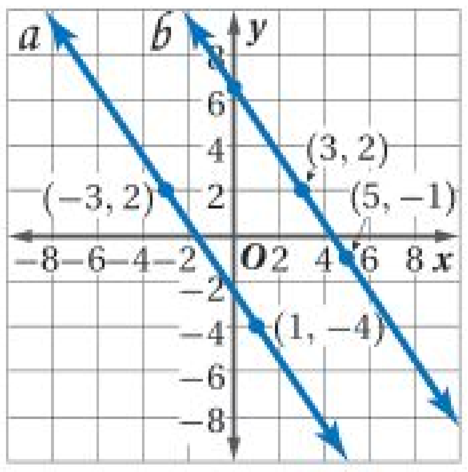
38) متنزه المدينة مربع الشكل، ومساحته $81000\,\text{ft}^2$. أيٌّ مما يأتي هو الأقرب إلى طول ضلعه؟

A 100 ft **C** 300 ft

B 200 ft **D** 400 ft

مراجعة تراكمية

39) استعمل الشكل المجاور؛ لتحدّد ما إذا كان $a \parallel b$.
برّر إجابتك. (الدرس 2-4)



اكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم المُعطى ميله ونقطة يمر بها في كلٍّ مما يأتي : (الدرس 2-5)

40) $m = \frac{1}{4}, (3, -1)$

41) $m = 0, (-2, 6)$

42) $m = -2, (-6, -7)$

43) **حاسوب:** في عام 1436 هـ كانت نسبة مستخدِمي شبكة الإنترنت في المملكة 56% تقريبًا، وبعد سنتين ارتفعت النسبة لتصبح 65% تقريبًا، إذا استمر معدل التغير هذا، فما السنة التي تكون فيها نسبة المشتركين 80% تقريبًا. (الدرس 2-4)

استعد للدرس اللاحق

استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لإيجاد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي :

44) $O(-12, 0), P(-8, 3)$

45) $R(-2, 3), S(3, 15)$

46) $Q(-12, 2), T(-9, 6)$

الفصل

2 دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

القاطع: (الدرسان 2-1, 2-2)

- عندما يقطع قاطع مستقيمين، ينتج عن التقاطع أزواج من الزوايا المتبادلة خارجيًا أو المتبادلة داخليًا، أو المتحالفة أو المتناظرة.
- إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين فإن:
  - كل زاويتين متناظرتين متطابقتان.
  - كل زاويتين متبادلتين داخليًا متطابقتان.
  - كل زاويتين متحالفتين متكاملتان.
  - كل زاويتين متبادلتين خارجيًا متطابقتان.

إثبات توازي مستقيمين: (الدرس 2-3)

- إذا قطع قاطع مستقيمين في نفس المستوى ونتج عن التقاطع أي مما يأتي، فإن المستقيمين متوازيان:
  - زاويتان متناظرتان متطابقتان.
  - زاويتان متبادلتان خارجيًا متطابقتان.
  - زاويتان متبادلتان داخليًا متطابقتان.
  - زاويتان متحالفتان متكاملتان.
- إذا كان المستقيمان عموديين على المستقيم نفسه في المستوى فإنهما متوازيان.

الميل: (الدرسان 2-4, 2-5)

- الميل m لمستقيم يمر بالنقطتين (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) يعطى بالصيغة $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$، حيث $x_1 \neq x_2$.

البُعد: (الدرس 2-6)

- البُعد بين مستقيم ونقطة لا تقع عليه، هو طول القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من تلك النقطة.
- البُعد بين مستقيمين متوازيين، هو المسافة العمودية بين أحد المستقيمين وأي نقطة على المستقيم الآخر.

المطويات منظم أفكار

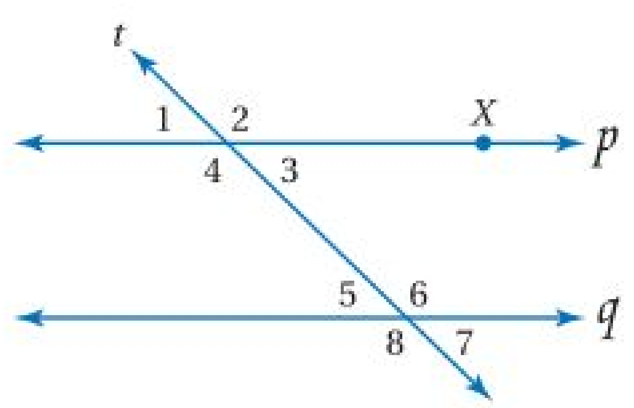
تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.

المفردات الأساسية

- **المستقيمان المتخالفان** (ص. 88)
- **المستويان المتوازيان** (ص. 88)
- **المستقيمان المتوازيان** (ص. 88)
- **الزاويتان المتبادلتان خارجيًا** (ص. 89)
- **الزاويتان المتبادلتان داخليًا** (ص. 89)
- **الزاويتان المتحالفتان** (ص. 89)
- **الزاويتان المتناظرتان** (ص. 89)
- **القاطع** (ص. 89)
- **الزوايا الداخلية** (ص. 89)
- **الزوايا الخارجية** (ص. 89)
- **الميل** (ص. 111)
- **معدل التغير** (ص. 112)
- **صيغة الميل ونقطة** (ص. 119)
- **صيغة الميل والمقطع** (ص. 119)
- **متساوي البعد** (ص. 131)
- **المحل الهندسي** (ص. 131)

اختبر مفرداتك

بيّن ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة أو خاطئة، وإذا كانت خاطئة فاستبدل بالكلمة التي تحتها خط كلمة من القائمة أعلاه؛ لتجعل الجملة صحيحة:



1) إذا كان $\angle 5 \cong \angle 1$، فإن p و q مستقيمان متخالفان.

2) الزاويتان 4 ، 6 متبادلتان داخليًا.

3) الزاويتان 1 ، 7 متبادلتان خارجيًا.

4) إذا كان p و q متوازيين فإن الزاويتين 3 ، 6 متطابقتان.

5) بعد النقطة X عن المستقيم q هو طول القطعة المستقيمة العمودية من النقطة X إلى المستقيم q.

6) يُسمّى المستقيم t قاطعًا للمستقيمين p و q.

7) إذا كان $p \parallel q$، فإن $\angle 2$ و $\angle 8$ متكاملتان.

8) الزاويتان 4 ، 8 متناظرتان.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

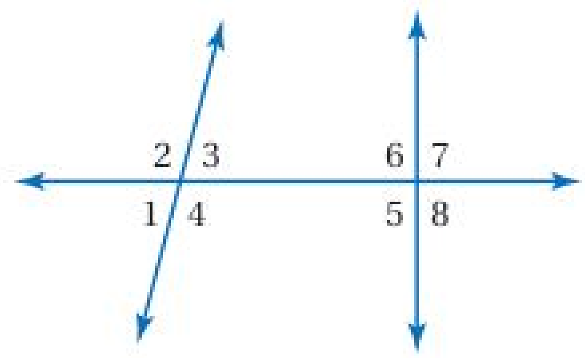
الفصل 2

دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

2-1 المستقيمان والقاطع (ص: 88-93)

صنِّف كل زوج من الزوايا فيما يأتي إلى زاويتين متبادلتين داخليًّا، أو متبادلتين خارجيًّا، أو متناظرتين، أو متحالفتين، مستعملًا الشكل أدناه.



9) $\angle 1 , \angle 5$

10) $\angle 4 , \angle 6$

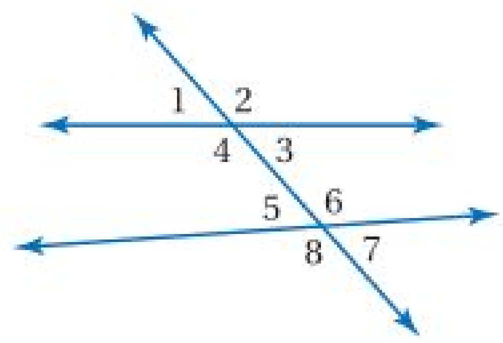
11) $\angle 2 , \angle 8$

12) $\angle 4 , \angle 5$

13) **جسور المشاة:** بُني جسر لعبور المشاة فوق شارع، صنّف المستقيمين اللذين يمثلان الجسر والشارع.

مثال 1

صنِّف كل زوج من الزوايا فيما يأتي إلى زاويتين متبادلتين داخليًّا، أو متبادلتين خارجيًّا، أو متناظرتين، أو متحالفتين، مستعملًا الشكل أدناه.



a) $\angle 3, \angle 6$
متحالفتان

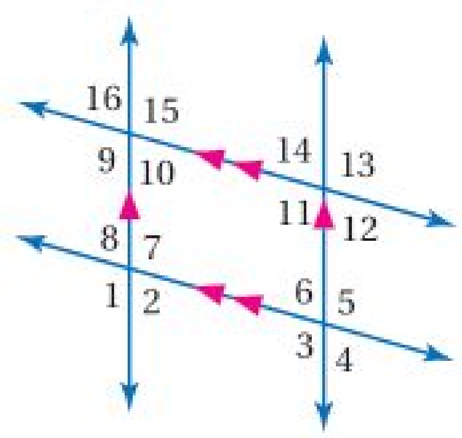
b) $\angle 2, \angle 6$
متناظرتان

c) $\angle 1, \angle 7$
متبادلتان خارجيًّا

d) $\angle 3, \angle 5$
متبادلتان داخليًّا

2-2 الزوايا والمستقيمات المتوازية (ص: 96-103)

في الشكل أدناه: $m\angle 1 = 123°$، أوجد قياس كلٍّ من الزوايا الآتية، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها:



14) $\angle 5$

15) $\angle 14$

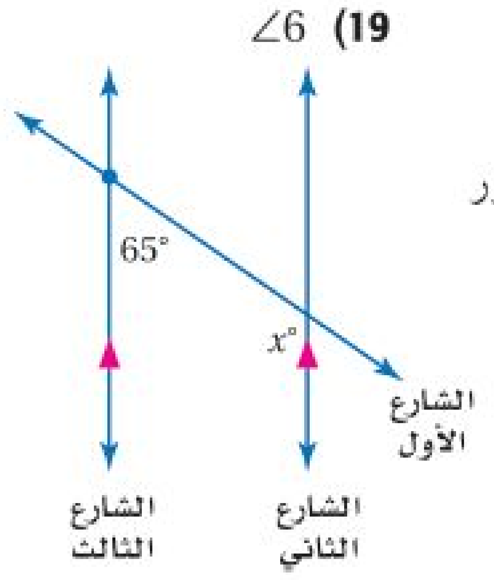
16) $\angle 16$

17) $\angle 11$

18) $\angle 4$

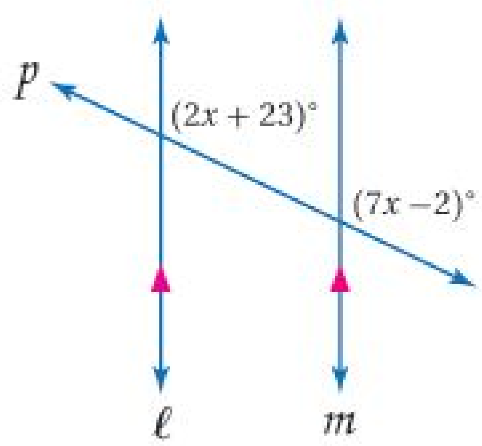
19) $\angle 6$

20) **خرائط:** يبيّن الشكل المجاور تخطيط ثلاثة شوارع. أوجد قيمة x.



مثال 2

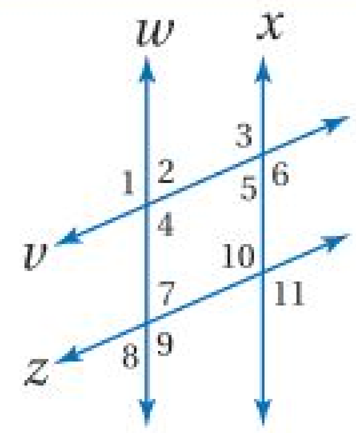
جبر: أوجد قيمة x في الشكل الآتي. وضّح تبريرك.



$7x - 2 = 2x + 23$	مسلمة الزاويتين المتناظرتين
$7x - 2x = 23 + 2$	جمْع الحدود المتشابهة
$5x = 25$	بسّط
$x = 5$	اقسم كلا الطرفين على 5

2-3 إثبات توازي مستقيمين (ص: 104–109)

هل يمكن إثبات أن أيًّا من مستقيمات الشكل متوازية، اعتمادًا على المعطيات في كلٍّ مما يأتي؟ وإذا كان أيها متوازيًا، فاذكر المسلّمة أو النظرية التي تبرّر إجابتك.



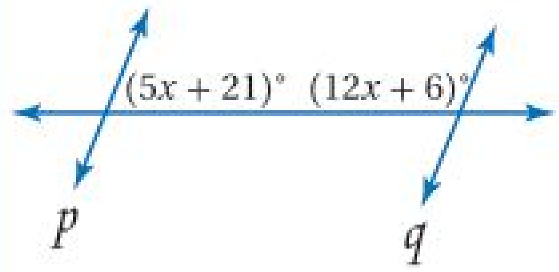
21) $\angle 7 \cong \angle 10$

22) $\angle 2 \cong \angle 10$

23) $\angle 1 \cong \angle 3$

24) $\angle 3 \cong \angle 11$

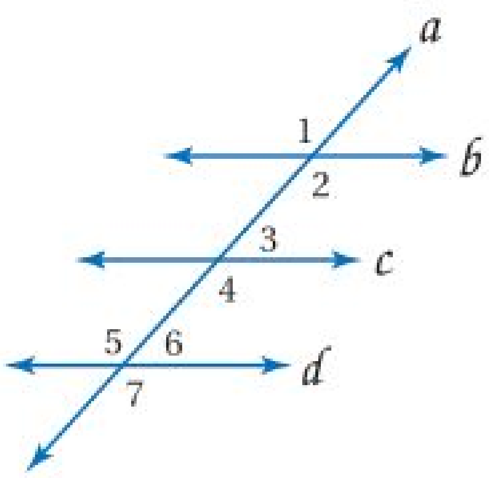
25) أوجد قيمة x، بحيث يكون $p \parallel q$، وحدّد المسلّمة أو النظرية التي استعملتها.



26) **هندسة المواقع:** إذا كان $m\angle BAD = 45°$، فأوجد قياس $m\angle ADC$ الذي يجعل $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

مثال 3

هل يمكن إثبات أن أيًّا من مستقيمات الشكل متوازية اعتمادًا على المعطيات في كل مما يأتي؟ وإذا كان أيها متوازيًا، فاذكر المسلمة أو النظرية التي تبرّر إجابتك.



a) $\angle 1 \cong \angle 7$

$\angle 1$ و $\angle 7$ متبادلتان خارجيًّا بالنسبة للمستقيمين b و d.

بما أن $\angle 7 \cong \angle 1$، فإن $b \parallel d$ بحسب عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًّا.

b) $\angle 4 \cong \angle 5$

$\angle 4$ و $\angle 5$ متبادلتان داخليًّا بالنسبة للمستقيمين c و d.

بما أن $\angle 5 \cong \angle 4$، فإن $c \parallel d$ بحسب عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا.

2-4 ميل المستقيم (ص. 111–118)

حدّد ما إذا كان $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{XY}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك في كلٍّ مما يأتي، ومثّل كل مستقيم بيانيًّا لتتحقق من إجابتك.

27) $A(5, 3), B(8, 0), X(-7, 2), Y(1, 10)$

28) $A(-3, 9), B(0, 7), X(4, 13), Y(-5, 7)$

29) $A(8, 1), B(-2, 7), X(-6, 2), Y(-1, -1)$

ارسم المستقيم الذي يحقق الشروط في كلٍّ مما يأتي:

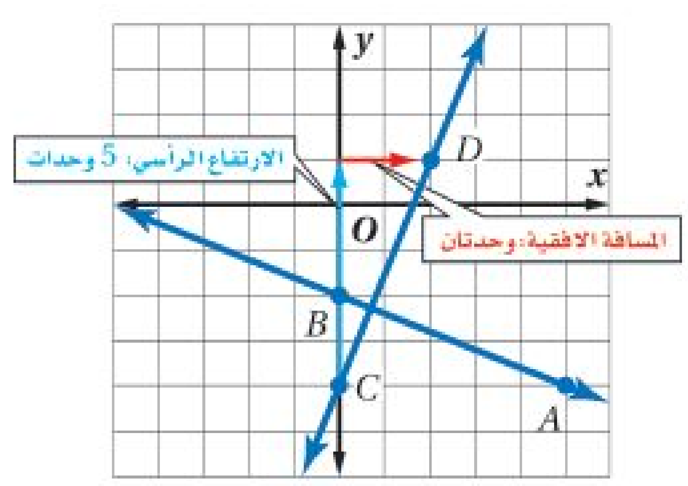
30) يمر بالنقطة $(-3, 4)$ ويوازي $\overleftrightarrow{AB}$، حيث $A(2, 5), B(9, 2)$.

31) يمر بالنقطة $(1, 3)$ ويعامد $\overleftrightarrow{PQ}$، حيث $P(4, -6), Q(6, -1)$.

32) **طائرات:** تحلّق الطائرتان A و B في مسارين مستقيمين وعلى الارتفاع نفسه. رصد قمر اصطناعي موقعين للطائرة A عند النقطتين $(5, 11)$، $(23, 17)$، ورصد موقعين للطائرة B عند النقطتين $(9, 17)$، $(15, 3)$. هل مسارا الطائرتين متوازيان، أم متعامدان، أم غير ذلك؟

مثال 4

مثّل بيانيًّا المستقيم الذي يمر بالنقطة $C(0, -4)$، والعمودي على $\overleftrightarrow{AB}$، حيث $A(5, -4), B(0, -2)$.



ميل $\overleftrightarrow{AB}$ يساوي $\dfrac{-2-(-4)}{0-5} = -\dfrac{2}{5}$

بما أن ميل $\overleftrightarrow{AB}$ يساوي $-\dfrac{2}{5}$، فإن ميل المستقيم العمودي على $\overleftrightarrow{AB}$ يساوي $\dfrac{5}{2}$

لتمثيل المستقيم بيانيًّا، ابدأ من النقطة C، وتحرك 5 وحدات إلى أعلى ووحدتين إلى اليمين، وسمّ النقطة D، ثم ارسم $\overleftrightarrow{CD}$.

دليل الدراسة والمراجعة

2-5 صيغ معادلة المستقيم (ص. 119–126)

اكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم المُعطى ميله ونقطة يمر بها في كلٍّ مما يأتي:

33) $m = 2, (4, -9)$

34) $m = -\frac{3}{4}, (8, -1)$

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المُعطى ميله ومقطع محور y له فيما يأتي:

35) $m = 5, b = -3$

36) $m = \frac{1}{2}, b = 4$

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي أُعطيت نقطتان يمر بهما فيما يأتي:

37) $(-3, 12), (15, 0)$

38) $(-7, 2), (5, 8)$

39) **فيزياء:** تسير مركبة بسرعة 30 m/s، وبدأت تتباطأ بمعدل ثابت، وبعد ثانيتين أصبحت سرعتها 16m/s، اكتب معادلة تمثّل سرعة المركبة v بعد t ثانية. ثم استعمل المعادلة لتحدّد الزمن الذي تستغرقه حتى تقف.

مثال 5

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(2, 5), (6, 3)$.

الخطوة 1: أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 5}{6 - 2} \quad \text{صيغة الميل}$$

$$= -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

الخطوة 2: اكتب معادلة المستقيم.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{صيغة الميل ونقطة}$$

$$y - 5 = -\frac{1}{2}(x - 2) \quad m = -\frac{1}{2}, (x_1, y_1) = (2, 5)$$

$$y - 5 = -\frac{1}{2}x + 1 \quad \text{بسّط}$$

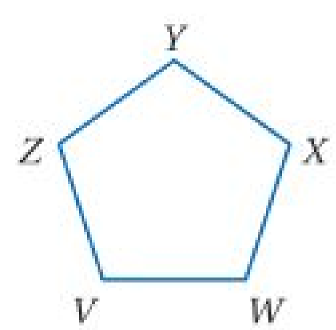
$$y = -\frac{1}{2}x + 6 \quad \text{اجمع 5 لكلا الطرفين}$$

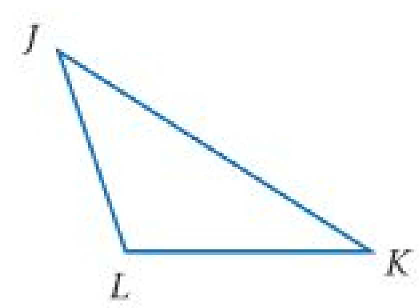
2-6 الأعمدة والمسافة (ص: 128–136)

أنشئ القطعة المستقيمة التي تمثّل البعد في كلٍّ مما يأتي :

40) البعد بين X و $\overleftrightarrow{VW}$

41) البعد بين L و $\overleftrightarrow{JK}$

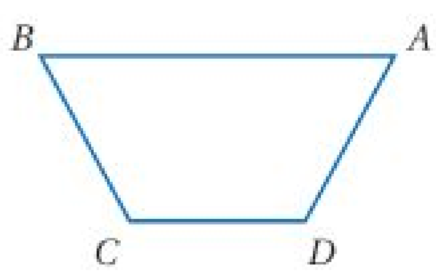




42) **قياس:** علّق خالد صفّين من الصور على حائط غرفته، فقام أولًا بتثبيت مسامير لوحات الصف العلوي على استقامة واحدة، ثم علّق الخيط الشاقولي على كل مسمار وقاس مسافات متساوية أسفل كل مسمار ووضع مسمارًا للوحة في الصف الثاني. لماذا يدل هذا العمل على أن صفّي الصور سيكونان متوازيين؟

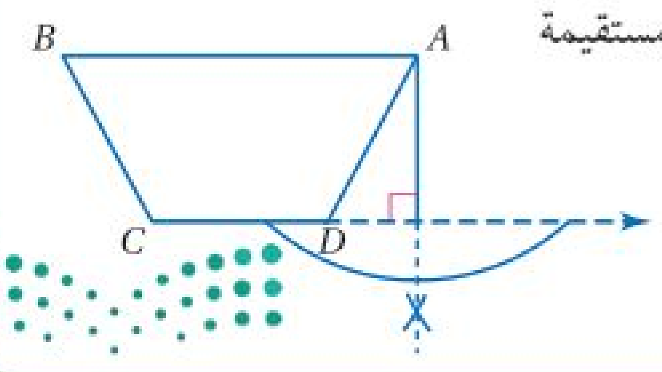
مثال 6

ارسم القطعة المستقيمة التي تمثّل البعد بين A و $\overleftrightarrow{CD}$.

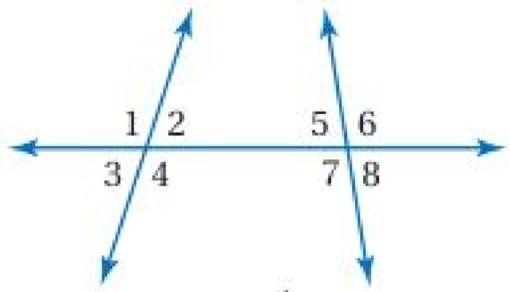


البعد بين المستقيم ونقطة لا تقع عليه، هو طول القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من تلك النقطة.

مد $\overline{CD}$ ، وارسم القطعة المستقيمة العمودية على $\overleftrightarrow{CD}$ من A



صنِّف كل زوج من الزوايا فيما يأتي إلى زاويتين متبادلتين داخليًّا، أو متبادلتين خارجيًّا، أو متناظرتين، أو متحالفتين، مستعملًا الشكل أدناه.



1) $\angle 6, \angle 3$

2) $\angle 4, \angle 7$

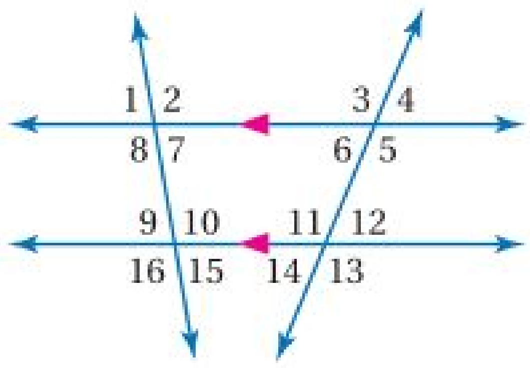
3) $\angle 5, \angle 4$

أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين A, B في كلٍّ مما يأتي:

4) $A(8, 1), B(8, -6)$ 5) $A(0, 6), B(4, 0)$

6) $A(6, 3), B(-6, 3)$ 7) $A(5, 4), B(8, 1)$

في الشكل أدناه: $m\angle 8 = 96°$ و $m\angle 12 = 42°$. أوجد قياس كلٍّ من الزوايا الآتية، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها.

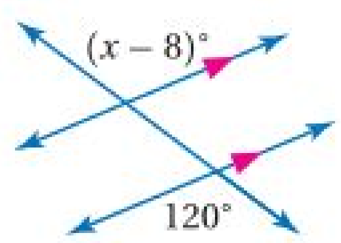


8) $\angle 9$

9) $\angle 11$

10) $\angle 6$

11) أوجد قيمة x في الشكل الآتي :



12) **نادٍ رياضي:** يقارن مشاري بين عرضين مقدمين من نادٍ رياضي. يدفع في العرض الأول 200 ريال شهريًّا. ويدفع في العرض الثاني 140 ريالًا شهريًّا بالإضافة إلى رسوم اشتراك لأول مرة مقدارها 180 ريالًا.

a) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلتين تمثلان التكلفة y للاشتراك في كلٍّ من العرضين لعدد x من الأشهر. ثم مثّلهما بيانيًّا.

b) هل المستقيمان الممثلان بيانيًّا في الفرع a متوازيان؟ وضّح السبب.

c) أيُّ العرضين هو الأفضل؟ وضّح إجابتك.

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم في كلٍّ من الحالات الآتية:

13) يمر بالنقطة $(-8, 1)$، ويعامد $y = 2x - 17$

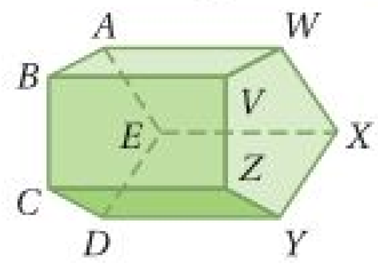
14) يمر بالنقطة $(0, 7)$، ويوازي $y = 4x - 19$

أوجد البعد بين كل مستقيمين متوازيين فيما يأتي:

15) $y = x - 11$
$y = x - 7$

16) $y = -2x + 1$
$y = -2x + 16$

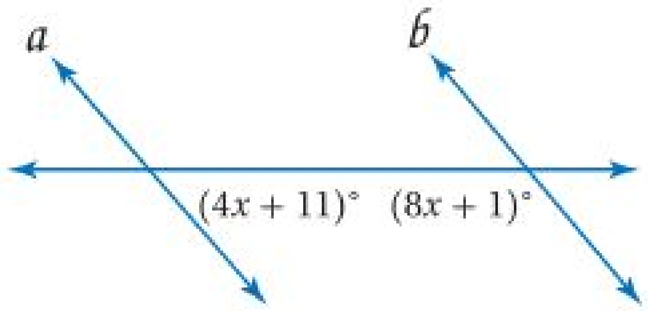
17) **اختيار من متعدد:** أي القطع المستقيمة تخالف $\overline{CD}$ ؟



A) $\overline{ZY}$ C) $\overline{DE}$

B) $\overline{AB}$ D) $\overline{VZ}$

18) أوجد قيمة x التي تجعل $a \parallel b$. وحدّد المسلّمة أو النظرية التي استعملتها.

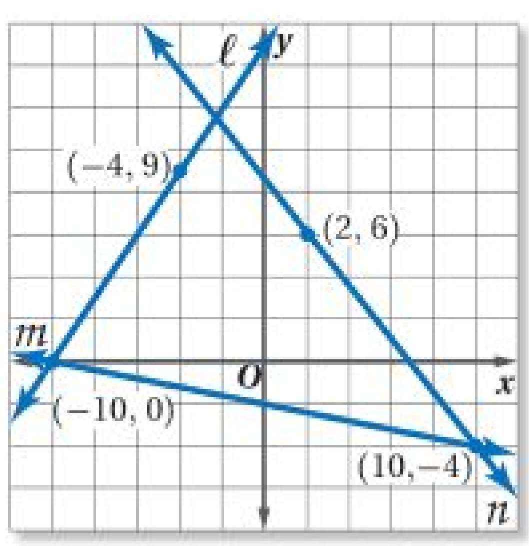


هندسة إحداثية: **أوجد البعد بين النقطة P والمستقيم ℓ في كلٍّ ممّا يأتي:**

19) يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(-5 ,3)$, $(-4 ,2)$. وإحداثيا النقطة P هما $(1, 2)$.

20) يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(3 ,2)$, $(5 ,6)$. وإحداثيا النقطة P هما $(2, 6)$.

استعمل الشكل أدناه لتجد ميل كل مستقيم فيما يأتي:



21) المستقيم ℓ .

22) مستقيم يوازي m .

23) مستقيم يعامد n .

24) **أعمال:** يعمل محمود مندوب مبيعات، ويتقاضى 12 ريالًا عن كل ساعة عمل زائد عمولة مقدارها 15% من قيمة مبيعاته. اكتب معادلة تمثّل ما يتقاضاه في أحد الأسابيع إذا كانت قيمة مبيعاته 2000 ريالٍ.

رسم مستقيمات مساعدة لحل بعض المسائل الهندسية

من المحتمل أن تواجه في الاختبارات بعض الأسئلة التي تحتاج فيها إلى إضافة مستقيمات مساعدة لتطبيق بعض النظريات والمسلمات عليها والوصول لحلها.

استراتيجيات الحل

الخطوة 1

- اقرأ المسألة وتفحص الشكل بإمعان.
- حاول ربط الشكل بأشكال مرتبطة بنظريات أو مسلمات.

الخطوة 2

- قرر الجزء الناقص من الشكل؛ ليكون مشابهًا لشكلٍ له خصائص معينة.
- أضف الجزء الناقص (رسم مستقيم، إكمال زاوية...).

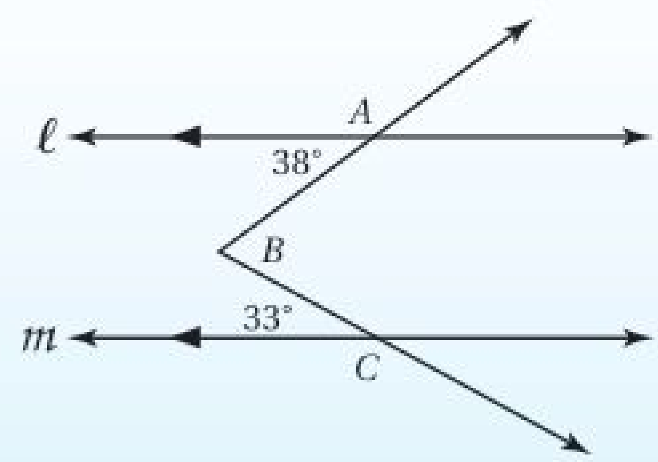
الخطوة 3

- طبق النظريات والمسلمات على الشكل بعد التعديل.
- استنتج المطلوب.

مثال

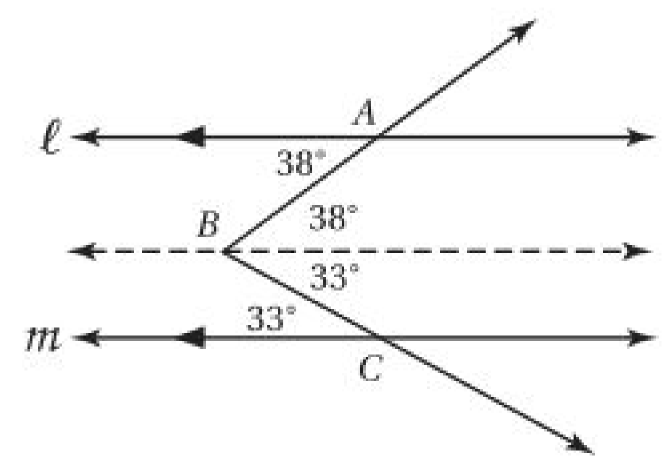
اقرأ المسألة جيدًا، وحدّد ما تحتاج إلى معرفته، ثم استعمل المعطيات لحلها.

في الشكل أدناه: قُطعت $\angle ABC$ بالمستقيمين المتوازيين ℓ و m. ما قياس $\angle ABC$؟
اكتب إجابتك بالدرجات.



ارسم مستقيمًا ثالثًا مساعدًا يوازي المستقيمين ℓ و m مارًّا بالنقطة B. وأوجد قياسات الزوايا باستعمال الزوايا المتبادلة داخليًّا:

حل المسألة

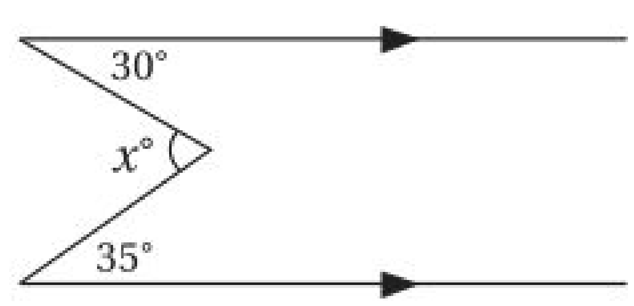


$$m\angle ABC = 38^\circ + 33^\circ = 71^\circ$$

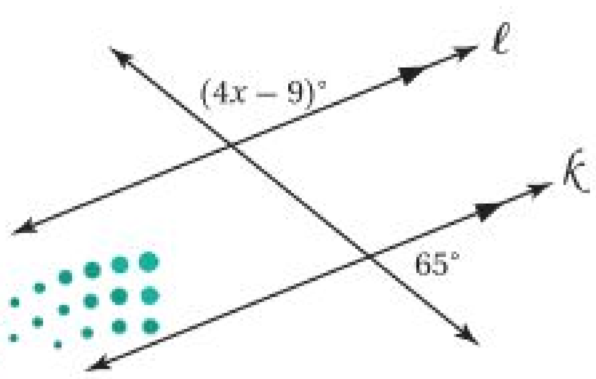
تمارين ومسائل

اقرأ كل سؤال فيما يأتي، ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة:

1) ما قيمة x في الشكل أدناه؟



2) ما قيمة x في الشكل أدناه؟



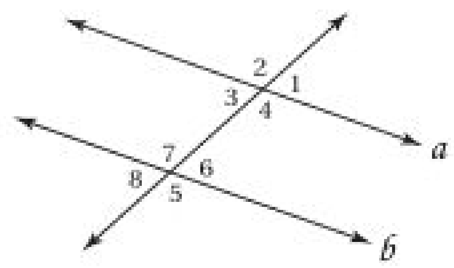
اختبار تراكمي

للفصلين 2 ,1

أسئلة الاختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال فيما يأتي ، ثم اكتب رمز الإجابة الصائبة:

1) في الشكل أدناه: إذا كان $a \parallel b$ ، فأيٌّ مما يأتي صحته ليست مؤكدة؟



A $\angle 1 \cong \angle 3$ C $\angle 2 \cong \angle 5$

B $\angle 4 \cong \angle 7$ D $\angle 8 \cong \angle 2$

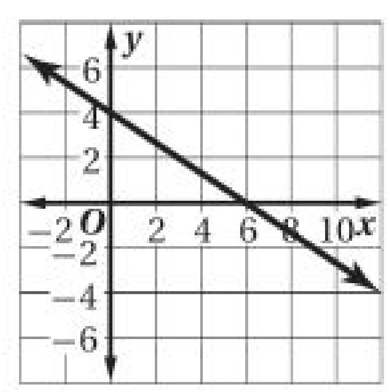
2) أيٌّ مما يأتي مثال مضاد للعبارة أدناه؟

مجموع أي عددين فرديين عدد فردي

A $3 + 3 = 6$ C $6 + 2 = 8$

B $5 + 4 = 9$ D $4 + 9 = 13$

3) ما ميل المستقيم الممثل بيانيًّا أدناه ؟



A $-\frac{2}{3}$ C $-\frac{2}{5}$

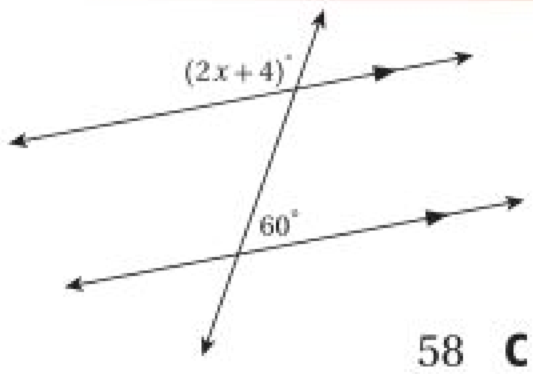
B $-\frac{1}{2}$ D $-\frac{1}{6}$

4) يمر المستقيم k بالنقطتين $(4, 1)$ و $(-5, -5)$. أوجد البعد بين المستقيم k والنقطة $F(-4, 0)$.

A 3.3 وحداتٍ C 4.0 وحداتٍ

B 3.6 وحداتٍ D 4.2 وحداتٍ

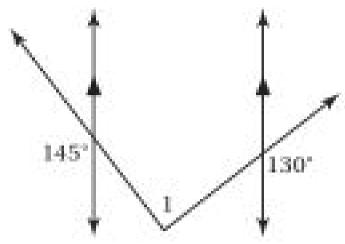
5) ما قيمة x على الشكل أدناه؟



A 120 C 58

B 116 D 60

6) ما قياس $\angle 1$ في الشكل أدناه؟



A 85 C 95

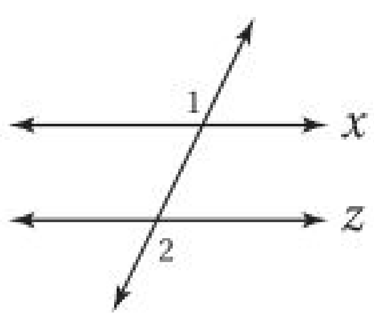
B 90 D 100

7) يرغب عبدالله في شراء ساعة يد سعرها 580 ريالًا . إذا كان لديه 140 ريالًا ، ويمكنه ادخار 40 ريالًا أسبوعيًّا، فبعد كم أسبوعٍ يتوافر لديه المبلغ الكافي لشراء الساعة؟

A 10 C 12

B 11 D 13

8) إذا كان $m\angle 1 = 110°$، فما قيمة $m\angle 2$ التي تجعل المستقيمين x, z متوازيين؟



A $30°$ B $60°$ C $70°$ D $110°$

9) ما ميل المستقيم المار بالنقطتين $(-6, -2)$ ، $(3, -5)$ ؟

A 3 C $-\frac{1}{3}$

B $\frac{1}{3}$ D -3

إرشادات للاختبار

السؤال 6: يمكن أن يساعدك الرسم على حل المسألة؛ لذا ارسم مستقيمًا ثالثًا موازيًا يمر برأس الزاوية 1 ، ثم استعمل خصائص المستقيمات المتوازية والقاطع لحل المسألة.

أسئلة ذات إجابات قصيرة

اكتب إجابتك في ورقة الإجابة:

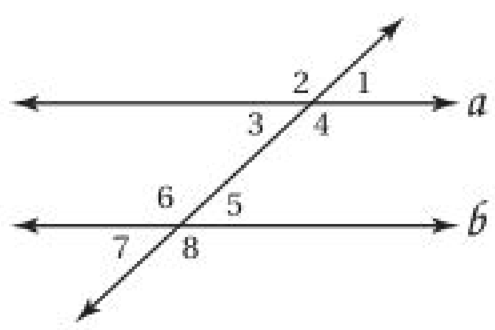
10) إذا عُلم مستقيم ونقطة لا تقع عليه، فكم مستقيمًا يمر بتلك النقطة ويوازي المستقيم المعلوم ؟

11) أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(4, 3), (-2, -5)$.

12) أكمل البرهان الآتي :

المعطيات: $m\angle 1 + m\angle 8 = 180°$

المطلوب: $a \parallel b$



البرهان:

العبارات	المبررات
1) $m\angle 1 + m\angle 8 = 180°$	1) مُعطى
2) $m\angle 1 = 180° - m\angle 8$	2) ___؟___
3) $m\angle 5 + m\angle 8 = 180°$	3) ___؟___
4) $m\angle 5 = 180° - m\angle 8$	4) خاصية الطرح للمساواة
5) ________	5) خاصية التعدي للمساواة أو (خاصية التعويض)
6) ________	6) عكس مسلمة الزاويتين المتناظرتين

13) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(0, 3)$, $(4, -5)$ بصيغة الميل والمقطع الصادي.

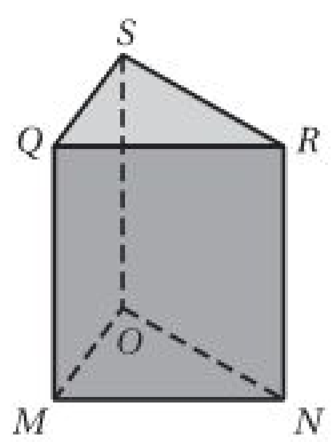
14) اكتب المعاكس الإيجابي للعبارة :

"إذا كان الشكل مربعًا، فإنه متوازي أضلاع".

أسئلة ذات إجابات مطولة

اكتب إجابتك في ورقة الإجابة مبينًا خطوات الحل.

15) استعمل الشكل أدناه لتحدد كلًّا مما يأتي:

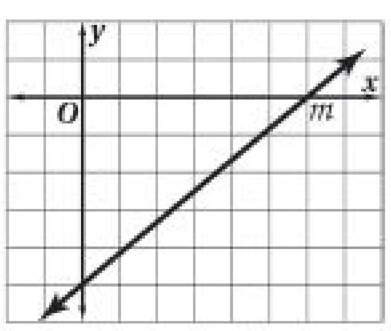


a) جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{MQ}$

b) جميع المستويات المتقاطعة مع المستوى SRN

c) قطعة مستقيمة تخالف $\overline{ON}$

16) استعمل التمثيل البياني المجاور للإجابة عن كلٍّ من الأسئلة الآتية:



a) ما معادلة المستقيم m؟

b) ما ميل المستقيم الذي يوازي المستقيم m؟

c) ما ميل مستقيم عمودي على المستقيم m؟

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

إذا لم تجب عن سؤال ..	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
فعد إلى ..	2-2	1-1	2-4	2-6	2-2	2-2	2-5	2-3	2-4	2-3	2-4	2-3	2-5	1-3	2-1	2-5

مراجعة بعض المصطلحات والرموز

المصطلح باللغة العربية	الرمز في المرحلة المتوسطة	الرمز في المرحلة الثانوية
الإحداثي السيني	س	x
الإحداثي الصادي	ص	y
ارتفاع	ل	h
الجذر التربيعي	$\sqrt{\ }$	$\sqrt{\ }$
قياس زاوية	ق ⦣ أ ب جـ	$m\angle ABC$
زاوية	⦣	$\angle$
زوج مرتب	(أ ، ب)	(a, b)
قاعدة	ق	b
قطر دائرة	٢ نق	d
قطعة مستقيمة	$\overline{\text{أ ب}}$ قطعة مستقيمة طرفاها أ ، ب	$\overline{AB}$ قطعة مستقيمة طرفاها A, B
محيط الدائرة	مح	C
مركز الدائرة	م	C
مساحة	م	A
مستقيم	$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مستقيم يمر بالنقطتين أ وَ ب	$\overleftrightarrow{AB}$ مستقيم يمر بالنقطتين A, B
المسافة بين نقطتين	ف	d
نصف قطر الدائرة	نق	r
نصف مستقيم	$\overleftarrow{\text{أ ب}}$	$\overleftarrow{\text{أ ب}}$ نصف مستقيم يمر بالنقطة ب وطرفه أ
نقطة الأصل	م	o

الصيغ

الهندسة الإحداثية

نقطة المنتصف	على خط الأعداد: $M = \frac{a+b}{2}$ في المستوى الإحداثي: $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ في الفراغ: $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$	المسافة بين نقطتين	على خط الأعداد: $d = \lvert a-b \rvert$ في المستوى الإحداثي: $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$ في الفراغ: $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$
		الميل	$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, x_2 \neq x_1$

المحيط

المربع	$P = 4s$	الدائرة	$C = \pi d$ أو $C = 2\pi r$
المستطيل	$P = 2\ell + 2w$		

المساحة

المربع	$A = s^2$	المُعيَّن	$A = bh$ أو $A = \frac{1}{2}d_1 d_2$
المستطيل	$A = bh$ أو $A = \ell w$	المثلث	$A = \frac{1}{2}bh$
متوازي الأضلاع	$A = bh$	الدائرة	$A = \pi r^2$
شبه المنحرف	$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$	القطاع الدائري	$A = \frac{N}{360} \cdot \pi r^2$

المساحة الجانبية

المنشور	$L = Ph$	الهرم	$L = \frac{1}{2}P\ell$
الأسطوانة	$L = 2\pi rh$	المخروط	$L = \pi r\ell$

المساحة الكلية للسطح

المنشور	$T = Ph + 2B$	المخروط	$T = \pi r\ell + \pi r^2$
الأسطوانة	$T = 2\pi rh + 2\pi r^2$	الكرة	$T = 4\pi r^2$
الهرم	$T = \frac{1}{2}P\ell + B$		

الحجم

المكعب	$V = s^3$	الهرم	$V = \frac{1}{3}Bh$
متوازي المستطيلات	$V = \ell wh$	المخروط	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
المنشور	$V = Bh$	الكرة	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
الأسطوانة	$V = \pi r^2 h$		

الصيـغ

المعادلات في المستوى الإحداثي

معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع	$y = mx + b$	معادلة الدائرة	$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$
معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة	$y - y_1 = m(x - x_1)$	الصيغة التربيعية	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

حساب المثلثات

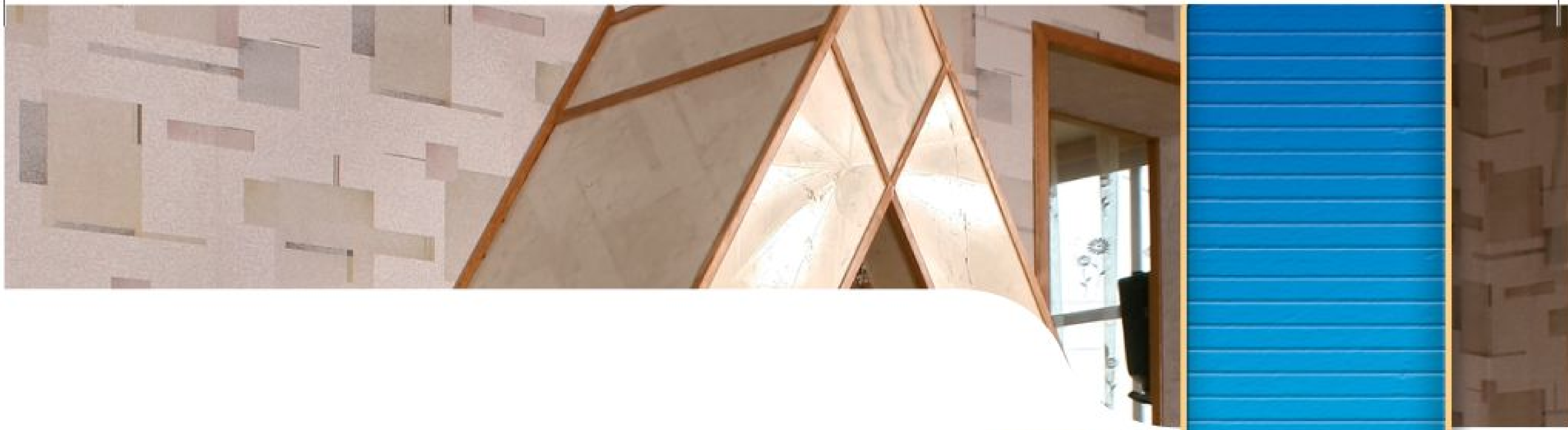
قانون الجيب	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$	نظرية فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$
قانون جيب التمام	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$		

الرموز

a	العامِد
$\approx$	مساوٍ تقريبًا لـ
$\widehat{AB}$	القوس الأصغر الذي طرفاه A وَ B
$\widehat{ABC}$	القوس الأكبر الذي طرفاه A وَ C
A	مساحة المضلع أو الدائرة أو القطاع الدائري
B	مساحة قاعدة المنشور أوالأسطوانة أو الهرم أو المخروط
$p \leftrightarrow q$	العبارة الشرطية الثنائية: p إذا وفقط إذا q
$\odot P$	دائرة مركزها P
C	محيط الدائرة
$p \rightarrow q$	العبارة الشرطية: إذا كان p فإن q
$\cong$	مطابق لـ
$p \wedge q$	p وَ q
cos	جيب التمام
$^\circ$	درجة
$p \vee q$	p أو q
AB	المسافة بين النقطتين A وَ B، أو طول القطعة المستقيمة $\overline{AB}$
$=$	يساوي
$\neq$	لا يساوي
$>$	أكبر من
$\geq$	أكبر من أو يساوي
A'	صورة A
$<$	أقل من
$\leq$	أقل من أو يساوي
L	المساحة الجانبية
$m\widehat{AB}$	قياس القوس AB بالدرجات
M	نقطة المنتصف
$\sim p$	نفي العبارة p
(x, y, z)	الثلاثي المرتب
$\parallel$	موازٍ لـ
$\nparallel$	ليس موازيًا لـ
$\square$	متوازي أضلاع
P	المحيط
$\perp$	عمودي على
π	باي (ط) النسبة التقريبية
s	طول ضلع من مضلع
$\sim$	مشابه
sin	الجيب
ℓ	المستقيم ℓ ، طول المستطيل، طول القوس، الارتفاع الجانبي
m	الميل
tan	الظل
T	مساحة السطح الكلية
$\triangle$	المثلث
V	الحجم
w	عرض المستطيل

القسم الثاني

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445



الفهرس

الفصل 3 المثلثات المتطابقة

الفصل 4 العلاقات في المثلث

الفهرس

الفصل 5 الأشكال الرباعية

الفصل
3

المثلثات المتطابقة
Congruent Triangles

فيما سبق:

درست القطع المستقيمة والزوايا والعلاقات بين قياساتها.

والآن:

- أطبق العلاقات الخاصة بالزوايا الداخلية والزوايا الخارجية للمثلثات.
- أحدد العناصر المتناظرة في مثلثات متطابقة، وأبرهن على تطابق المثلثات.
- أتعرف خصائص المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع.

لماذا؟

لياقة: تستعمل المثلثات لتقوية إنشاءات ومعدات كثيرة، من بينها أجهزة اللياقة البدنية مثل هياكل الدراجات.

المطويات منظم أفكار

المثلثات المتطابقة: اعمل المطوية التالية لتنظيم ملاحظاتك حول المثلثات المتطابقة. ابدأ بثلاث أوراق رسم بياني وورقة مقواة من الحجم نفسه.

1. **ضع** أوراق الرسم البياني فوق الورقة المقواة، ثم اطوِ الأوراق لتشكل مثلثًا، كما في الشكل، ثم قص الورق الزائد.

2. **ثبِّت** الحافة، بحيث تشكل الأوراق دفترًا، واكتب عنوان الفصل في الصفحة الأولى، ورقِّم كل درس وعنوانه في باقي الصفحات.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

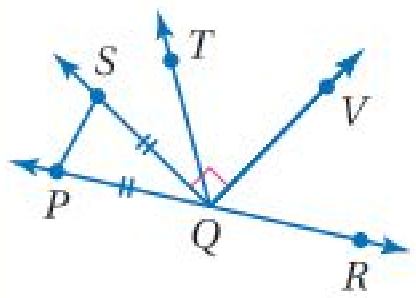
التهيئة للفصل 3

تشخيص الاستعداد:

أجب عن الاختبار الآتي، انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

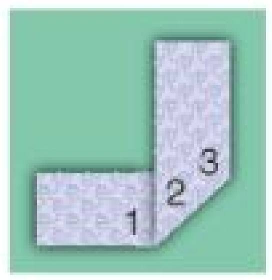
صنِّف كل زاوية مما يأتي إلى قائمة أو حادّة أو منفرجة، ثم صنِّف ΔSQP بحسب أضلاعه.



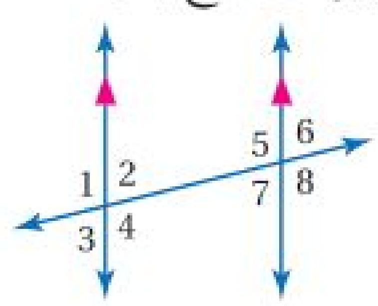
1) $\angle VQS$ 2) $\angle TQV$

3) $\angle PQV$

4) **تصاميم ورقية:** اطْوِ قطعة مستطيلة من الورق كما في الشكل المجاور، بحيث تتشكل زاوية قائمة من جهة الطي، ثم صنِّف كلًّا من الزوايا المرقمة إلى قائمة أو منفرجة أو حادّة.



جبْر: استعمل الشكل أدناه لإيجاد المتغيِّر المطلوب في كلٍّ من السؤالين الآتيين. ووضِّح إجابتك:



5) أوجد قيمة x إذا علمت أنّ: $m\angle 3 = (x-12)^\circ$، وأنّ $m\angle 6 = 72^\circ$

6) أوجد قيمة y . إذا علمت أنّ $m\angle 4 = (2y+32)^\circ$، وأنّ $m\angle 5 = (3y-3)^\circ$.

أوجد المسافة بين النقطتين في كلٍّ مما يأتي:

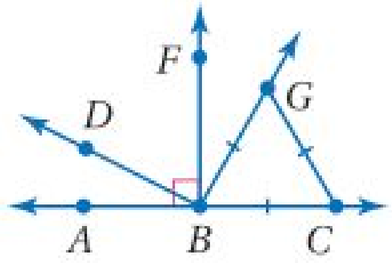
7) $X(-2, 5), Y(1, 11)$ 8) $R(8, 0), S(-9, 6)$

9) **خرائط:** قسَّمت منى خريطة المملكة برسم خطوط رأسية وأفقية، بحيث تمثل الوحدة عليها 35 كيلومترًا. إذا كان موقع المدينة التي تسكنها منى على الخريطة عند النقطة $(0, 0)$، وكانت مدينة نجران تقريبًا عند النقطة $(5, 2.2)$، فاحسب المسافة بين المدينتين إلى أقرب كيلومتر تقريبًا.

مراجعة سريعة

مثال 1

صنِّف كل زاوية مما يأتي إلى قائمة أو حادّة أو منفرجة، ثم صنِّف ΔGBC بحسب أضلاعه.



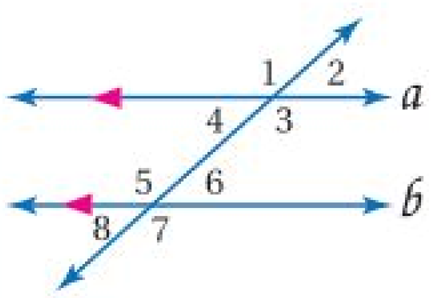
a) $\angle ABG$ تقع النقطة G خارج الزاوية القائمة $\angle ABF$؛ لذا تكون $\angle ABG$ زاوية منفرجة.

b) $\angle DBA$ تقع النقطة D داخل الزاوية القائمة $\angle FBA$؛ لذا تكون $\angle DBA$ زاوية حادة.

بما أن أطوال أضلاع المثلث جميعها متطابقة إذن هو متطابق الأضلاع.

مثال 2

في الشكل المجاور، إذا كان $m\angle 4 = 42^\circ$، فأوجد $m\angle 7$.



$\angle 7$ و $\angle 1$ زاويتان متبادلتان خارجيًّا؛ لذا فهما زاويتان متطابقتان. $\angle 1$ و $\angle 4$ تشكِّلان زاوية مستقيمة؛ لذا فهما زاويتان متكاملتان. ينتج مما سبق أن $\angle 7$ و $\angle 4$ متكاملتان؛ إذن: $m\angle 7 = 180^\circ - 42^\circ$، أي 138°

مثال 3

أوجد المسافة بين النقطتين $J(5, 2), K(11, -7)$.

$JK = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ صيغة المسافة بين نقطتين

$= \sqrt{(11-5)^2 + [(-7) - 2]^2}$ عوّض

$= \sqrt{6^2 + (-9)^2}$ اطرح

$= \sqrt{36 + 81} = \sqrt{117}$ بسّط

1-3 تصنيف المثلثات
Classifying triangles

فيما سبق:

درست قياس الزوايا وتصنيفها.

(مهارة سابقة)

والآن:

- أستعمل تصنيف المثلثات وفقًا لأضلاعها أو زواياها في إيجاد قيم مجهولة.

المفردات:

المثلث الحاد الزوايا
acute triangle

المثلث المنفرج الزاوية
obtuse triangle

المثلث القائم الزاوية
right triangle

المثلث المتطابق الأضلاع
equilateral triangle

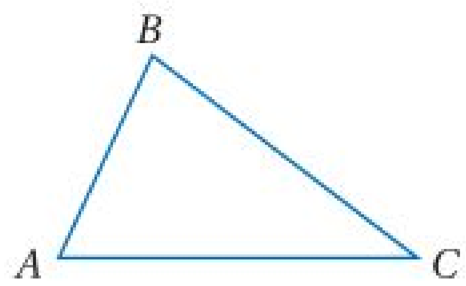
المثلث المتطابق الضلعين
isosceles triangle

المثلث المختلف الأضلاع
scalene triangle

لماذا؟

يعدُّ المثلث عنصرًا زخرفيًّا مميزًا في العمارة التقليدية في المملكة العربية السعودية، كما يلاحظ ذلك في صالات المسافرين بمطار الملك خالد الدولي بمدينة الرياض.

تصنيف المثلثات وفقًا لزواياها: يكتب المثلث ABC على الصورة $\triangle ABC$، وتُسمى عناصره باستعمال الأحرف A, B, C كما يلي:



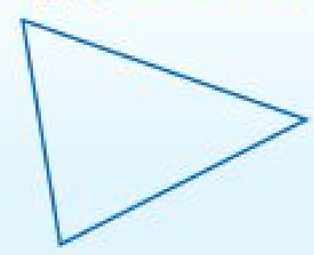
- أضلاع $\triangle ABC$ هي: $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$
- الرؤوس هي: A, B, C
- الزوايا هي: $\angle A$ أو $\angle BAC$، $\angle C$ أو $\angle BCA$، $\angle B$ أو $\angle ABC$

وتُصنّف المثلثات بطريقتين: وفقًا لزواياها أو أضلاعها. وتحتوي جميع المثلثات على زاويتين حادتين على الأقل، وتُستعمل الزاوية الثالثة لتصنيف المثلث.

مفهوم أساسي — تصنيف المثلثات وفقًا لزواياها

أضف إلى مطويتك

مثلث حاد الزوايا

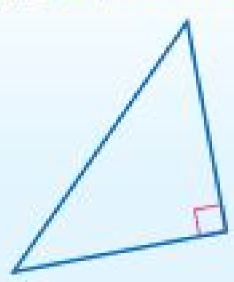


3 زوايا حادة

مثلث منفرج الزاوية

إحدى الزوايا منفرجة

مثلث قائم الزاوية



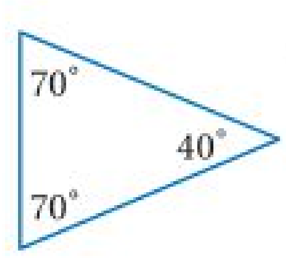
إحدى الزوايا قائمة

يمكن تصنيف أي مثلث وفقًا لزواياه إلى أحد التصنيفات السابقة، بمعرفة قياسات زواياه.

مثال 1 تصنيف المثلثات وفقًا لزواياها

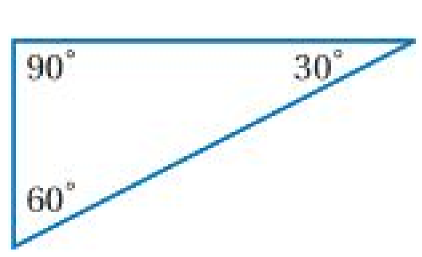
صنّف كلًّا من المثلثين الآتيين وفقًا لزواياه:

(a



زوايا المثلث الثلاث حادّة؛ لذا فالمثلث حادُّ الزوايا.

(b



قياس إحدى زوايا هذا المثلث $90°$، وبما أن إحدى زواياه قائمة، فإنه مثلث قائم الزاوية.

مراجعة المفردات

الزاوية الحادة: زاوية يقل قياسها عن 90°

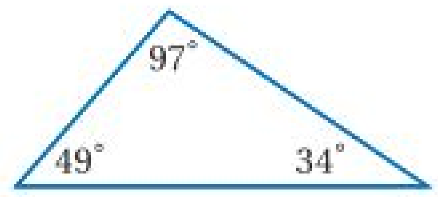
الزاوية القائمة: زاوية قياسها 90°

الزاوية المنفرجة: زاوية قياسها أكبر من 90°

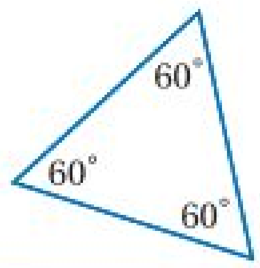
✓ تحقق من فهمك

صنّف كلًّا من المثلثين الآتيين وفقًا لزواياه:

(1A

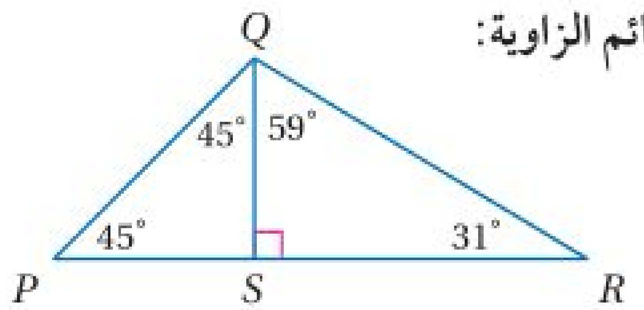


(1B



مثال 2 تصنيف المثلثات ضمن أشكال مختلفة وفقًا لزواياها

صنّف $\triangle PQR$ إلى حادّ الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:



تقع النقطة S داخل $\angle PQR$، وحسب مسلّمة جمع قياسات الزوايا

يكون: $m\angle PQR = m\angle PQS + m\angle SQR$

بالتعويض: $m\angle PQR = 45^\circ + 59^\circ = 104^\circ$

وبما أن إحدى زوايا $\triangle PQR$ منفرجة، فإنه منفرج الزاوية.

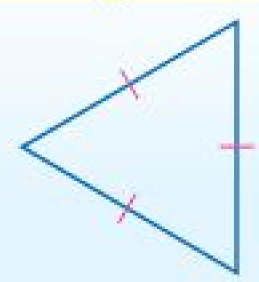
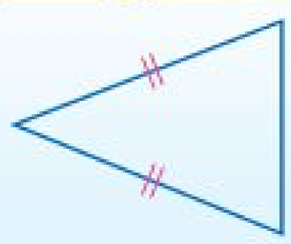
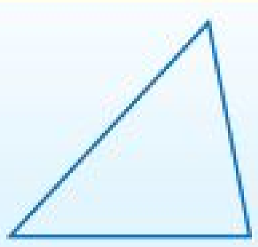
✓ تحقق من فهمك

2) استعمل الشكل أعلاه لتصنيف $\triangle PQS$ إلى: حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية.

تصنيف المثلثات وفقًا لأضلاعها: يمكن كذلك تصنيف المثلثات بحسب عدد الأضلاع المتطابقة فيها. وللدلالة على تطابق ضلعين في مثلث، يوضع عدد متساوٍ من الشرطات الصغيرة على الضلعين المتطابقين.

مفهوم أساسي — تصنيف المثلثات وفقًا لأضلاعها

أضف إلى مطويتك

مثلث متطابق الأضلاع	مثلث متطابق الضلعين	مثلث مختلف الأضلاع
		
3 أضلاع متطابقة	ضلعان على الأقل متطابقان	لا توجد أضلاع متطابقة

إن المثلث المتطابق الأضلاع حالة خاصة من المثلث المتطابق الضلعين.

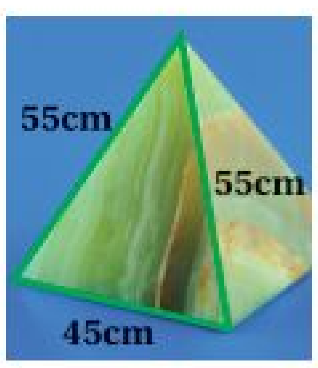
الربط مع الحياة

في العديد من السيارات، تُشغَّل أضواء الخطر بالضغط على زرٍّ صغير قرب المقود. يكون شكل هذا الزر عادة مثلثًا أحمر أو برتقاليًا صغيرًا كما في الشكل أعلاه.

عندما يشغَّل هذا الزر تضيء أضواء إشارات الانعطاف بطريقة تحذيرية، وبنمط خاص يسهّل رؤية السيارة من قِبل السائقين الآخرين.

مثال 3 من واقع الحياة تصنيف المثلثات وفقًا لأضلاعها

فن العمارة: صنّف المثلث في الشكل المجاور وفقًا لأضلاعه.

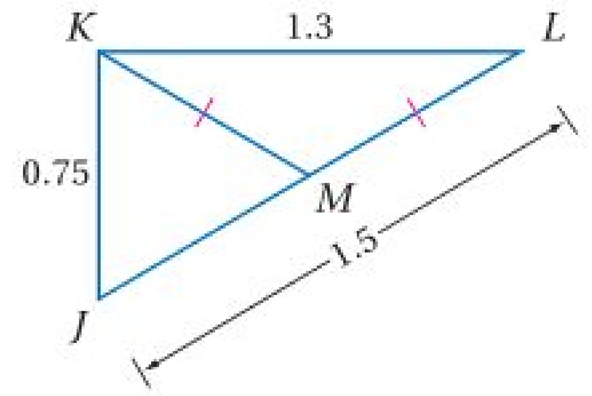


في المثلث ضلعان قياس كلٍّ منهما 55 cm؛ أيْ أنّه في المثلث ضلعين متطابقين. فيكون المثلث متطابق الضلعين.

✓ تحقق من فهمك

3) **قيادة السيارة والسلامة:** صنّف شكل زرِّ ضوءِ الخطر في الهامش يمين الصفحة وفقًا لأضلاعه.

مثال 4 تصنيف المثلثات ضمن أشكال مختلفة وفقًا لأضلاعها



إذا كانت M نقطة منتصف $\overline{JL}$، فصنِّف $\triangle JKM$ إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع. ووضِّح إجابتك.

من تعريف نقطة المنتصف $JM = ML$.

$JM + ML = JL$	مسلمة جمع قياسات القطع المستقيمة
$ML + ML = 1.5$	عوِّض
$2ML = 1.5$	بسِّط
$ML = 0.75$	اقسم الطرفين على 2
$JM = ML = 0.75$	

وبما أن $\overline{KM} \cong \overline{ML}$، فإنّ $KM = ML = 0.75$

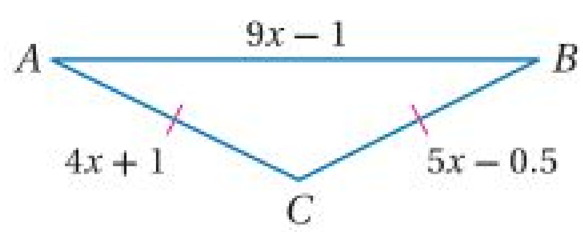
وهكذا تكون قياسات أضلاع المثلث الثلاثة متساوية، أي أن الأضلاع الثلاثة متطابقة؛ لذا فإن المثلث متطابق الأضلاع.

✓ تحقق من فهمك

4) صنِّف $\triangle KML$ إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع. ووضِّح إجابتك.

يمكنك استعمال خصائص المثلثات المتطابقة الأضلاع والمتطابقة الضلعين؛ لإيجاد قيم مجهولةٍ كما في المثال الآتي:

مثال 5 إيجاد قيم مجهولة



جبر: أوجد قياسات أضلاع المثلث المتطابق الضلعين ABC في الشكل المجاور.

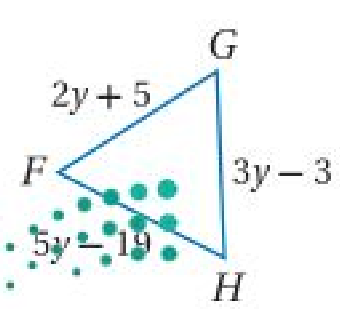
الخطوة 1: أوجد قيمة x.

$AC = CB$	مُعطى
$4x + 1 = 5x - 0.5$	عوِّض
$1 = x - 0.5$	اطرح $4x$ من الطرفين
$1.5 = x$	اجمع 0.5 إلى الطرفين

الخطوة 2: عوّض لإيجاد طول كل ضلع من أضلاع المثلث:

$AC = 4x + 1$	مُعطى
$= 4(1.5) + 1 = 7$	$x = 1.5$
$CB = AC$	مُعطى
$= 7$	$AC = 7$
$AB = 9x - 1$	مُعطى
$= 9(1.5) - 1$	$x = 1.5$
$= 12.5$	بسِّط

✓ تحقق من فهمك



5) أوجد قياسات أضلاع المثلث المتطابق الأضلاع FGH.

إرشادات للدراسة

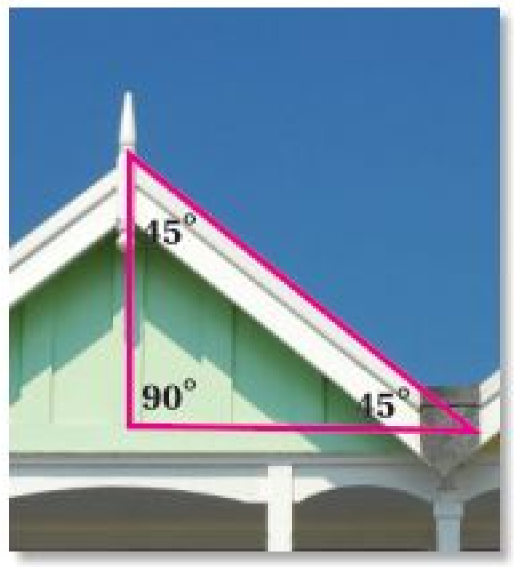
تحقق

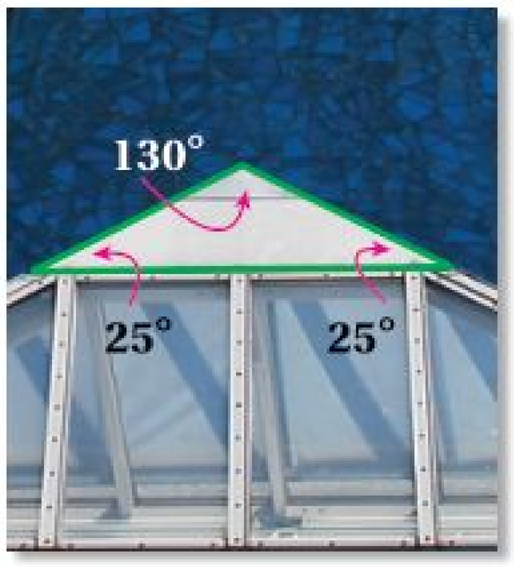
للتحقق من الإجابة في المثال 5، اختبر ما إذا كانت $CB = AC$ عندما نعوِّض بـ 1.5 مكان x في العبارة $5x - 0.5$ التي تمثل CB.

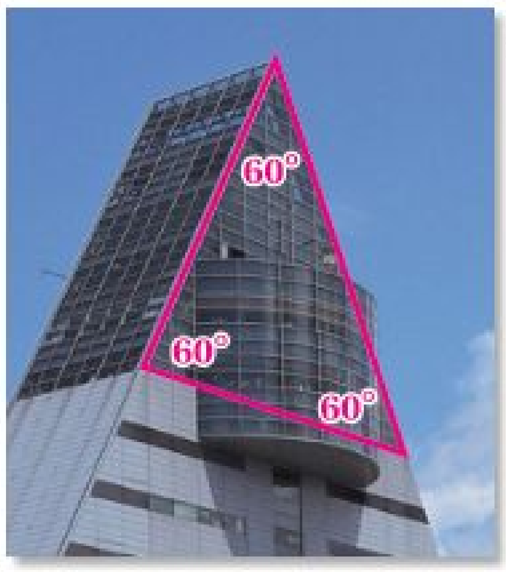
$CB = 5x - 0.5$
$= 5(1.5) - 0.5$
$= 7$ ✓

تأكد

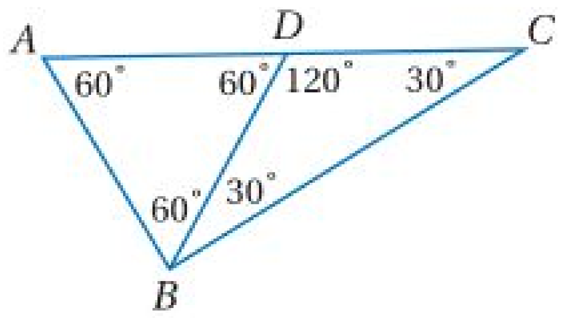
المثال 1 **فنّ العمارة:** صنّف كلًّا من المثلثات الآتية وفقًا لزواياه.

(1


(2


(3


المثال 2 صنّف كلًّا من المثلثات الآتية وفقًا لزواياه.

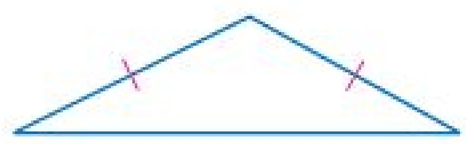


4) $\triangle ABD$

5) $\triangle BDC$

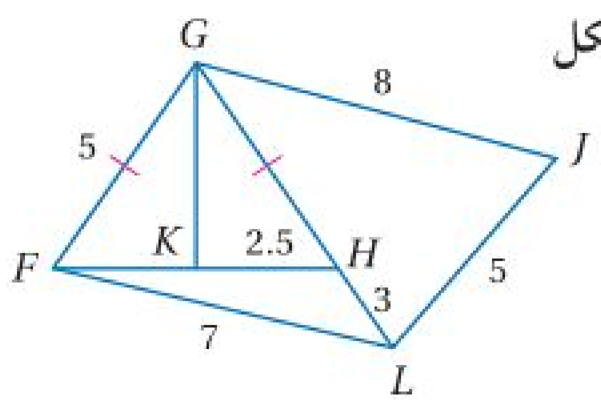
6) $\triangle ABC$

المثال 3 صنّف كلًّا من المثلثين الآتيين وفقًا لأضلاعه.

(7


(8


المثال 4 إذا كانت النقطة K هي منتصف $\overline{FH}$ ، فصنّف كلًّا من المثلثات الآتية في الشكل المجاور إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع:

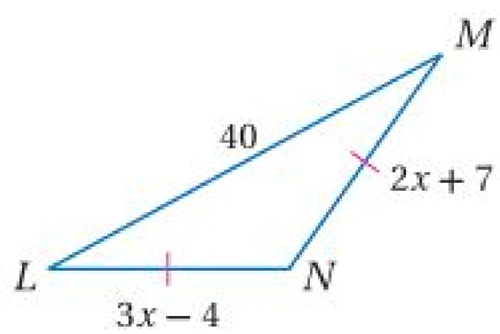


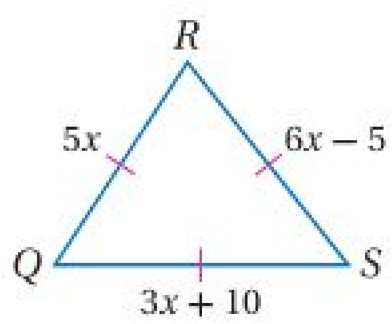
9) $\triangle FGH$

10) $\triangle GJL$

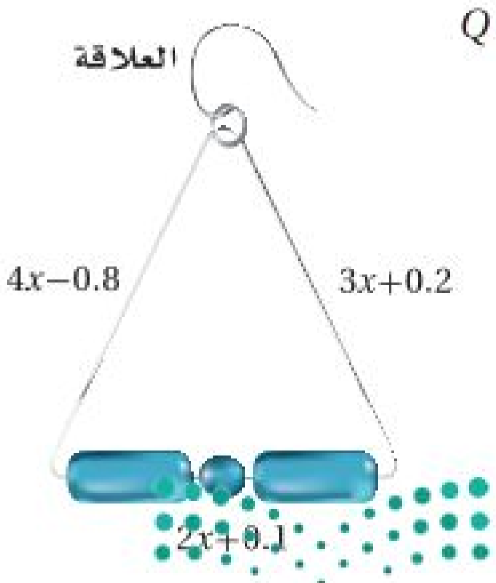
11) $\triangle FHL$

المثال 5 **جبر:** أوجد قيمة x وأطوال الأضلاع المجهولة في كلٍّ من المثلثين الآتيين:.

(12


(13


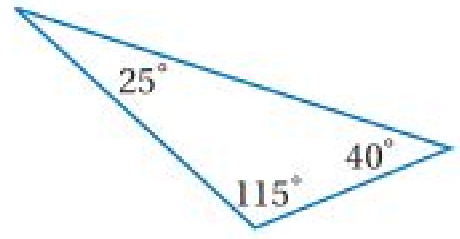
14) **مجوهرات:** افترض أن لديك سلكًا مرنًا من الفولاذ غير قابل للصدأ، وتريد أن تُشكّله لتعمل قرطًا. إذا كان الجزء المثلث من القرط متطابق الضلعين، وأبعاده كما في الصورة، وطول جزء العلاقة 1.5 cm، فكم سنتمترًا من السلك تحتاج لعمل القرط؟ برِّر إجابتك.



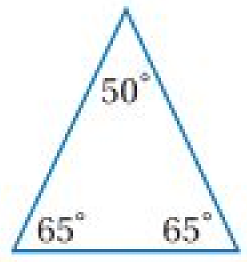
تدرب وحل المسائل

المثال 1 صنِّف كلًّا من المثلثات الآتية وفقًا لزواياه:

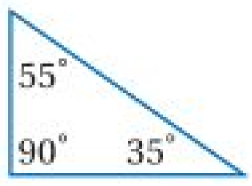
(15



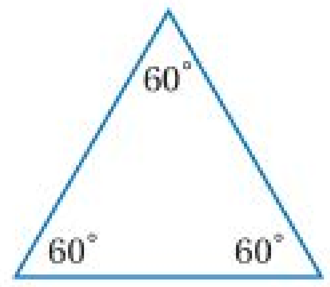
(16



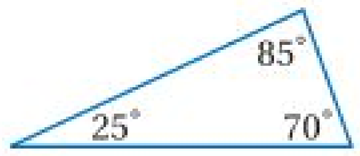
(17



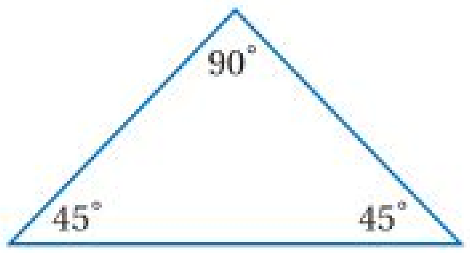
(18



(19



(20



المثال 2 صنِّف كلًّا من المثلثات الآتية وفقًا لزواياه:

(21 $\triangle UYZ$

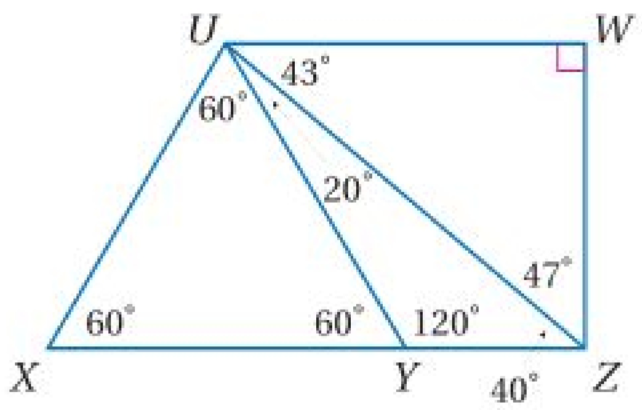
(22 $\triangle BCD$

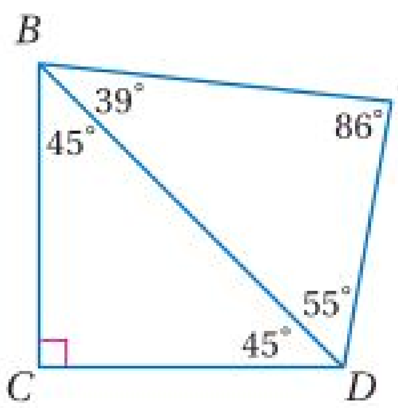
(23 $\triangle ADB$

(24 $\triangle UXZ$

(25 $\triangle UWZ$

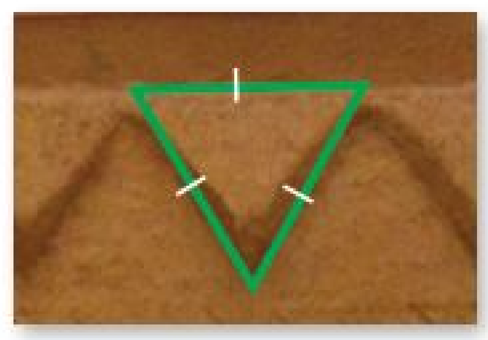
(26 $\triangle UXY$





المثال 3 صنِّف كلًّا من المثلثين الآتيين وفقًا لأضلاعه:

(27



(28

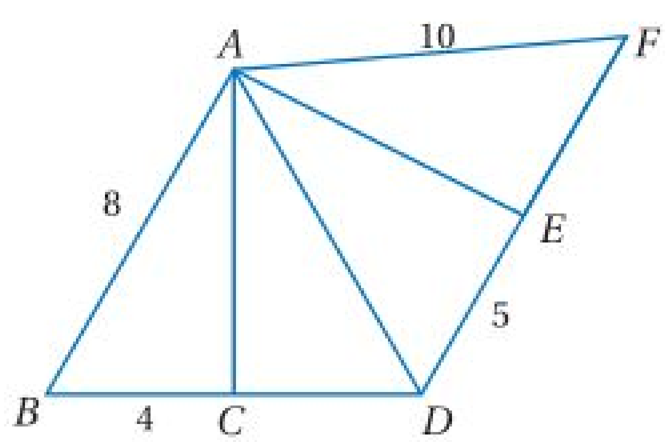
المثال 4 إذا كانت النقطة C هي منتصف $\overline{BD}$، والنقطة E منتصف $\overline{DF}$، فصنِّف كلًّا من المثلثات الآتية وفقًا لأضلاعها:

(29 $\triangle ABC$

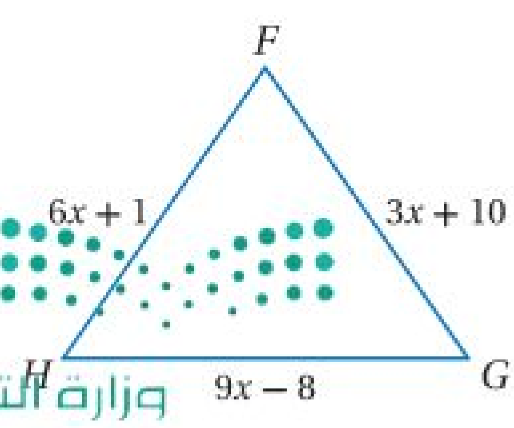
(30 $\triangle ADF$

(31 $\triangle ACD$

(32 $\triangle ABD$

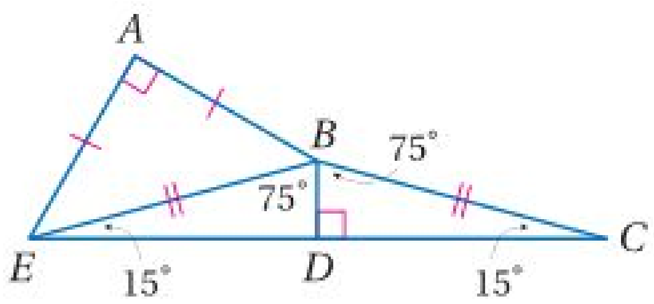


المثال 5 **(33** **جبر:** إذا علمت أن المثلث $\triangle FGH$ متطابق الأضلاع، فأوجد قيمة x وطول كل ضلع من أضلاعه.



34) فنّ تشكيلي: صنّف كلًّا من المثلثات المرقمة في الشكل وفق زواياه ثم وفق أضلاعه. استعمل المثلث القائم الزاوية لتصنيف الزوايا، والمسطرة لقياس الأضلاع.

صنّف كلًّا من المثلثات الظاهرة في الشكل المجاور وفق زواياه، ثم وفق أضلاعه:

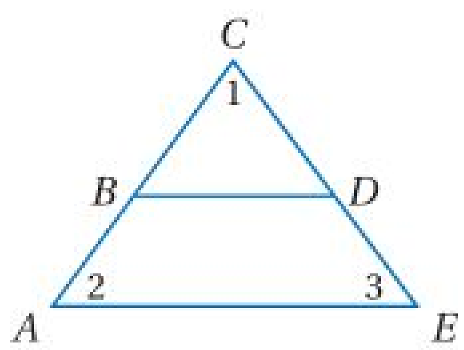


35) $\triangle ABE$ 36) $\triangle EBC$ 37) $\triangle BDC$

هندسة إحداثية: أوجد أطوال أضلاع $\triangle XYZ$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين، وصنّفه وفق أضلاعه:

38) $X(-5, 9), Y(2, 1), Z(-8, 3)$ 39) $X(7, 6), Y(5, 1), Z(9, 1)$

40) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين تبين فيه أنّ $\triangle BCD$ متطابق الزوايا، إذا كان $\triangle ACE$ متطابق الزوايا، وكانت $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$.

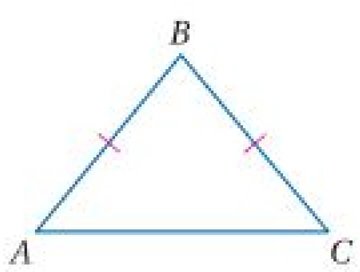


جبر: أوجد قيمة x وأطوال أضلاع المثلث في كلٍّ مما يأتي:

41) $\triangle FGH$ مثلث متطابق الأضلاع فيه: $FG = 3x - 10$, $GH = 2x + 5$, $HF = x + 20$.

42) $\triangle RST$ متطابق الأضلاع. ويزيد RS ثلاثة على أربعة أمثال x، ويزيد ST سبعة على مثلَي x، ويزيد TR واحدًا على خمسة أمثال x .

43) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستكتشف العلاقة بين قياسَي الزاويتين اللتين تقابلان ضلعين متطابقين في مثلث، ومجموع زوايا المثلث المتطابق الضلعين.



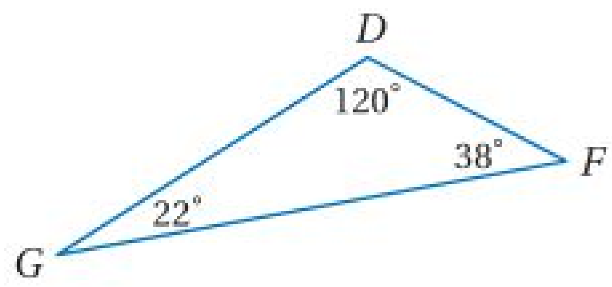
a) **هندسيًّا:** ارسم أربعة مثلثات متطابقة الضلعين، منها مثلث حادّ الزوايا ومثلث قائم الزاوية، ومثلث منفرج الزاوية. وفي كلٍّ من هذه المثلثات سمِّ الرأسيْن المقابلين للضلعين المتطابقين A, C، وسمِّ الرأس الثالث B. ثم قس زوايا كل مثلث، واكتب على كل زاوية قياسها.

b) **جدوليًّا:** رتِّب قياسات الزوايا في جدول. وضمِّنه عمودًا تكتب فيه مجموع قياسات هذه الزوايا.

c) **لفظيًّا:** خمّن العلاقة بين قياسَيْ الزاويتين اللتين تقابلان الضلعين المتطابقين في مثلث متطابق الضلعين، ثم خمّن مجموع قياسات زوايا المثلث المتطابق الضلعين.

d) **جبريًّا:** إذا كان قياس إحدى الزاويتين اللتين تقابلان الضلعين المتطابقين في مثلث متطابق الضلعين هو x، فاكتب عبارتين جبريتين تمثّلان قياسَيْ الزاويتين الأخريين. وفسِّر إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا



44) **اكتشف الخطأ:** تقول ليلى: إن $\triangle DFG$ منفرج الزاوية، لكن نوال لا توافقها الرأي وتقول: إن عدد الزوايا الحادة في المثلث أكثر من عدد الزوايا المنفرجة؛ لذا فإن المثلث حادّ الزوايا. أيّتهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسر إجابتك.

تبرير: قرِّر ما إذا كانت الجملة في كلٍّ مما يأتي صحيحة أحيانًا أو صحيحة دائمًا أو غير صحيحة أبدًا. ووضح إجابتك.

45) المثلث المتطابق الزوايا هو مثلث قائم الزاوية أيضًا.

46) المثلث المتطابق الأضلاع هو مثلث متطابق الضلعين أيضًا.

47) **تحدٍّ:** إذا كان طولا ضلعين من أضلاع مثلث متطابق الأضلاع $5x + 5$ وحدات، $7x - 5$ وحدات، فما محيطه؟ فسِّر إجابتك.

48) **اكتب:** فسِّر لماذا يُعد تصنيف المثلث المتطابق الزوايا أنه مثلث حاد متطابق الزوايا، تصنيفًا غير ضروري؟

تدريب على اختبار

49) **جبر:** اشترى خالد معجمًا من معرض الكتب بعد تخفيض نسبته 40% . إذا كان ثمنه قبل التخفيض 84.50 ريالًا، فكم ريالًا وفّر خالد؟

A 50.70 ريالًا
B 44.50 ريالًا
C 33.80 ريالًا
D 32.62 ريالًا

50) ما ميل المستقيم الذي معادلته $2x + y = 5$ ؟

A 2
B $\frac{5}{2}$
C -1
D -2

مراجعة تراكمية

أوجد المسافة بين المستقيمين المتوازيين في كلٍّ ممّا يأتي: (مهارة سابقة)

51) $x = -2 , x = 5$

52) $y = x + 2 , y = x - 4$

53) **كرة قدم:** رسم مصطفى الخطَّيْن الجانبيَّين لتخطيط ملعب كرة قدم، ووضع علامات على أحدهما، بحيث كانت المسافة بين أي علامتين متتابعتين 9 m، ثم أنشأ أعمدة عند هذه العلامات. فسِّر لماذا تكون هذه الأعمدة متوازية. (مهارة سابقة)

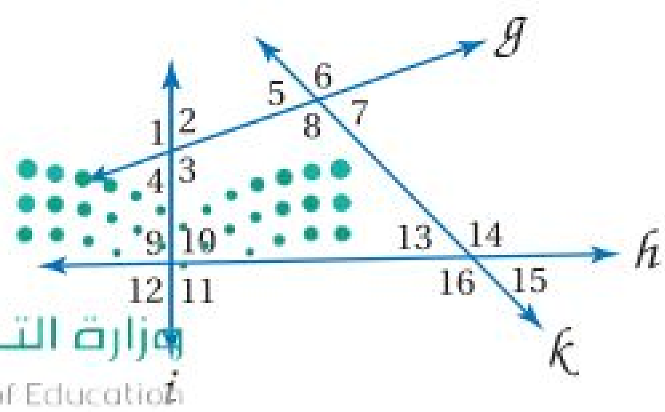
حدِّد الفرض والنتيجة في كل جملة شرطية فيما يأتي: (مهارة سابقة)

54) إذا كان الرجل كهلًا، فإن عمره 40 سنة على الأقل.

55) إذا كان $2x + 6 = 10$، فإن $x = 2$.

استعد للدرس اللاحق

صنِّف كل زوج من الزوايا مما يأتي إلى متبادلتين داخليًّا أو متبادلتين خارجيًّا أو متناظرتين أو متحالفتين:



56) $\angle 5$ و $\angle 3$

57) $\angle 9$ و $\angle 4$

58) $\angle 11$ و $\angle 13$

59) $\angle 1$ و $\angle 11$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

استكشاف

معمل الهندسة

3-2 زوايا المثلثات Angles of Triangles

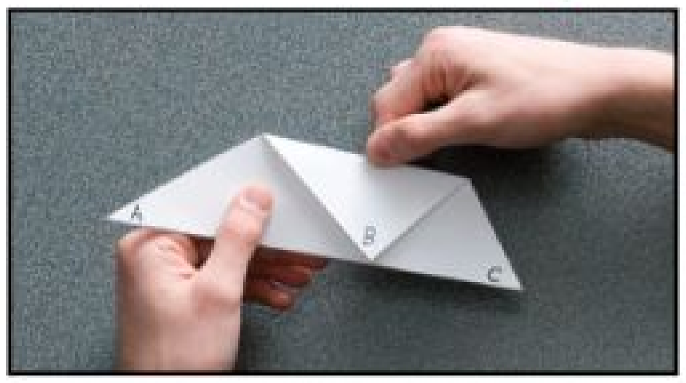
ستجد علاقات خاصة بين زوايا المثلث في هذا المعمل.

النشاط 1 الزوايا الداخلية للمثلث

الخطوة 1:

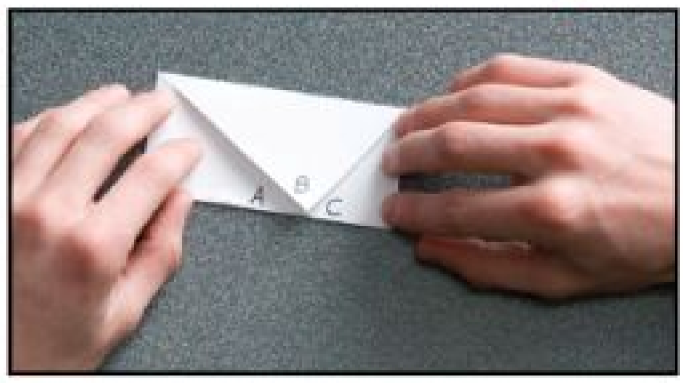
ارسم عدة مثلثات مختلفة ثم قصّها، وسمِّ رؤوس كل مثلث A , B , C .

الخطوة 2:



اطوِ الرأس B في كل مثلث، على أن يكون خطُّ الطيّ موازيًا لـ AC. وأعِد تسمية الرأس B على الورقة بعد طيّها.

الخطوة 3:



اطوِ الرأسين A , C حتى يلتقيا مع الرأس B. أعِدْ تسمية الرأسين A , C بعد الطيّ.

حلِّل النتائج:

1) الزوايا A , B , C تُسمى زوايا داخلية في المثلث ABC . ما اسم الشكل الهندسي الناتج بعد التقاء الرؤوس A , B , C في الخطوة 3؟

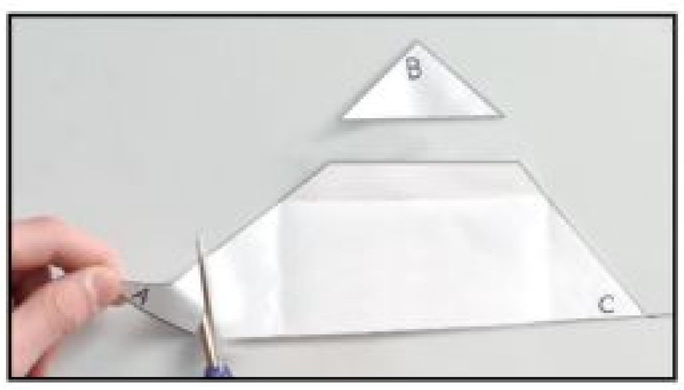
2) خمِّن مجموع قياسات الزوايا الداخلية في المثلث.

النشاط 2 الزوايا الخارجية للمثلث

الخطوة 1:

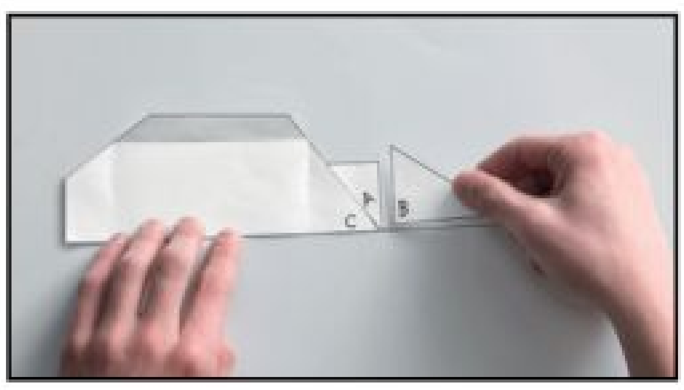
ابسط المثلثات التي استعملتها في النشاط 1، وضع كل مثلث على ورقة منفصلة. مُدّ $\overline{AC}$ كما في الشكل.

الخطوة 2:



افصل الزاويتين $\angle A$, $\angle B$ في كل مثلث.

الخطوة 3:



ضع $\angle A$, $\angle B$ على أن تشكّلا الزاوية المجاورة لِـ $\angle C$ كما في الشكل.

حلِّل النتائج:

3) الزاوية المجاورة لِـ $\angle C$ تُسمّى زاوية خارجية للمثلث ABC. خمِّن العلاقة بين الزاويتين $\angle A$, $\angle B$ من جهة، والزاوية الخارجية عند C.

4) كرِّر خطوات النشاط 2 بالنسبة للزاويتين الخارجيتين عند $\angle A$, $\angle B$ في كل مثلثٍ.

5) خمِّن العلاقة بين قياس الزاوية الخارجية ومجموع قياسَي الزاويتين الداخليتين عدا المجاورة لها.

وزارة التعليم

Ministry of Education

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

2-3 زوايا المثلثات
Angles of Trangles

فيما سبق:

درست تصنيف المثلثات وفقًا لقياسات أضلاعها وزواياها.

(الدرس 3-1)

والآن:

- أطبق نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث.
- أطبق نظرية الزاوية الخارجية للمثلث.

المفردات:

المستقيم المساعِد
auxiliary line

الزاوية الخارجية
exterior angle

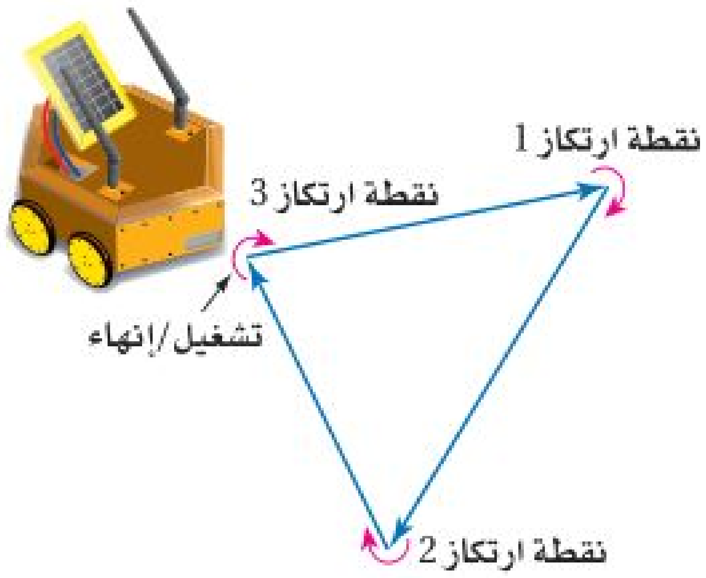
الزاويتان الداخليتان البعيدتان
remote interior angles

البرهان التسلسليّ
flow proof

النتيجة
corollary

لماذا؟

يرعى أحد معاهد التقنية مسابقة سنوية، حيث يصمِّم الطلاب روبوتًا آليًّا يؤدّي مهامّ مختلفة. وقد تمَّت برمجة هذا الروبوت الآلي في أحد الاختبارات ليتحركَ في مسار على شكل مثلث. على أن يكون مجموع قياسات الزوايا التي ينعطف فيها الروبوت الآلي عند نقاط الارتكاز الثلاث ثابتًا دائمًا.



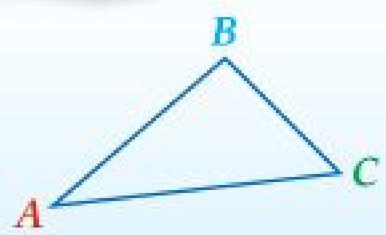
نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث: تُعبِّر نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث عن العلاقة بين الزوايا الداخلية لأيّ مثلث.

نظرية 3.1 نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي $180°$

مثال: $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$



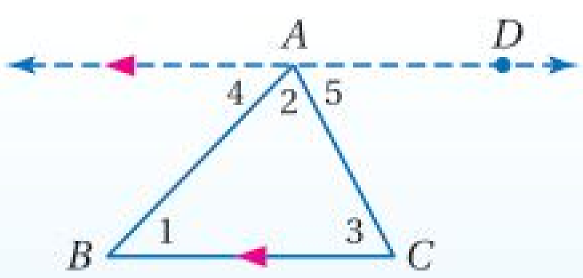
يتطلب برهان نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث استعمال مستقيم مساعِد، و**المستقيم المساعد** هو مستقيم إضافي (أو قطعة مستقيمة إضافية) يتم رسمه للمساعدة على تحليل العلاقات الهندسية، وكما تُبرر العبارات والاستنتاجات المُستعملة في البرهان، فإن خصائص المستقيم المساعِدِ يجب تبريرها.

برهان نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

المعطيات: $\triangle ABC$

المطلوب: $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$

البرهان: من النقطة A ارسم المستقيم $\overleftrightarrow{AD}$ موازيًا لـ $\overline{BC}$.

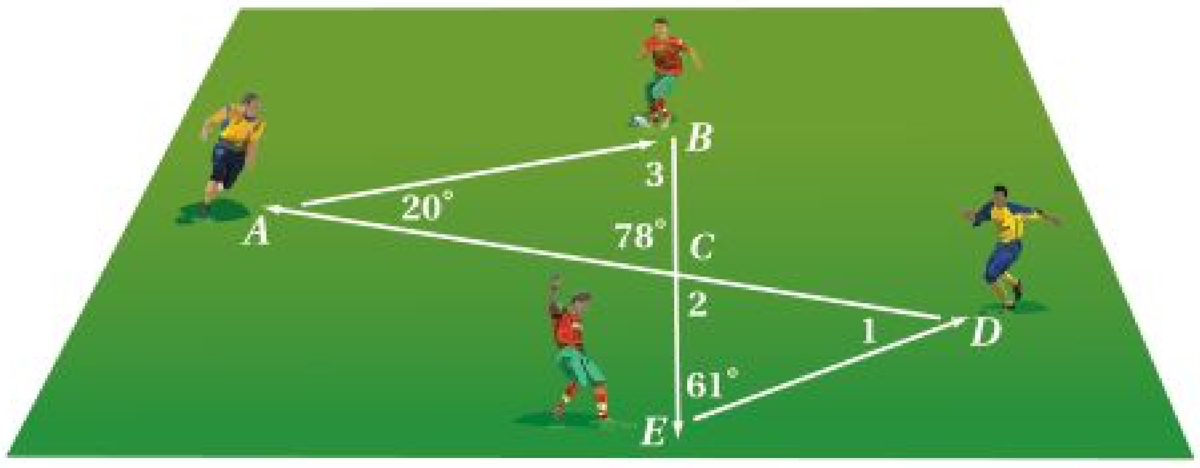


العبارات	المبررات
1) $\triangle ABC$	1) مُعطى
2) $\angle 4 , \angle BAD$ زاويتان متجاورتان على مستقيم.	2) تعريف الزاويتين المتجاورتين على مستقيم
3) $\angle 4 , \angle BAD$ متكاملتان.	3) الزاويتان المتجاورتان على مستقيم متكاملتان
4) $m\angle 4 + m\angle BAD = 180°$	4) تعريف الزاويتين المتكاملتين
5) $m\angle BAD = m\angle 2 + m\angle 5$	5) مسلّمة جمع قياسات الزوايا
6) $m\angle 4 + m\angle 2 + m\angle 5 = 180°$	6) بالتعويض
7) $\angle 4 \cong \angle 1 , \angle 5 \cong \angle 3$	7) نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا
8) $m\angle 4 = m\angle 1, m\angle 5 = m\angle 3$	8) تعريف تطابُق الزوايا
9) $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$	9) بالتعويض

يمكن استعمال نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث لإيجاد الزاوية الثالثة في المثلث إذا عُلم قياسا زاويتيه الأُخريين.

مثال 1 من واقع الحياة استعمال نظرية مجموع زوايا المثلث

كرة قدم: يبيِّن الشكل مسار الكرة في تدريب على تمريراتٍ نفَّذها أربعة لاعبين. أوجد قياسات الزوايا المرقمة.



افهم: **المعطيات:** في الشكل أعلاه، قياس الزاويتين A, C في المثلث ABC ‏ $20°, 78°$، قياس الزاوية E في المثلث CED يساوي $61°$
المطلوب: إيجاد قياسات الزوايا المرقمة.

خطط: أوجد $m\angle 3$ باستعمال نظرية مجموع زوايا المثلث مستعملًا قياسَيْ الزاويتين الأُخريين في $\triangle ABC$. ثم استعمل نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس لإيجاد $m\angle 2$، وعندها يمكنك إيجاد $m\angle 1$ في $\triangle CDE$

حُلّ:

$m\angle 3 + m\angle BAC + m\angle ACB = 180°$ نظرية مجموع زوايا المثلث

$m\angle 3 + 20° + 78° = 180°$ عوّض

$m\angle 3 + 98° = 180°$ بسّط

$m\angle 3 = 82°$ اطرح 98 من الطرفين

$\angle ACB, \angle 2$ متطابقتان؛ لأنهما زاويتان متقابلتان بالرأس؛ لذا فإن $m\angle 2 = 78°$.

استعمل $m\angle 2$ و $m\angle CED$ في $\triangle CDE$ لإيجاد $m\angle 1$.

$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle CED = 180°$ نظرية مجموع زوايا المثلث

$m\angle 1 + 78° + 61° = 180°$ عوّض

$m\angle 1 + 139° = 180°$ بسّط

$m\angle 1 = 41°$ اطرح 139 من الطرفين

تحقق: يجب أن يكون مجموع قياسات زوايا كلٍّ من $\triangle ABC, \triangle CDE$ مساويًا لـ $180°$

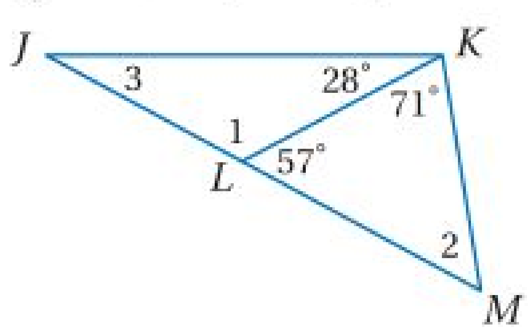
✓ $\triangle ABC:\ m\angle 3 + m\angle BAC + m\angle ACB = 82° + 20° + 78° = 180°$

✓ $\triangle CDE:\ m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle CED = 41° + 78° + 61° = 180°$

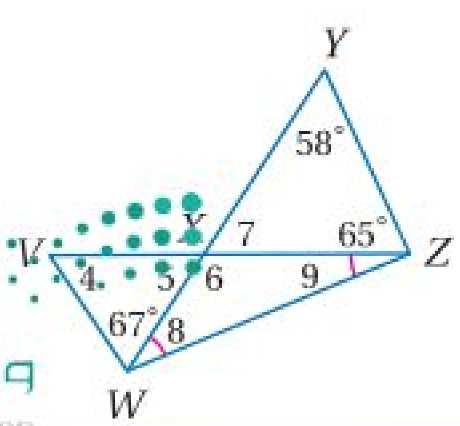
تحقق من فهمك

أوجد قياسات الزوايا المرقَّمة فيما يأتي:

1A)



1B)



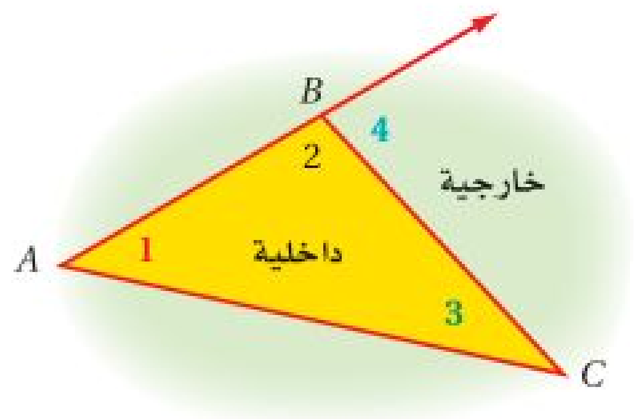
الربط مع الحياة

يدمج تمرين "مرِّر وتحرَّك" في لعبة كرة القدم بين عدة مظاهر أساسية لعملية التمرير، حيث تكون جميع التمريرات في التدريب على شكل مثلثات، وهذا هو الأساس في جميع حركات الكرة، وبالإضافة إلى ذلك، على اللاعب أن يتحرك فورًا بعد تمريره الكرة.

إرشادات للدراسة

تجزئة المسألة
تُجزأ المسائل المركبة إلى مسائل يمكن التعامل مع كلٍّ منها بسهولة؛ مما يساعد على حلّها. فمثلًا في المثال 1: عليك أن تجد $m\angle 2$ أولًا قبل أن تحاول إيجاد $m\angle 1$

نظرية الزاوية الخارجية للمثلث: بالإضافة إلى الزوايا الداخلية الثلاث، يمكن أن يكون للمثلث **زوايا خارجية** كلٌّ منها تتشكل من أحد أضلاع المثلث وامتداد ضلع مجاور له. ولكل زاوية خارجية **زاويتان داخليتان بعيدتان** غير مجاورتين لها.



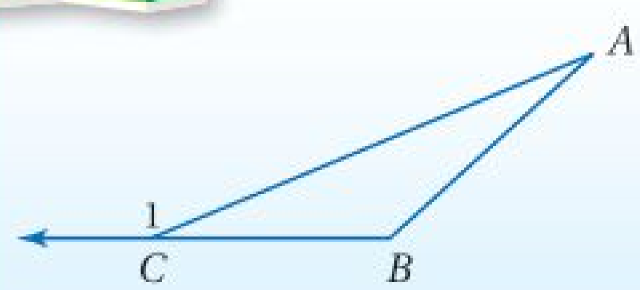
$\angle 4$ زاوية خارجية لِـ $\triangle ABC$، وزاويتاها الداخليتان البعيدتان هما $\angle 3$ ، $\angle 1$.

نظرية 3.2 نظرية الزاوية الخارجية

أضف إلى مطويتك

قياس الزاوية الخارجية في مثلث يساوي مجموع قياسَيْ الزاويتين الداخليتين البعيدتين.

مثال: $m\angle A + m\angle B = m\angle 1$



في **البرهان التسلسلي** تُستعمل عبارات مكتوبة في مستطيلات، وأسهم تبيِّن التسلسل المنطقي لهذه العبارات. ويُكتب أسفل كل مستطيل السبب الذي يبرِّر العبارة المكتوبة داخله، ويمكنك برهنة نظرية الزاوية الخارجية باستعمال البرهان التسلسليِّ كما يأتي.

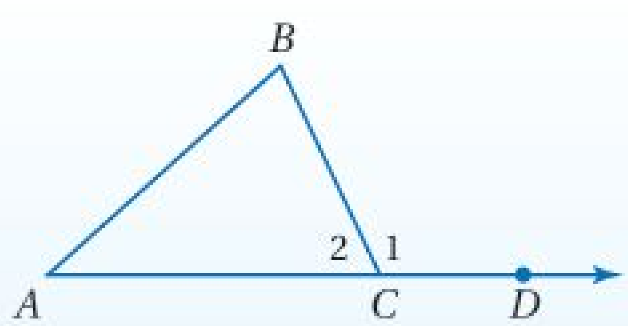
قراءة الرياضيات

البرهان بالمخطط التسلسلي
يُسمَى البرهان التسلسلي أحيانًا البرهان بالمخطط التسلسلي.

البرهان نظرية الزاوية الخارجية

المعطيات: $\triangle ABC$

المطلوب: $m\angle A + m\angle B = m\angle 1$



برهان تسلسلي:

$\triangle ABC$
معطى
↓
$m\angle A + m\angle B + m\angle 2 = 180$
نظرية مجموع زوايا المثلث

$\angle 1, \angle 2$ زاويتان متجاورتان على مستقيم
تعريف الزاويتين المتجاورتين على مستقيم
↓
$\angle 1, \angle 2$ متكاملتان
الزاويتان المتجاورتان على مستقيم متكاملتان
↓
$m\angle 1 + m\angle 2 = 180$
تعريف الزاويتين المتكاملتين

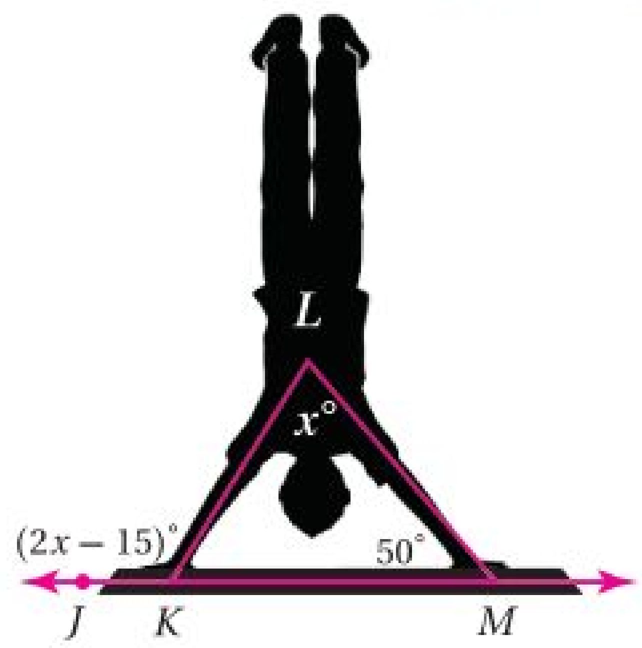
↓
$m\angle A + m\angle B + m\angle 2 = m\angle 1 + m\angle 2$
بالتعويض
↓
$m\angle A + m\angle B = m\angle 1$
بالطرح

إرشادات للدراسة

البرهان التسلسلي
يمكن أن يكتب البرهان التسلسليَ بصورةٍ رأسيَة أو أفقيَة.

يمكن إيجاد قياسات الزوايا المجهولة باستعمال نظرية الزاوية الخارجية.

مثال 2 من واقع الحياة — استعمال نظرية الزاوية الخارجية



اللياقة البدنية: أوجد قياس $\angle JKL$ في الوضع الذي يظهر فيه المتدرب في الصورة.

$m\angle KLM + m\angle LMK = m\angle JKL$	نظرية الزاوية الخارجية
$x + 50 = 2x - 15$	عوِّض
$50 = x - 15$	اطرح x من الطرفين
$65 = x$	اجمع 15 إلى الطرفين

لذا فإن $m\angle JKL = (2(65) - 15)° = 115°$.

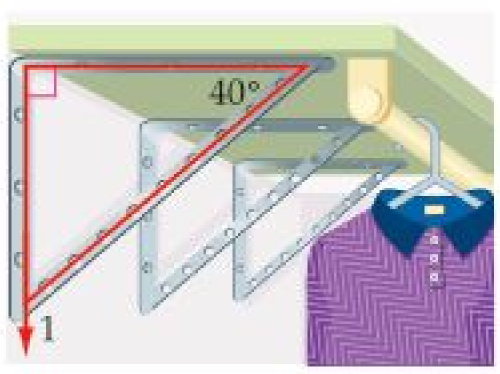
الربط مع الحياة

المدرب المتخصص

يعلِّم مدرِّبو اللياقة البدنية المتدربين طرائق متنوعة ويحفزونهم على أدائها، ومن المهم أن يحمل هؤلاء المدربون شهادات تخصص في مجال عملهم.

✔ تحقق من فهمك

2) تنظيم خزانة الملابس: تثبِّت لطيفة جسور الرفوف على جدار خزانتها. ما قياس $\angle 1$ التي يصنعها الجسر مع جدار الخزانة؟



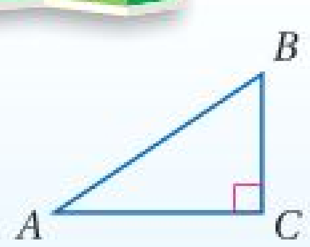
النتيجة هي نظرية يكون برهانها مبنيًّا على نظرية أخرى، ويمكن استعمال النتيجة كأي نظرية أخرى لتبرير خطوات برهانٍ آخر، أو حلّ أسئلة ذات علاقة، وفيما يلي نتائج مباشرة لنظرية مجموع زوايا المثلث:

نتيجتان — مجموع زوايا المثلث

أضف إلى مطويتك

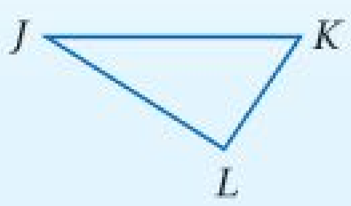
3.1 الزاويتان الحادتان في أي مثلث قائم الزاوية متتامتان.

مثال: إذا كانت $\angle C$ قائمة، فإن $\angle A$, $\angle B$ زاويتان متتامتان.



3.2 توجد زاوية قائمة واحدة، أو زاوية منفرجة واحدة على الأكثر في أي مثلث.

مثال: إذا كانت $\angle L$ قائمة، فإن $\angle J$, $\angle K$ زاويتان حادتان.



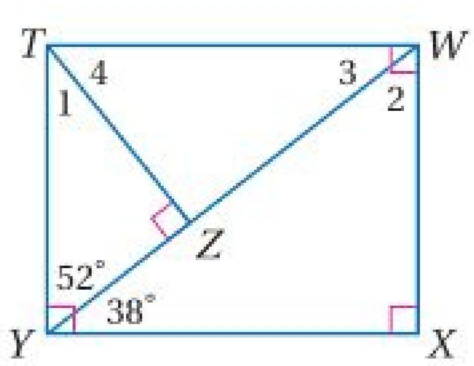
ستبرهن النتيجتين 3.2 , 3.1 في السؤالين 24 , 23

إرشادات للدراسة

التحقق من المعقولية
عندما تجد قياسات زوايا مثلث، تأكد دائمًا أن مجموع هذه القياسات يساوي 180°.

مثال 3 — إيجاد قياسات الزوايا في مثلثات قائمة الزاوية

أوجد قياس كلٍّ من الزوايا المرقّمة في الشكل المجاور.



$m\angle 1 + m\angle TYZ = 90°$	زاويتان حادتان في مثلث قائم الزاوية
$m\angle 1 + 52° = 90°$	عوِّض
$m\angle 1 = 38°$	اطرح 52 من الطرفين

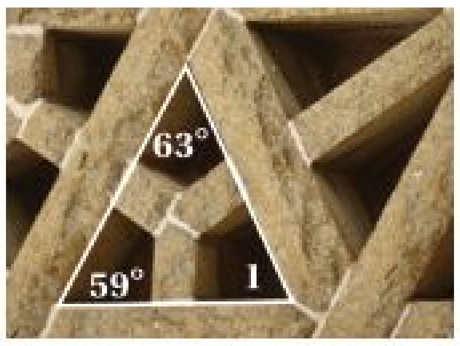
✔ تحقق من فهمك

3A) $\angle 2$ **3B)** $\angle 3$ **3C)** $\angle 4$

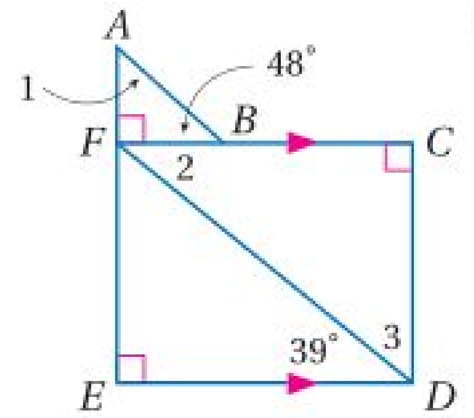
تأكـد

المثال 1 أوجد قياس كلٍّ من الزوايا المرقّمة في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

1)



2)

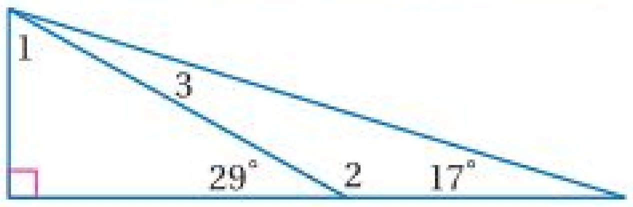


المثال 2 **كراسي الشاطئ:** تشكل دعامة المقعد مع بقية الهيكل مثلثًا كما هو موضح في الشكل المجاور. أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

3) $m\angle 2$ **4)** $m\angle 4$

5) $m\angle 1$ **6)** $m\angle 3$

المثال 3 معتمدًا على الشكل المجاور، أوجد القياسات التالية:



7) $m\angle 1$

8) $m\angle 3$

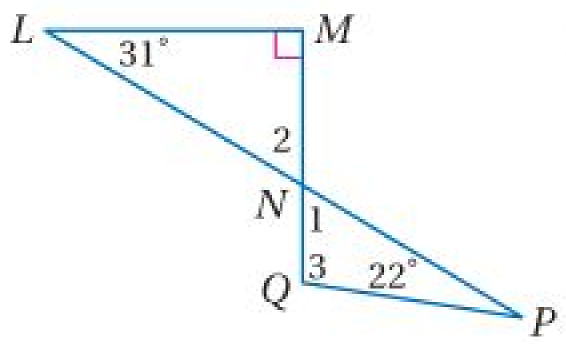
9) $m\angle 2$

تدرب وحل المسائل

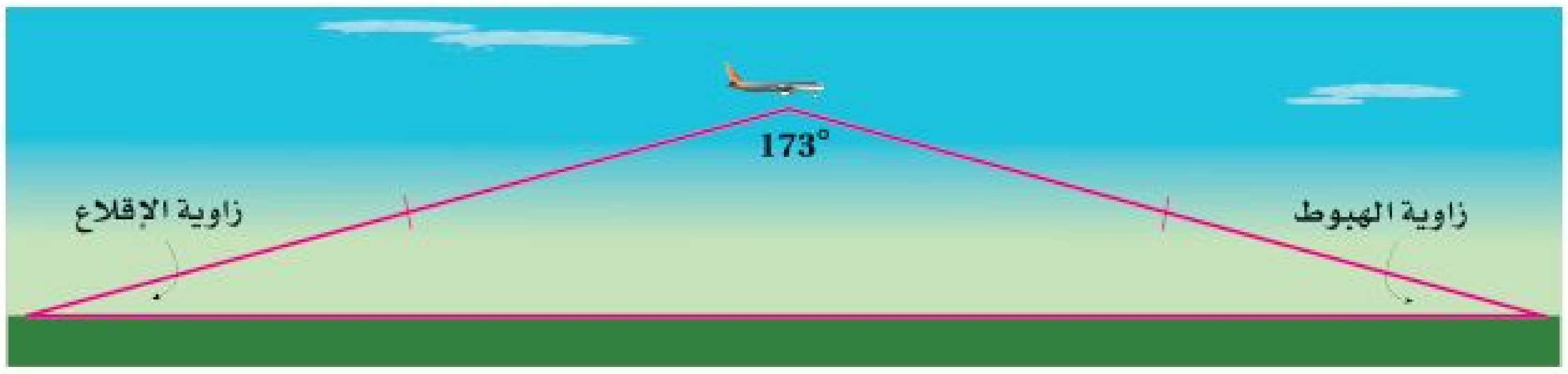
المثال 1 أوجد قياس الزوايا المرقّمة في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

10)

11)



12) **طائرات:** يمكن تمثيل خطّ الطيران في رحلةٍ ما باستعمال ضلعَي مثلث كما في النموذج أدناه، علمًا بأن المسافة التي تقطعها الطائرة صعودًا تساوي المسافة التي تقطعها هبوطًا.

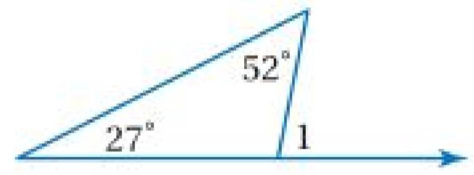


a) صنِّف النموذج بحسب الأضلاع والزوايا.

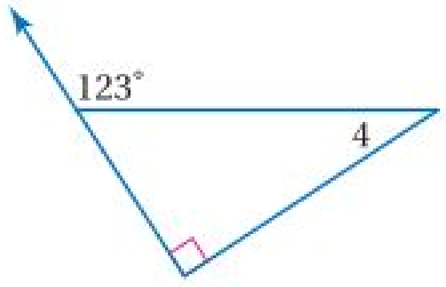
b) إذا كانت زاويتا الإقلاع والهبوط متطابقتين، فأوجد قياس كلٍّ منهما.

المثال 2 أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

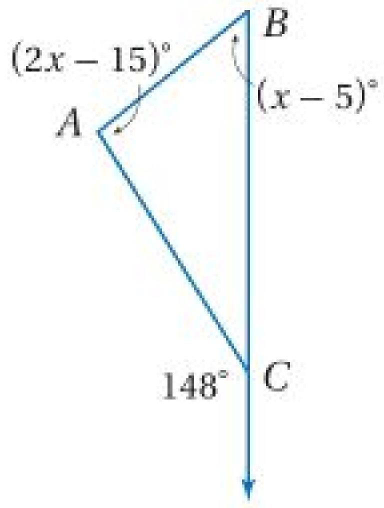
13) $m\angle 1$



14) $m\angle 4$



15) $m\angle ABC$



المثال 3 أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

16) $m\angle 1$

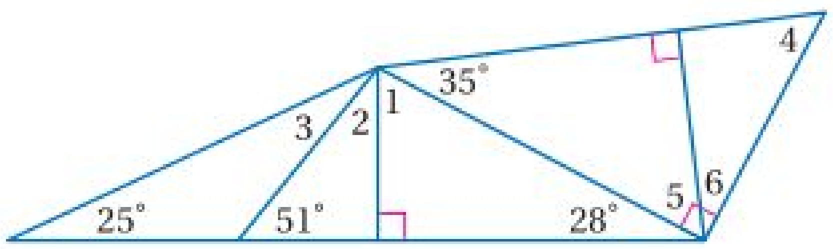
17) $m\angle 2$

18) $m\angle 3$

19) $m\angle 5$

20) $m\angle 4$

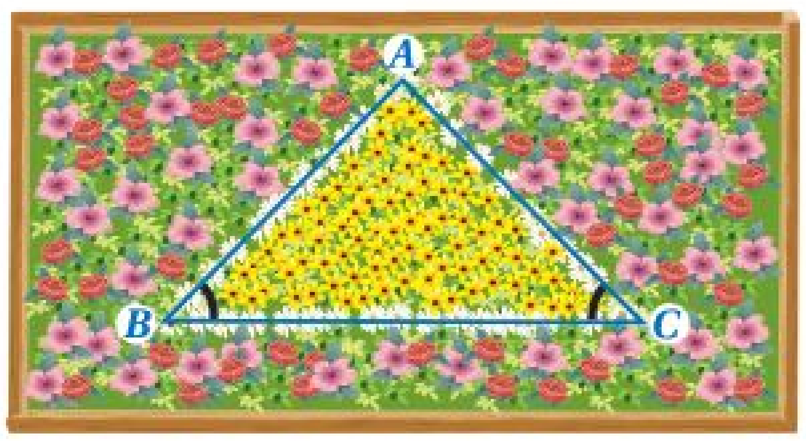
21) $m\angle 6$



الربط مع الحياة

يصل طول ساق زهرة الأقحوان إلى 30in، وتنقسم هذه النباتات إلى 13 صنفًا بحسب أشكال أزهارها.

22) **بستنة:** استَنْبَتَ مهندس زراعيّ زهور أقحوان في حوض على شكل مثلث متطابق الضلعين. إذا رغب المهندس في أن يكون قياس $\angle A$ ثلاثة أمثال قياس كلٍّ من $\angle B$ ، $\angle C$، فما قياس كل زاوية في هذا المثلث؟



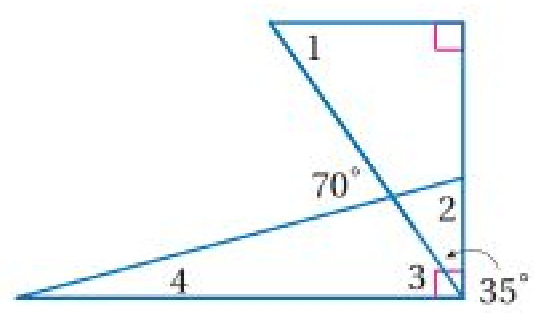
براهين: برهن كلًّا مما يأتي مستعملًا طريقة البرهان المذكورة.

23) النتيجة 3.1 باستعمال البرهان التسلسلي

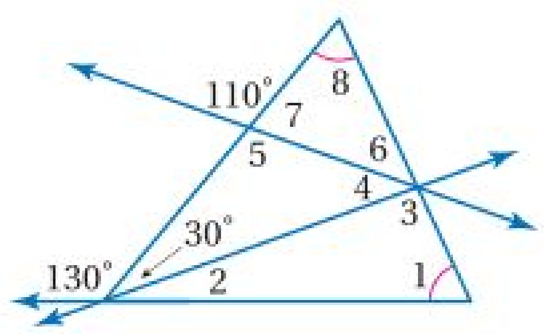
24) النتيجة 3.2 باستعمال البرهان الحر

أوجد قياس كلٍّ من الزوايا المرقّمة فيما يأتي:

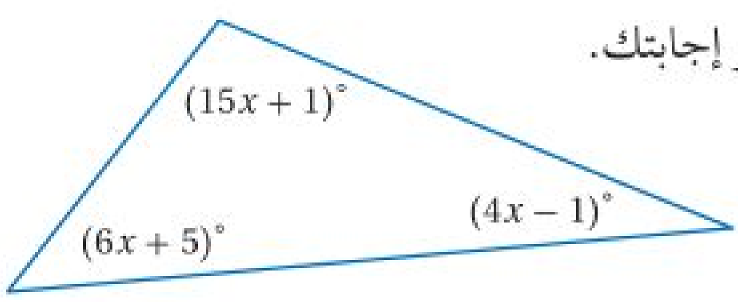
25)



26)

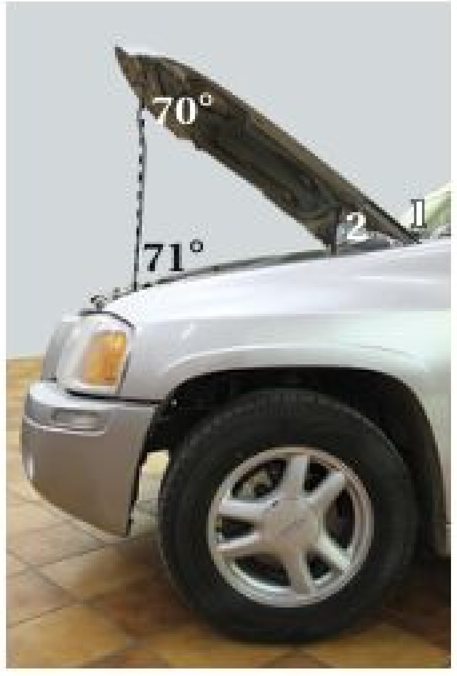


27) **جبر:** صنِّف المثلث في الشكل المجاور وفقًا لزواياه. وفسِّر إجابتك.



28) قرِّر ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحةً أم خطأً، واذكر مثالًا مضادًّا لها إذا كانت خطأً، ودعِّم استنتاجك إذا كانت صحيحة:

"*إذا كان مجموع زاويتين حادتين في مثلث أكبر من 90، فإن المثلث حادّ الزوايا*".



29) **سيارات:** انظر إلى الصورة المجاورة:

a) أوجد $m\angle 1 , m\angle 2$.

b) إذا قلَّ ارتفاع غطاء السيارة عن الارتفاع الذي يظهر في الصورة، فما أثر ذلك في $m\angle 1$؟ فسِّر إجابتك.

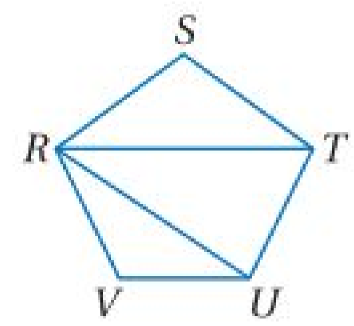
c) إذا قلَّ ارتفاع غطاء السيارة عن الارتفاع الذي يظهر في الصورة، فما أثر ذلك في $m\angle 2$؟ فسِّر إجابتك.

برهان: برهن كلًّا مما يأتي باستعمال طريقة البرهان المذكورة:

30) برهان ذو عمودين

المعطيات: $RSTUV$ شكل خماسيّ.

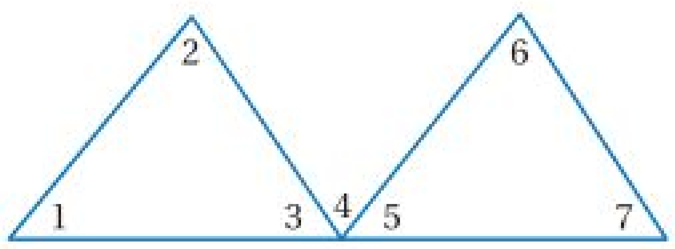
المطلوب:
$m\angle S + m\angle STU + m\angle TUV + m\angle V + m\angle VRS = 540°$



31) برهان تسلسلي

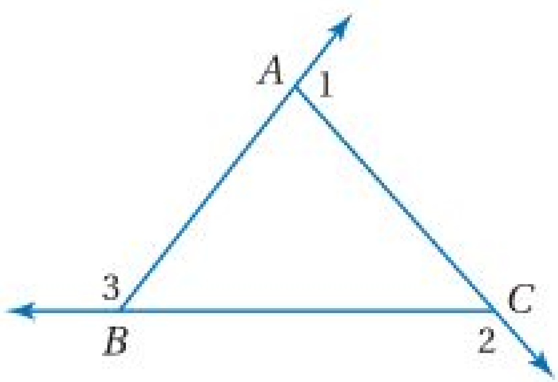
المعطيات: $\angle 3 \cong \angle 5$

المطلوب: $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 6 + m\angle 7$



32) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستستكشف مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمثلث.

a) **هندسيًّا:** ارسم خمسة مثلثات مختلفة، ومُدّ الأضلاع وسمِّ الزوايا كما في الشكل المجاور، على أن يكون ضمن المثلثات التي رسمتها على الأقل مثلث منفرج الزاوية، وآخر قائم الزاوية، ومثلث حادّ الزوايا.



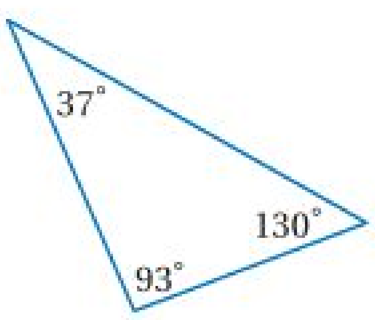
b) **جدوليًّا:** قِسِ الزوايا الخارجية لكل مثلثٍ. وسجِّل القياسات ومجموعها لكلِ مثلثٍ في جدول.

c) **لفظيًّا:** خمِّن مجموع الزوايا الخارجية للمثلث، واكتب تخمينك.

d) **جبريًّا:** عبِّر عن التخمين الذي وصلتَ إليه في الجزء c جبريًّا.

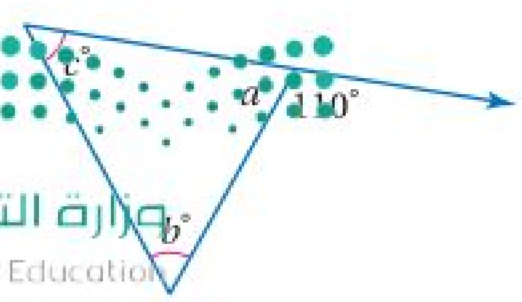
e) **تحليليًّا:** اكتب برهانًا حرًّا لإثبات التخمين الذي توصلتَ إليه.

مسائل مهارات التفكير العليا

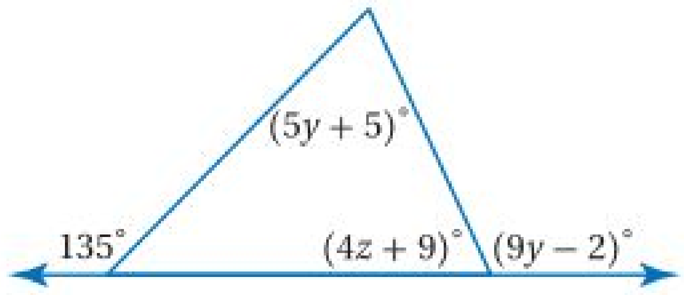


33) **اكتشف الخطأ:** قام خالد بقياس زوايا المثلث وكتبها كما في الشكل. فقال عادل: إنّ هناك خطأً في هذه القياسات. وضِّح بطريقتين مختلفتين على الأقل كيف توصّل عادل إلى هذه النتيجة.

34) **اكتب:** فسِّر كيف يمكنك إيجاد القياسات المجهولة في الشكل المجاور؟



35) **تحدٍّ:** أوجد قيمة كلٍّ من y, z في الشكل المجاور.



36) **تبرير:** إذا كانت الزاوية الخارجية المجاورة لـ $\angle A$ حادة، فهل $\triangle ABC$ حادّ الزوايا أم قائم الزاوية أم منفرج الزاوية أم أنه لا يمكن تحديد نوعه؟ وضح إجابتك.

تدريب على اختبار

37) **جبر:** أيُّ المعادلات الآتية تكافئ المعادلة $7x - 3(2 - 5x) = 8x$؟

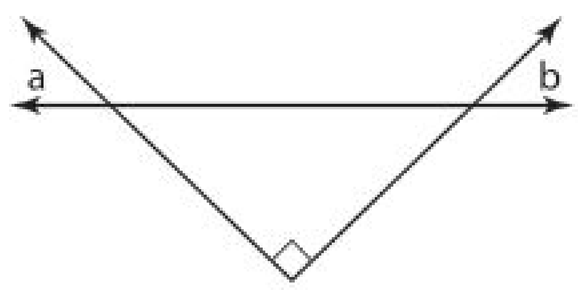
A $2x - 6 = 8$

B $22x - 6 = 8x$

C $-8x - 6 = 8x$

D $22x + 6 = 8x$

38) أيُّ العبارات التالية تصف العلاقة الصحيحة بين الزاويتين a, b في الشكل أدناه؟



A $a + b < 90^\circ$

B $a + b > 90^\circ$

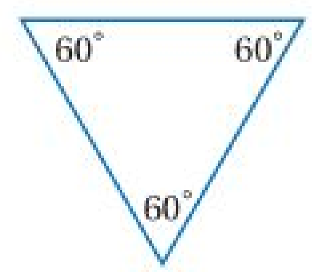
C $a + b = 90^\circ$

D $a + b = 45^\circ$

مراجعة تراكمية

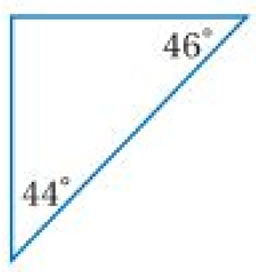
صنِّف كلًّا من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية: (مهارة سابقة)

39)



40)

41)



هندسة إحداثية: أوجد المسافة بين النقطة P والمستقيم ℓ في كلٍّ من السؤالين الآتيين. (مهارة سابقة)

42) المستقيم ℓ يمرّ بالنقطتين $(1, 3)$, $(-2, 0)$، وإحداثيًّا النقطة P هما $(-4, 4)$.

43) المستقيم ℓ يمرّ بالنقطتين $(3, 0)$, $(-3, 0)$، وإحداثيًّا النقطة P هما $(4, 3)$.

استعد للدرس اللاحق

اكتب الخاصية المستعملة (الانعكاس، التماثل، التعدي) في كل عبارة مما يلي:

44) $\overline{AB} \cong \overline{AB}$

45) إذا كان $\angle 1 \cong \angle 2$، فإن $\angle 2 \cong \angle 1$.

46) إذا كانت $\angle 4 \cong \angle 2$, $\angle 2 \cong \angle 3$، فإن $\angle 4 \cong \angle 3$.

3-3 المثلثات المتطابقة
Congruent triangles

فيما سبق:

درست الزوايا المتطابقة واستعمالاتها.

(مهارة سابقة)

والآن:

- أُسمّي العناصر المتناظرة في المضلعات المتطابقة وأستعملها.
- أُثبت تطابق مثلثين باستعمال تعريف التطابق.

المفردات

التطابق
Congruent

المضلعات المتطابقة
Congruent Polygons

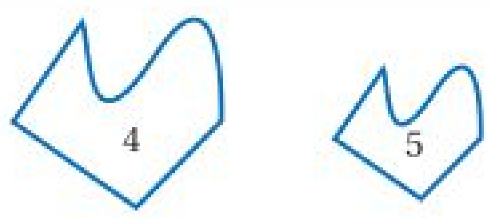
العناصر المتناظرة
Corresponding Parts

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

لماذا؟

تقوم عدّة مصانع بصنع مسجّلات سيارات بواجهات متحركة يصعب نزعها لحمايتها من السرقة، علمًا بأن شكل هذه الواجهات وأبعادها تطابق شكل المكان الذي تثبت فيه وأبعاده تمامًا؛ وذلك لتثبيتها في لوحة أجهزة السيارة بدقة.

التطابق والعناصر المتناظرة: إذا كان لشكلين هندسيين الشكل نفسه والقياسات نفسها فإنّهما **متطابقان**.

غير متطابقة	متطابقة
	
الشكلان 4, 5 لهما الشكل نفسه، لكنهما مختلفان في القياسات.	الأشكال 1, 2, 3 لها الشكل نفسه والقياسات نفسها، على الرغم من أنها في أوضاع مختلفة.

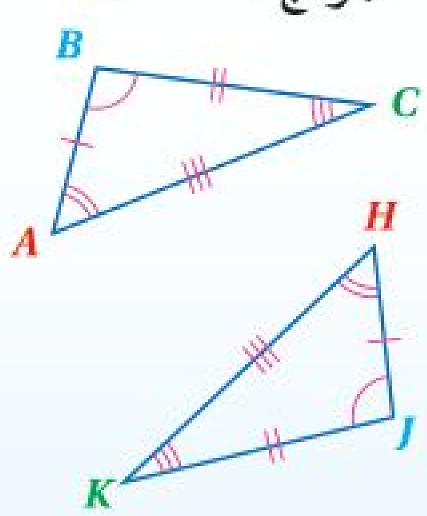
في أيِّ **مضلعين متطابقين** تتطابق **العناصر المتناظرة**، والعناصر المتناظرة تتضمن الزوايا والأضلاع.

مفهوم أساسي — تعريف المضلعات المتطابقة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يتطابق مضلعان إذا وفقط إذا كانت عناصرهما المتناظرة متطابقة.

نموذج:



مثال:

الزوايا المتناظرة

$\angle A \cong \angle H$ $\quad \angle B \cong \angle J$ $\quad \angle C \cong \angle K$

الأضلاع المتناظرة

$\overline{AB} \cong \overline{HJ}$ $\quad \overline{BC} \cong \overline{JK}$ $\quad \overline{CA} \cong \overline{KH}$

عبارة التطابق

$\triangle ABC \cong \triangle HJK$

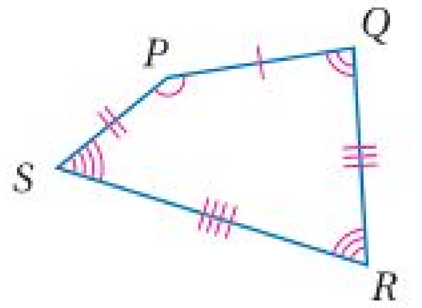
هناك عباراتُ تطابقٍ أخرى للمثلثين أعلاه، وعبارات التطابق الصحيحة للمضلعات المتطابقة تظهر الرؤوس المتناظرة بالترتيب نفسه.

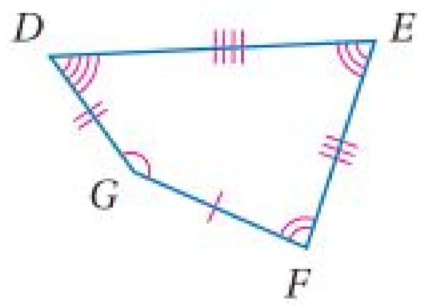
عبارة صحيحة	عبارة غير صحيحة
$\triangle BCA \cong \triangle JKH$	$\triangle ABC \cong \triangle HKJ$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال 1 تعرف العناصر المتناظرة المتطابقة

بيّن أنّ المضلّعين المجاورين متطابقان، بتعيين جميع العناصر المتناظرة المتطابقة. ثمّ اكتب عبارة التطابق.





الزوايا: $\angle P \cong \angle G, \angle Q \cong \angle F,$

$\angle R \cong \angle E, \angle S \cong \angle D$

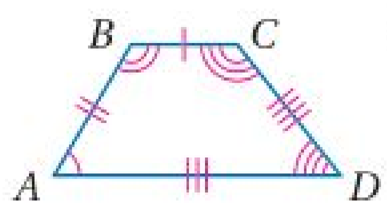
الأضلاع: $\overline{PQ} \cong \overline{GF}, \overline{QR} \cong \overline{FE},$

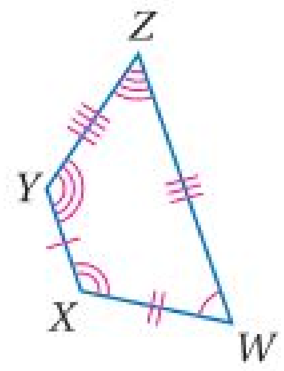
$\overline{RS} \cong \overline{ED}, \overline{SP} \cong \overline{DG}$

وبما أنّ جميع العناصر المتناظرة للمضلعين متطابقة، فإنّ المضلع $PQRS \cong$ المضلع $GFED$.

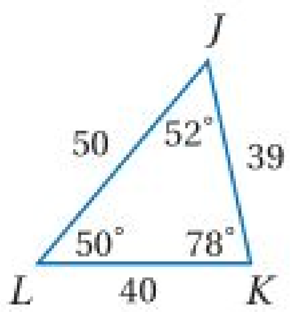
✓ تحقق من فهمك

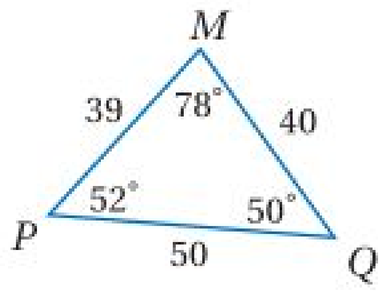
1A)





1B)

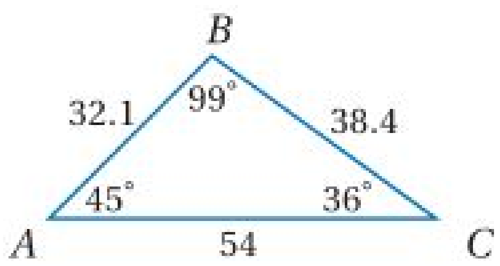


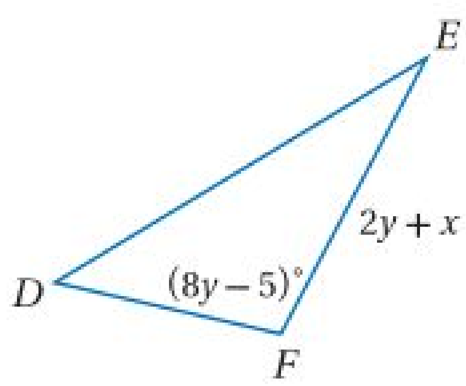


أداة الربط "إذا وفقط إذا" التي وردت في تعريف المضلعات المتطابقة تعني أن كلًّا من العبارة الشرطيّة وعكسها صحيحتان؛ لذا إذا كان المضلعان متطابقين، فإنّ عناصرهما المتناظرة متطابقة. وإذا كانت العناصر المتناظرة متطابقة فإن المضلعين متطابقان.

مثال 2 تعيين العناصر المتناظرة المتطابقة

في الشكل المجاور إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle DFE$ ، فأوجد قيمة كلٍّ من x, y

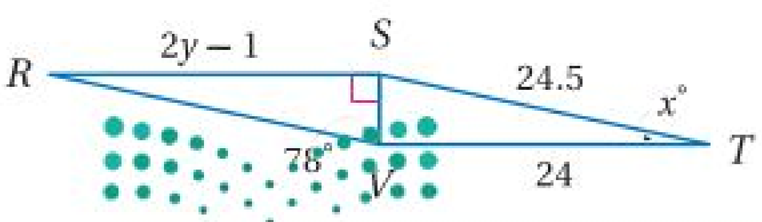


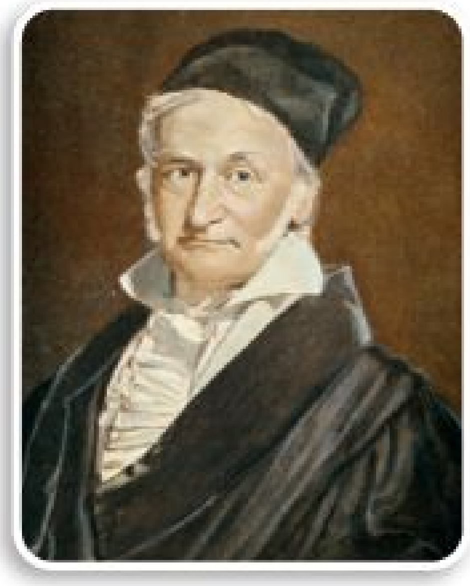


$\angle F \cong \angle B$	العناصر المتناظرة متطابقة
$m\angle F = m\angle B$	تعريف التطابق
$8y - 5 = 99$	عوّض
$8y = 104$	اجمع 5 إلى الطرفين
$y = 13$	اقسم الطرفين على 8
$\overline{FE} \cong \overline{BC}$	العناصر المتناظرة متطابقة
$FE = BC$	تعريف التطابق
$2y + x = 38.4$	عوّض
$2(13) + x = 38.4$	عوّض
$26 + x = 38.4$	بسّط
$x = 12.4$	اطرح 26 من الطرفين

✓ تحقق من فهمك

2) في الشكل المجاور إذا كان $\triangle RSV \cong \triangle TVS$، فأوجد قيمة كلٍّ من x, y .





تاريخ الرياضيات

جوهان كارل فردريك جاوس (1777م – 1855م)

قدّم جاوس رمز التطابق ليبيّن أن طرفي المعادلة متساويان حتّى ولو كانا مختلفين شكلًا. وقد حقق إنجازات عديدة في الرياضيات والفيزياء تتضمن برهانًا للنظرية الأساسية في الجبر.

إرشادات للدراسة

استعمال عبارة التطابق

يمكنك استعمال عبارة التطابق لمساعدتك على معرفة الأضلاع المتناظرة.

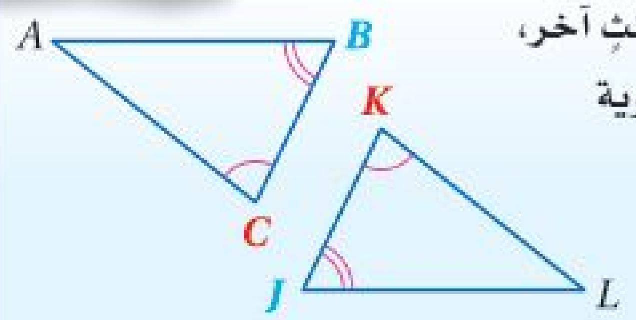
$\triangle ABC \cong \triangle DFE$

$\overline{BC} \cong \overline{FE}$

إثبات تطابق المثلثات إن نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث التي تعلمتها في الدرس 2–3 تقود إلى نظرية أخرى حول الزوايا في مثلثين.

نظرية 3.3 نظريّة الزاوية الثالثة

أضف إلى مطويتك



التعبير اللفظي: إذا تطابقت زاويتان في مثلثٍ مع زاويتين في مثلثٍ آخر، فإنّ الزاوية الثالثة في المثلث الأول تطابق الزاوية الثالثة في المثلث الثاني.

مثال: إذا كانت: $\angle C \cong \angle K,\ \angle B \cong \angle J$ ،
فإنّ: $\angle A \cong \angle L$.

ستبرهن هذه النظرية في السؤال 17

مثال 3 من واقع الحياة استعمال نظرية الزاوية الثالثة

تنظيم الحفلات: قرّر منظّمو حفلة مدرسيّة أن يطووا مناديل الطعام على صورة جيب مثلثي حتى يتمكنوا من وضع هدية بسيطة فيه.
إذا كانت: $\angle NPQ \cong \angle RST,\ m\angle NPQ = 40°$ ، فأوجد $m\angle SRT$.

بما أنّ $\angle NPQ \cong \angle RST$ ، ولأن جميع الزوايا القائمة متطابقة $(\angle NQP \cong \angle RTS)$ ، فإنّ $\angle QNP \cong \angle SRT$ بحسب نظرية الزاوية الثالثة؛ إذن $m\angle QNP = m\angle SRT$.

$m\angle QNP + m\angle NPQ = 90°$ الزاويتان الحادّتان في المثلث القائم الزاوية متتامّتان

$m\angle QNP + 40° = 90°$ عوّض

$m\angle QNP = 50°$ اطرح °40 من الطرفين

وبالتعويض فإن: $m\angle SRT = m\angle QNP = 50°$.

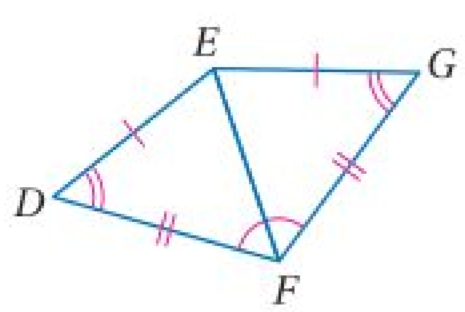
تحقق من فهمك

3) في الشكل أعلاه، إذا كانت $\angle WNX \cong \angle WRX$، وكان $\overline{WX}$ منصِّفًا لـ $\angle NXR$ ، وكان $m\angle WNX = 88°,\ m\angle NXW = 49°$ ، فأوجد $m\angle NWR$. وفسِّر إجابتك.

الربط مع الحياة

استعمال بعض المهارات الأساسية عند طي مناديل المائدة يُضفي لمسةً من الجمال والأناقة على أي حفلة. وكثير من هذه الطيات تأخذ شكل المثلث.

مثال 4 إثبات تطابق مثلثين



اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{DE} \cong \overline{GE}\ ,\overline{DF} \cong \overline{GF}\ ,\angle D \cong \angle G$ ، $\angle DFE \cong \angle GFE$

المطلوب: $\triangle DEF \cong \triangle GEF$

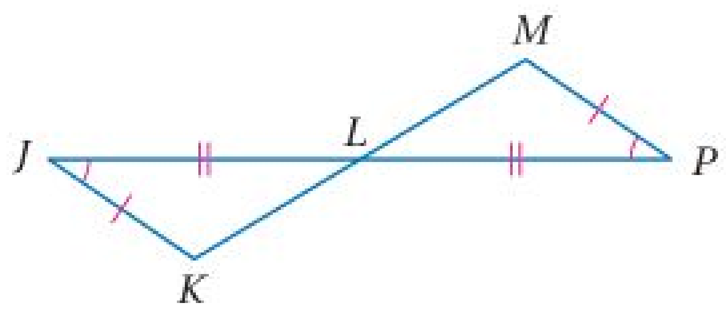
البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{DE} \cong \overline{GE}\ ,\overline{DF} \cong \overline{GF}$	1) معطيات
2) $\overline{EF} \cong \overline{EF}$	2) خاصية الانعكاس للتطابق
3) $\angle D \cong \angle G, \angle DFE \cong \angle GFE$	3) معطيات
4) $\angle DEF \cong \angle GEF$	4) نظرية الزاوية الثالثة
5) $\triangle DEF \cong \triangle GEF$	5) تعريف المضلعات المتطابقة

إرشادات للدراسة

خاصيّة الانعكاس
عندما يشترك مثلثان في ضلع، استعمل خاصيّة الانعكاس للتطابق؛ لتثبت أن الضلع المشترك يطابق نفسه.

تحقق من فهمك



4) اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\angle J \cong \angle P$, $\overline{JK} \cong \overline{PM}$

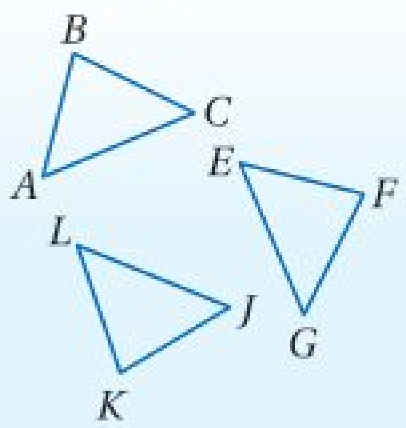
$\overline{JL} \cong \overline{PL}$ ، L تنصف $\overline{KM}$

المطلوب: $\triangle JLK \cong \triangle PLM$

علاقة تطابق المثلثات علاقة انعكاس وتماثل وتعدٍّ كما في تطابق القطع المستقيمة والزوايا.

النظرية 3.4 خصائص تطابق المثلثات

أضف إلى مطويتك



خاصيّة الانعكاس للتطابق

$\triangle ABC \cong \triangle ABC$

خاصية التماثل للتطابق

إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle EFG$ ، فإنّ $\triangle EFG \cong \triangle ABC$.

خاصيّة التعدّي للتطابق

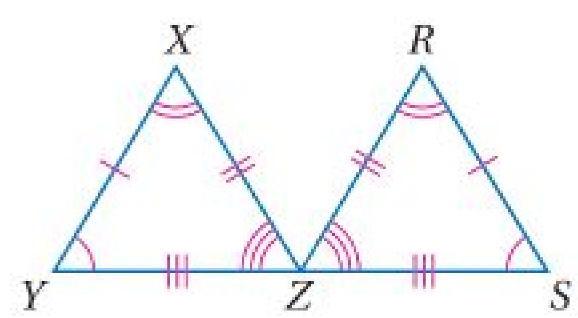
إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle EFG, \triangle EFG \cong \triangle JKL$ ، فإنّ $\triangle ABC \cong \triangle JKL$.

ستبرهن عناصر هذه النظرية في الأسئلة 21 , 20 , 18

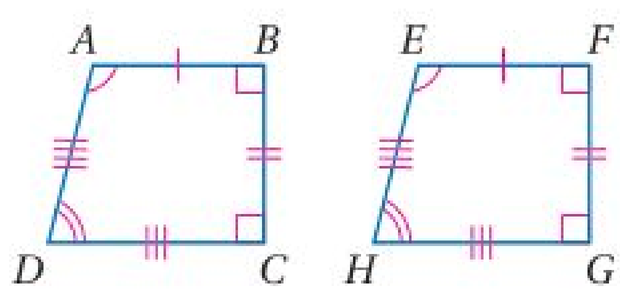
تأكد

المثال 1 في كلٍّ من السؤالين الآتيين، بيّن أنّ المضلعين متطابقان بتعيين جميع العناصر المتناظرة المتطابقة، ثمّ اكتب عبارة التطابق:

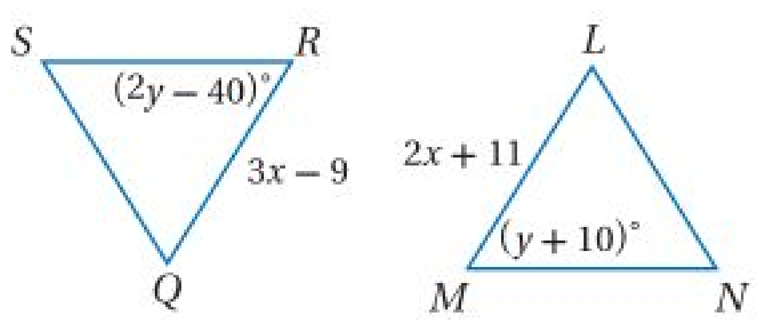
(1



(2



المثال 2 في الشكلين المجاورين، إذا كان $\triangle LMN \cong \triangle QRS$ فأوجد:

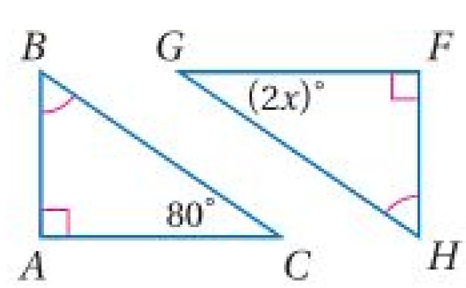


3) قيمة x.

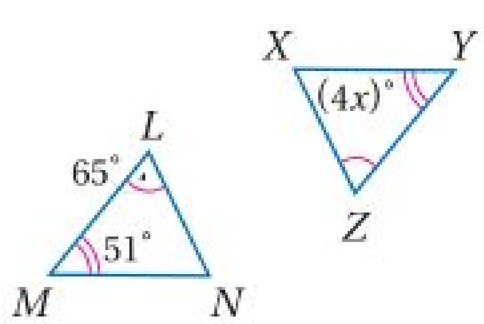
4) قيمة y.

المثال 3 في كلٍّ من السؤالين الآتيين، أوجد قيمة x، وفسّر إجابتك.

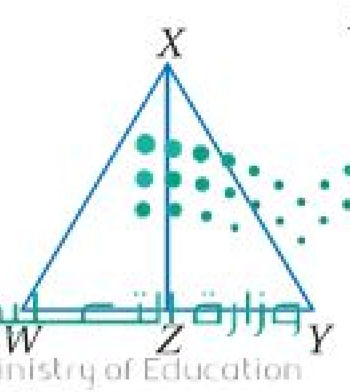
(5



(6



المثال 4 **7) برهان:** اكتب برهانًا حرًّا.



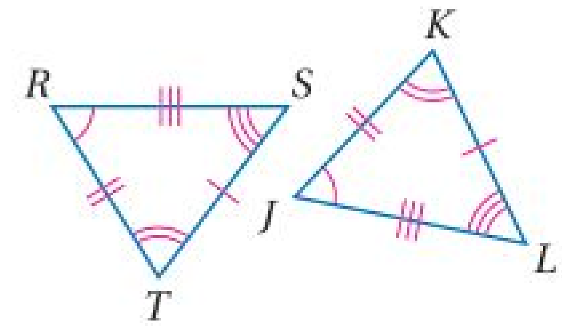
المعطيات: $\angle WXZ \cong \angle YXZ$, $\angle XZW \cong \angle XZY$, $\overline{WX} \cong \overline{YX}$, $\overline{WZ} \cong \overline{YZ}$

المطلوب: $\triangle WXZ \cong \triangle YXZ$

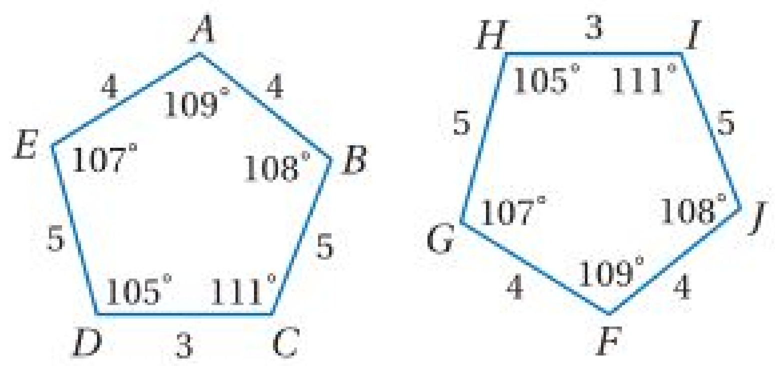
تدرب وحل المسائل

المثال 1 في كل من السؤالين الآتيين، بيّن أن المضلعين متطابقان بتعيين جميع العناصر المتناظرة المتطابقة، ثمّ اكتب عبارة التطابق.

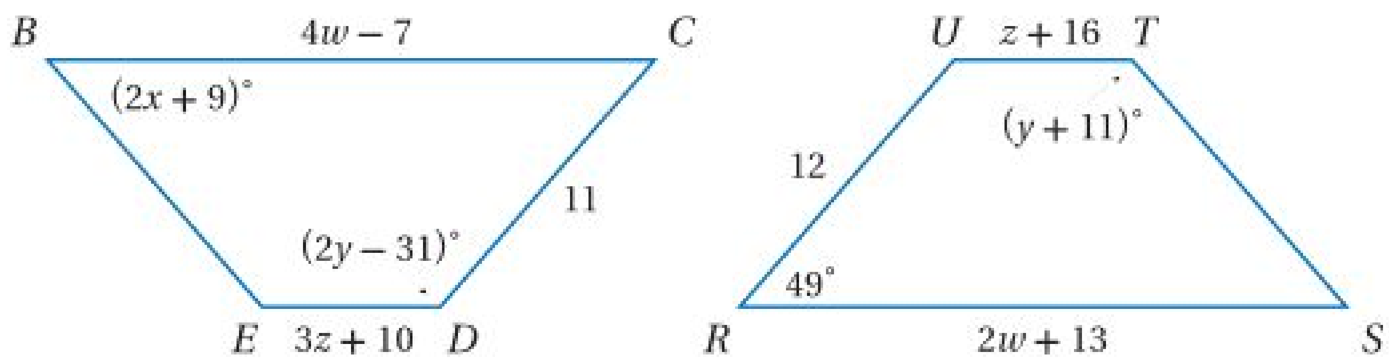
8)



9)



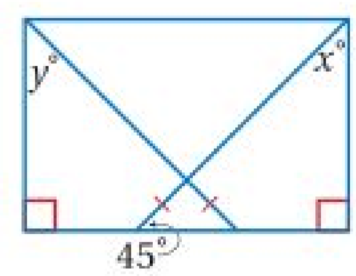
المثال 2 إذا كان المضلع $BCDE \cong$ المضلع $RSTU$، فأوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:



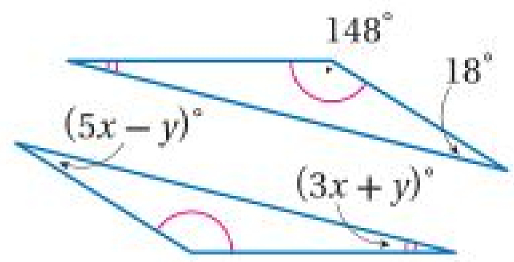
10) x **11)** y **12)** z **13)** w

المثال 3 أوجد قيمة كلٍّ من x, y في الأسئلة الآتية:

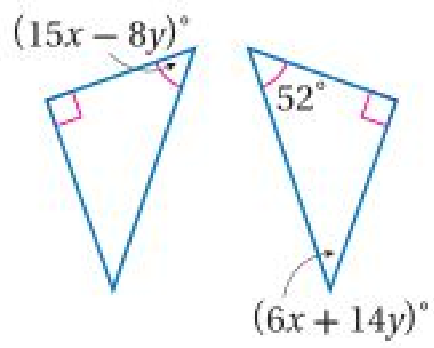
14)



15)



16)



المثال 4 **17)** **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 3.3.

18) **برهان:** رتِّب العبارات المستعملة في برهان العبارة الآتية ترتيبًا صحيحًا. وقدّم تبريرًا لكل عبارة.

"تطابق المثلثات علاقة تماثل". (النظرية 3.4)

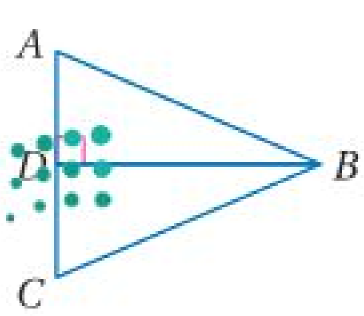
المعطيات: $\triangle RST \cong \triangle XYZ$

المطلوب: $\triangle XYZ \cong \triangle RST$

البرهان:

$\angle X \cong \angle R, \angle Y \cong \angle S, \angle Z \cong \angle T, \overline{XY} \cong \overline{RS}, \overline{YZ} \cong \overline{ST}, \overline{XZ} \cong \overline{RT}$	$\angle R \cong \angle X, \angle S \cong \angle Y, \angle T \cong \angle Z, \overline{RS} \cong \overline{XY}, \overline{ST} \cong \overline{YZ}, \overline{RT} \cong \overline{XZ}$	$\triangle RST \cong \triangle XYZ$	$\triangle XYZ \cong \triangle RST$
?	?	?	?

19) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين:



المعطيات: $\overline{BD}$ تنصّف $\angle B$.

$\overline{BD} \perp \overline{AC}$

المطلوب: $\angle A \cong \angle C$

برهان: اكتب برهانًا من النوع المذكور لكل جزء من النظرية 3.4.

20) تطابق المثلثات علاقة تعدٍّ. (برهان حرّ)

21) تطابق المثلثات علاقة انعكاس. (برهان تسلسلي)

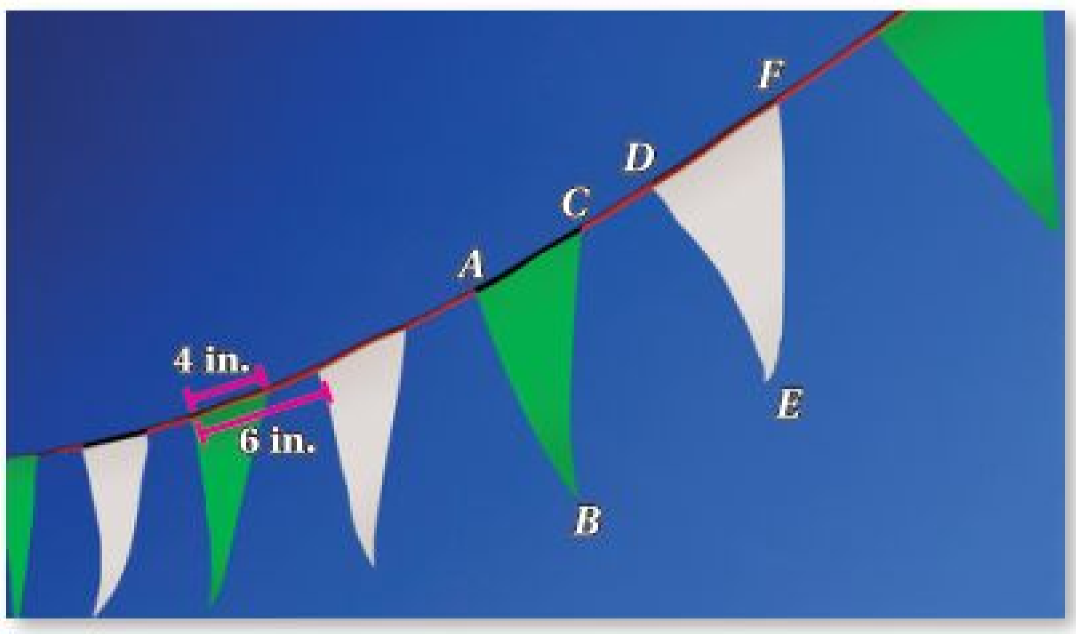
جبر: ارسم شكلًا يمثّل المثلثين المتطابقين في كلٍّ من السؤالين الآتيين وسمِّه، ثم أوجد قيمة x, y:

22) $\triangle ABC \cong \triangle DEF, AB = 7, BC = 25, AC = 11 + x, DF = 3x - 13, DE = 2y - 5$

23) $\triangle LMN \cong \triangle RST, m\angle L = 49°, m\angle M = (10y)°, m\angle S = 70°, m\angle T = (4x + 9)°$

24) **رايات:** في مهرجان رياضي، كان سعيد مسؤولًا عن إحاطة منطقة مساحتها $100\ ft^2$ مخصصة لجلوس المُعلقين والإعلاميين، فاستعمل حبلًا وثبّت عليه رايات على شكل مثلثات متطابقة، كلٌّ منها متطابق الضلعين.

إرشاد: $1\ ft = 12\ in$



a) اكتب سبعة أزواج من القطع المستقيمة المتطابقة في الصورة.

b) إذا كانت المنطقة التي حوَّطها سعيد بحبل الرايات مربّعة الشكل، فكم سيكون طول الحبل؟

c) ما عدد الرايات المثبتة بالحبل؟

25) **تمثيلات متعدِّدة:** في هذه المسألة ستكتشف العلاقة بين مساحات المضلعات المتطابقة:

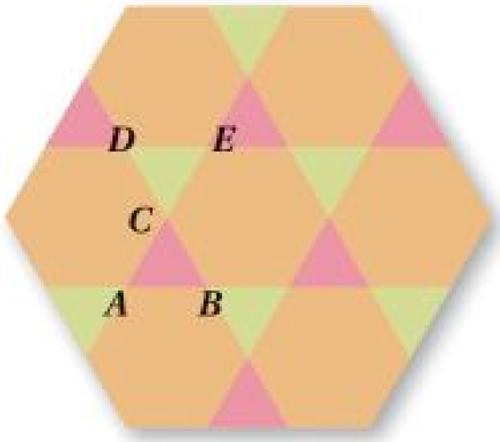
a) **لفظيًا:** اكتب عبارة شرطيّة تمثل العلاقة بين مساحتَي مثلثين متطابقين.

b) **لفظيًا:** اكتب عكس عبارتك الشرطيّة. وهل العبارة العكسيّة صحيحة أم خطأ؟ وضّح تبريرك.

c) **هندسيًا:** ارسم - إنْ أمكن - مستطيلين لهما المساحة نفسها، ولكنّهما غير متطابقين، وإذا كان ذلك غير ممكن فوضح السبب.

d) **هندسيًا:** ارسم - إنْ أمكن - مربعين لهما المساحة نفسها، ولكنّهما غير متطابقين، وإذا كان ذلك غير ممكن فوضح السبب.

26) **أنماط:** صُمّم النمط المجاور باستعمال مضلعات منتظمة.



a) ما المضلعان المنتظمان اللذان استُعملا في التصميم؟

b) سمِّ زوجًا من المثلثات المتطابقة.

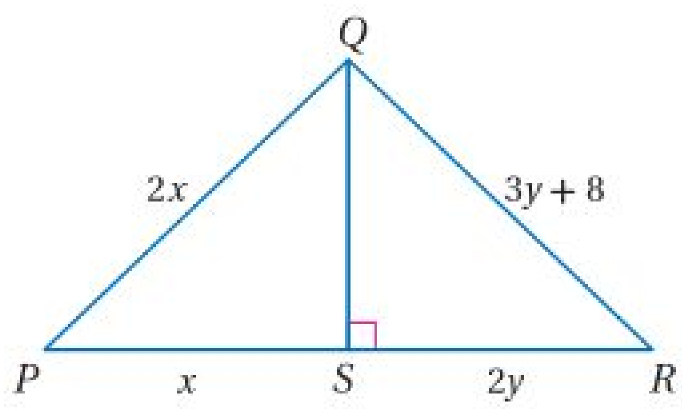
c) سمِّ زوجًا من الزوايا المتطابقة.

d) إذا كان $CB = 2$ in ، فكم يكون AE؟ وضح إجابتك.

e) ما قياس $\angle EDC$؟ وضح إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

27) **تحدٍّ:** إذا كان $\triangle PQS \cong \triangle RQS$. فأوجد قيمة كلٍّ من x , y.

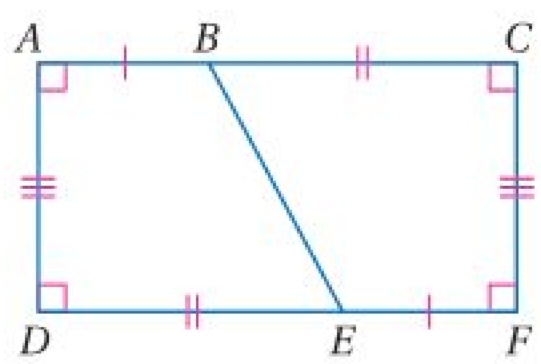


تبرير: حدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة أم خطأً. وإذا كانت خطأً، فأعطِ مثالًا مضادًا. أما إذا كانت صحيحة، فوضح إجابتك.

28) إذا تطابق زوجان من الزوايا المتناظرة لمثلثين، وتطابقت الأزواج الثلاثة من أضلاعهما المتناظرة، فإنّ المثلثين متطابقان.

29) إذا كانت أزواج الزوايا المتناظرة الثلاثة لمثلثين متطابقة، فإنّ المثلثين متطابقان.

30) **تحدٍّ:** اكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن المضلع $ABED \cong$ المضلع $FEBC$.



31) **اكتب:** حدِّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحةً دائمًا أو صحيحةً أحيانًا أو ليست صحيحةً أبدًا. ووضح إجابتك.

"المثلثان المتطابقا الأضلاع يكونان متطابقين"

تدريب على اختبار

32) إذا علمت أن: $\triangle ABC \cong \triangle HIJ$ ، ورؤوس $\triangle ABC$ هي: $A(-1, 2), B(0, 3), C(2, -2)$ ، فما طول الضلع HJ ؟

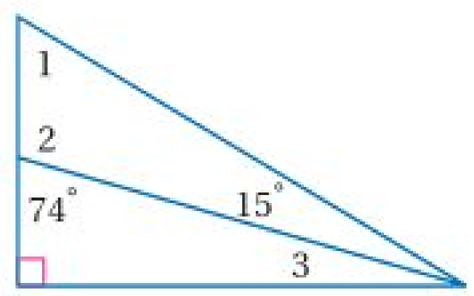
A 5
B $\sqrt{29}$
C $\sqrt{2}$
D 25

33) **جبر:** أيٌّ مما يأتي عامل لِـ $x^2 + 19x - 42$؟

A $x + 14$
B $x + 2$
C $x - 2$
D $x - 14$

مراجعة تراكمية

في الشكل المجاور أوجد كلًّا من القياسات الآتية: (الدرس 2-3)



34) $m\angle 2$

35) $m\angle 1$

36) $m\angle 3$

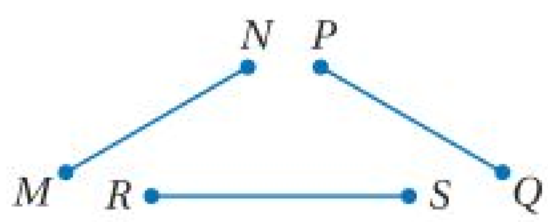
37) **هندسة إحداثيّة:** أوجد أطوال أضلاع $\triangle JKL$ الذي رؤوسه هي $J(-7, 10), K(15, 0), L(-2, -1)$، وصنّفه وفقًا لأطوال أضلاعه. (الدرس 1-3)

حدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحةً دائمًا أو أحيانًا أو ليست صحيحةً أبدًا: (مهارة سابقة)

38) تكون الزاويتان المتجاورتان على خط مستقيم متكاملتين.

39) إذا كانت الزاويتان متكاملتين فإن إحداهما تكون منفرجة.

استعد للدرس اللاحق



40) انقل البرهان الآتي وأكمله:

المعطيات: $\overline{MN} \cong \overline{PQ}, \overline{PQ} \cong \overline{RS}$

المطلوب: $\overline{MN} \cong \overline{RS}$

البرهان:

العبارات	المبررات
a) ___؟___	a) معطيات
b) $MN = PQ, PQ = RS$	b) ___؟___
c) ___؟___	c) ___؟___
d) $\overline{MN} \cong \overline{RS}$	d) تعريف القطع المستقيمة المتطابقة

4-3 إثبات تطابق المثلثات SSS , SAS
Proving Triangles Congruent-SSS, SAS

فيما سبق:

درست إثبات تطابق المثلثات باستعمال تعريف التطابق.

(الدرس 3-3)

والآن:

- أستعمل المسلمة SSS لاختبار تطابق المثلثات.
- أستعمل المسلمة SAS لاختبار تطابق المثلثات.

المفردات:

الزاوية المحصورة
Included Angle

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

لماذا؟

تُعدّ السبورة المزدوجة التي على شكل الحرف A طريقة مناسبة لعرض المعلومات، لا لأنها تُطوى عند التخزين فقط، ولكن لأنّها تكون ثابتةً تمامًا عند وضع الذراعين الجانبيَّين في موقعيهما. وعندما يكون للذراعين الطول نفسه، ويتم تثبيتهما على أبعاد متساوية من القمة على الجانبين، فإن السبورة المفتوحة تشكّل مثلثين متطابقين هما $\triangle ABC, \triangle XYZ$.

مسلمة التطابق بثلاثة أضلاع SSS : في هذا الدرس ستكتشف أنه ليس من الضروري أن تبين تطابق الأضلاع المتناظرة وتطابق الزوايا المتناظرة في مثلثين لتثبت أنهما متطابقان.

تبيّن السبورة المزدوجة أنّه إذا كانت أطوال الأضلاع المتناظرة لمثلثين متساوية، فإن المثلثين متطابقان. وهذا ما تنصّ عليه المسلمة الآتية:

مسلمة 3.1

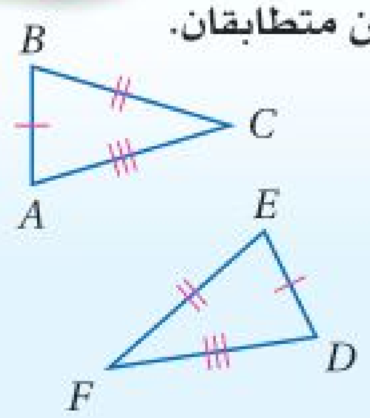
أضف إلى مطويتك

التطابق بثلاثة أضلاع (SSS)

إذا تطابقت أضلاع مثلثٍ مع الأضلاع المناظرة لها في مثلثٍ آخر، فإنّ المثلثين متطابقان.

مثال **إذا كان** $\overline{AB} \cong \overline{DE}$,
$\overline{BC} \cong \overline{EF}$,
$\overline{AC} \cong \overline{DF}$

فإنَّ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



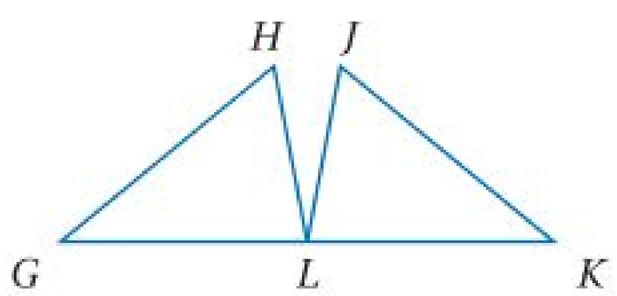
قراءة الرياضيات

اختصارات رياضية

S اختصار لِ **side** أو ضلع، و A اختصار لِ **Angle** أو زاوية.

مثال 1 استعمال المسلمة SSS لإثبات تطابق مثلثين

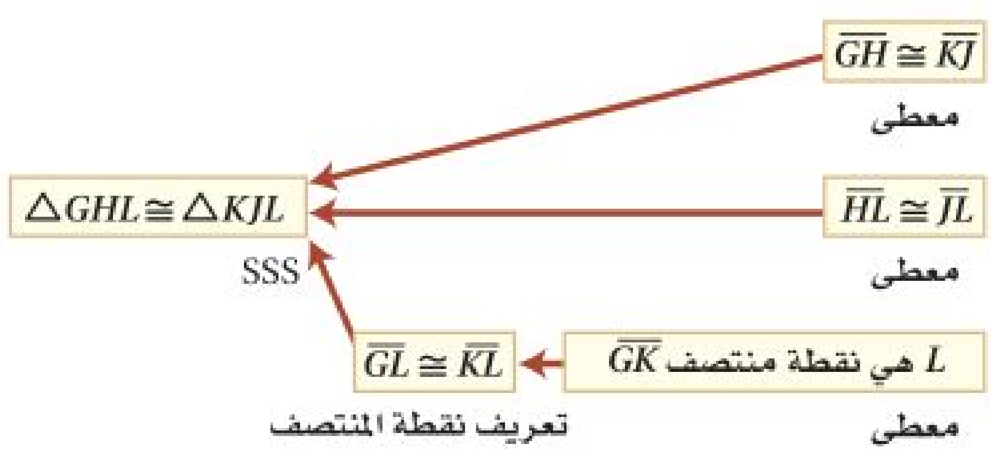
اكتب برهانًا تسلسليًّا.



المعطيات: $\overline{GH} \cong \overline{KJ}$, $\overline{HL} \cong \overline{JL}$ ، L نقطة منتصف $\overline{GK}$.

المطلوب: إثبات أن $\triangle GHL \cong \triangle KJL$

البرهان:

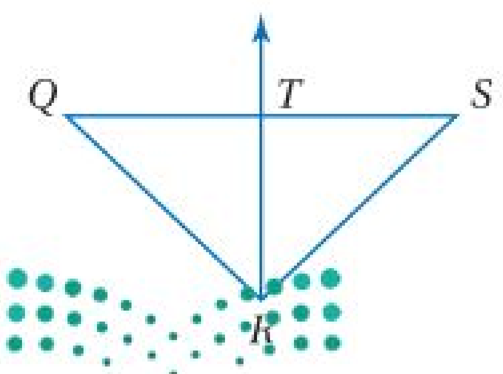


إرشادات للدراسة

منصف قطعة مستقيمة عبارة عن قطعة أو مستقيم أو مستوى يقطع القطعة عند منتصفها.

✓ تحقق من فهمك

1) اكتب برهانًا تسلسليًّا.



المعطيات: $\triangle QRS$ متطابق الضلعين، فيه، $\overline{QR} \cong \overline{SR}$.
$\overline{RT}$ تنصّف $\overline{QS}$ عند النقطة T.

المطلوب: إثبات أنّ $\triangle QRT \cong \triangle SRT$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال 2 على اختبار معياري

إجابة مطولة: إحداثيات رؤوس المثلث ABC هي: $A(1, 1), B(0, 3), C(2, 5)$.
ورؤوس المثلث EFG هي: $E(1, -1), F(2, -5), G(4, -4)$.

a) مثِّل كلا المثلثين في مستوى إحداثيٍّ واحدٍ.

b) استعمل هذا التمثيل؛ لتخمين ما إذا كان المثلثان متطابقين أم لا. وفسِّر إجابتك.

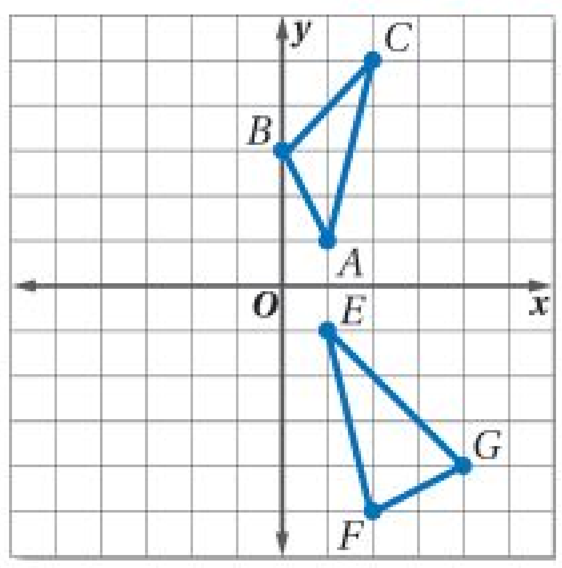
c) اكتب برهانًا منطقيًّا باستعمال الهندسة الإحداثية لتدعم تخمينك في الجزء b.

اقرأ سؤال الاختبار:

في هذه المسألة يُطلب إليك عمل ثلاثة أشياء؛ إذ يتعين عليك في الجزء a أن ترسم كلًّا من $\triangle ABC$, $\triangle EFG$ في مستوى إحداثيٍّ واحد. وفي الجزء b أن تضع تخمينًا يبين ما إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle EFG$ أم لا، اعتمادًا على الرسم. وأخيرًا عليكَ في الجزء c أن تثبت صحّة تخمينك.

حل سؤال الاختبار:

a)



b) يتضح من الرسم أن المثلثين مختلفان في الشكل؛ لذا يمكن أن نخمِّن أنهما ليسا متطابقين.

c) استعمل صيغة المسافة لبيان أن أطوال بعض الأضلاع المتناظرة غير متساوية.

$$EF = \sqrt{(2-1)^2 + [-5-(-1)]^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$AB = \sqrt{(0-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$FG = \sqrt{(4-2)^2 + [-4-(-5)]^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{(2-0)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$EG = \sqrt{(4-1)^2 + [-4-(-1)]^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

$$AC = \sqrt{(2-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

وبما أن $AB = FG, AC = EF$، في حين أن $BC \neq EG$، فإن شروط مسلمة التطابق SSS غير متحققة؛ إذن $\triangle ABC \ncong \triangle EFG$.

قراءة الرياضيات

الرموز
تقرأ العبارة $\triangle ABC \ncong \triangle EFG$ المثلث ABC لا يطابق المثلث EFG.

تحقق من فهمك

2) إحداثيات رؤوس المثلث JKL هي $J(2, 5), K(1, 1), L(5, 2)$. ورؤوس المثلث NPQ هي $N(-3, 0), P(-7, 1), Q(-4, 4)$.

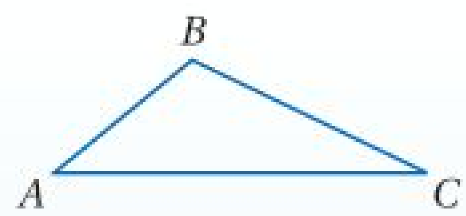
A) مثِّل كلا المثلثين في مستوى إحداثيٍّ واحدٍ.

B) استعمل هذا التمثيل؛ لتخمين ما إذا كان المثلثان متطابقين أم لا. وفسِّر إجابتك.

C) اكتب برهانًا منطقيًّا باستعمال الهندسة الإحداثية لتدعم تخمينك في الجزء B.

إنشاء هندسي

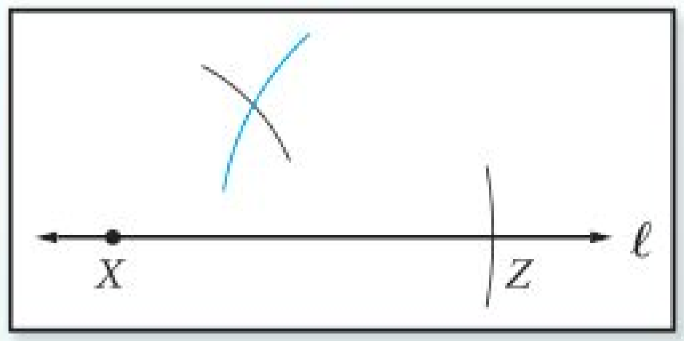
إنشاء مثلث يطابق مثلثًا مرسومًا باستعمال المسلّمة (SSS)



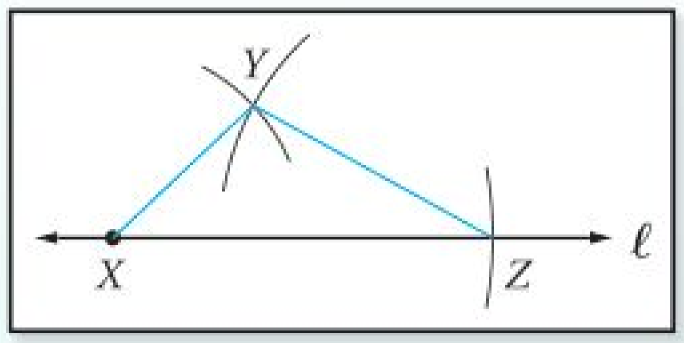
ارسم مثلثًا وسمّه $\triangle ABC$، ثم استعمل المسلمة SSS لتنشئ $\triangle XYZ$ الذي يطابق $\triangle ABC$.

الخطوة 1 عيّن النقطة X على المستقيم ℓ. ثم أنشئ $\overline{XZ} \cong \overline{AC}$ على ℓ كما يأتي:

- ركز رأس الفرجار في النقطة A ، وافتحه حتى يصل القلم إلى النقطة C.
- باستعمال فتحة الفرجار نفسها، ركِّز رأس الفرجار في X، وارسم قوسًا يقطع المستقيم ℓ وسمِّ نقطة التقاطع Z.

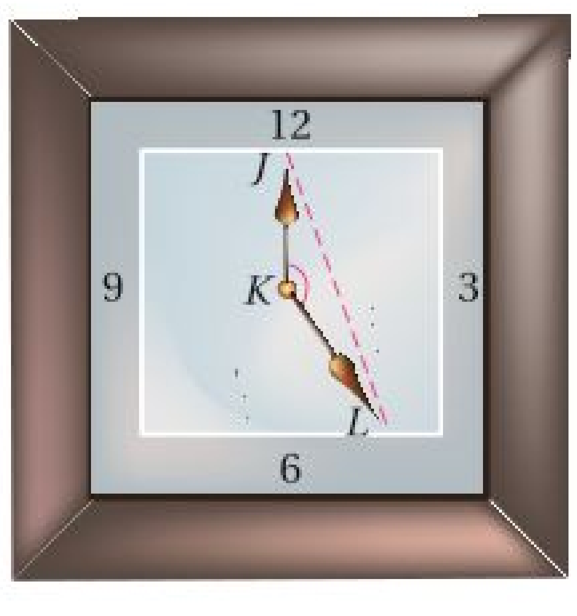


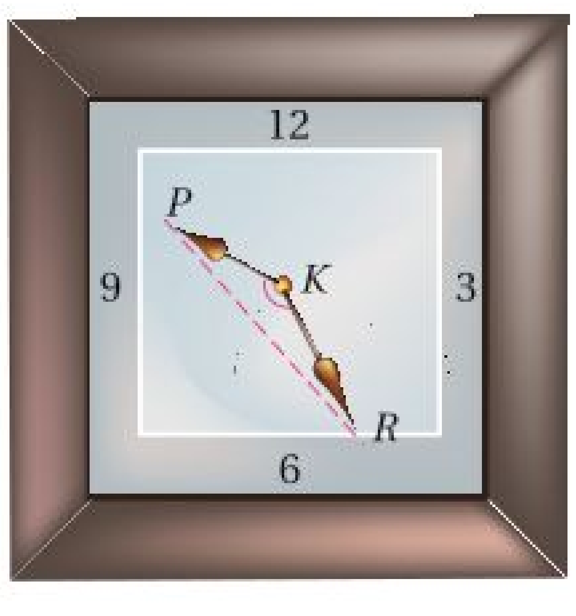
الخطوة 2 أنشئ قوسًا طول نصف قطره AB، ومركزه X ، وقوسًا آخر طول نصف قطره BC، ومركزه Z (مستعملًا الفرجار كما في الخطوة 1).



الخطوة 3 سمِّ نقطة تقاطع القوسين Y . وارسم $\overline{XY}, \overline{ZY}$ لتشكل $\triangle XYZ$.

مسلمة التطابق: ضلعان والزاوية المحصورة بينهما SAS: تُسمّى الزاوية المتكونة من ضلعين متجاورين لمضلع **زاوية محصورة**. تأمّل الزاوية المحصورة والمتكونة من عقربَي الساعة في كلا الوضعين الموضَّحين أدناه، ولاحظ أنه كلما شكّل العقربان زاويةً لها القياس نفسه، فستكون المسافتان بين طرفَي العقربين $\overline{PR}$, $\overline{JL}$ متساويتين.





$\triangle PKR \cong \triangle JKL$

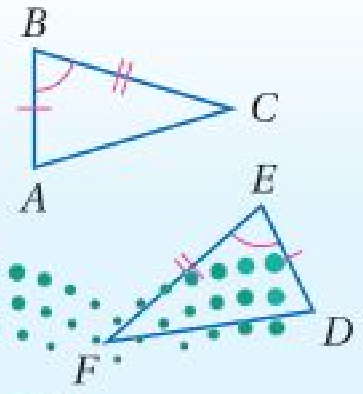
أيُّ مثلثين يتكونان من زوجين من الأضلاع المتساوية في الطول وزاويتين محصورتين متساويتين في القياس يكونان متطابقين. وهذا يوضح المسلمة الآتية:

مسلمة 3.2 مسلمة التطابق: ضلعان والزاوية المحصورة بينهما (SAS)

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: **إذا طابق ضلعان وزاوية محصورة بينهما في مثلث نظائرها في مثلث آخر، فإنّ المثلثين متطابقان.**

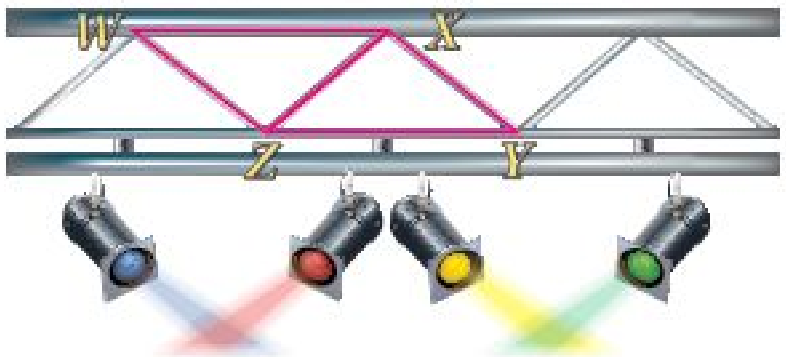
مثال: **إذا كان** $\overline{AB} \cong \overline{DE}$,
$\angle B \cong \angle E$,
$\overline{BC} \cong \overline{EF}$,
فإنّ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



الربط مع الحياة

فنيو الإضاءة: في صناعة الصور المتحركة، يقوم فنيُّو الإضاءة بتحديد مواقع المصابيح التي يتطلبها الفيلم. ويقوم هؤلاء الفنيون بالتأكد من أن الزوايا التي يشكلها الضوء في مواضعها الصحيحة.

مثال 3 من واقع الحياة — استعمال SAS لإثبات تطابق المثلثات



إضاءة: تبدو دعامات السقّالة حاملة المصابيح الظاهرة في الصورة وكأنّها مكونة من مثلثات متطابقة. فإذا كان $\overline{WX} \cong \overline{ZY}, \overline{WX} \parallel \overline{ZY}$ ، فاكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن: $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$.

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$	1) معطى
2) $\overline{WX} \parallel \overline{ZY}$	2) معطى
3) $\angle WXZ \cong \angle XZY$	3) نظرية الزوايا الداخلية المتبادلة
4) $\overline{XZ} \cong \overline{ZX}$	4) خاصية الانعكاس للتطابق
5) $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$	5) SAS

✓ تحقق من فهمك

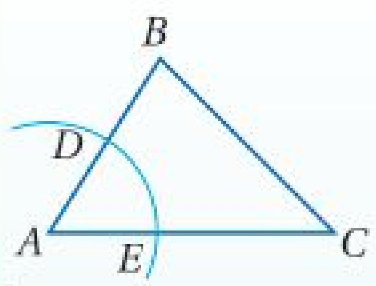
3) **طيران شراعي:** في الصورة المجاورة يبدو جناحا الطائرة الشراعية أنهما مثلثان متطابقان. فإذا كانت $\overline{FG} \cong \overline{GH}$ ، $\overline{JG}$ تنصّف $\angle FGH$ ، فأثبت أنّ $\triangle FGJ \cong \triangle HGJ$.

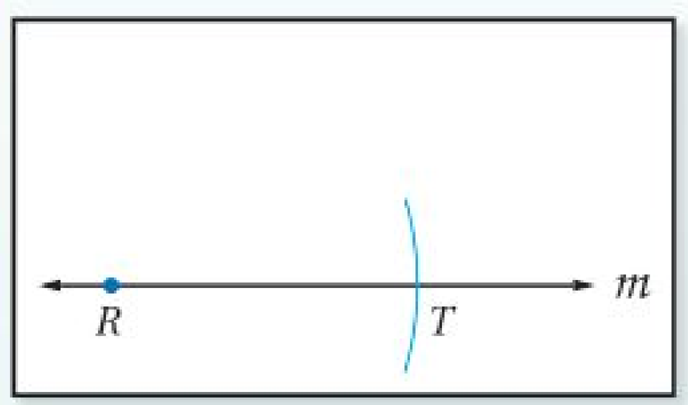
يمكنك أيضًا أن تنشئ مثلثات متطابقة إذا عُلم طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

إنشاء هندسي

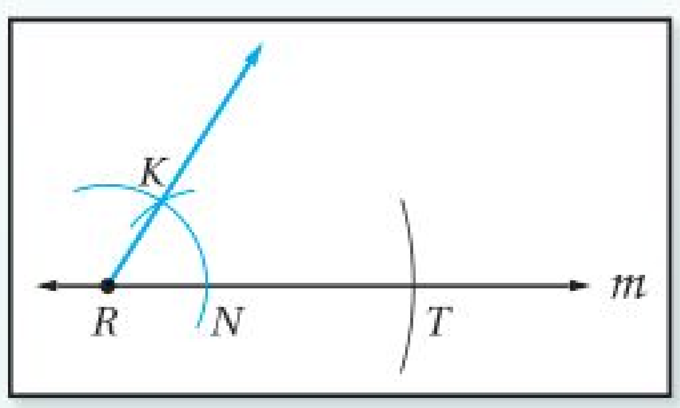
إنشاء مثلث يطابق مثلثًا مرسومًا باستعمال مسلمة التطابق "ضلعان والزاوية المحصورة بينهما (SAS)"

ارسم مثلثًا وسمِّه $\triangle ABC$ ، ثم استعمل المسلمة SAS لتنشئ $\triangle RST$ الذي يطابق $\triangle ABC$.



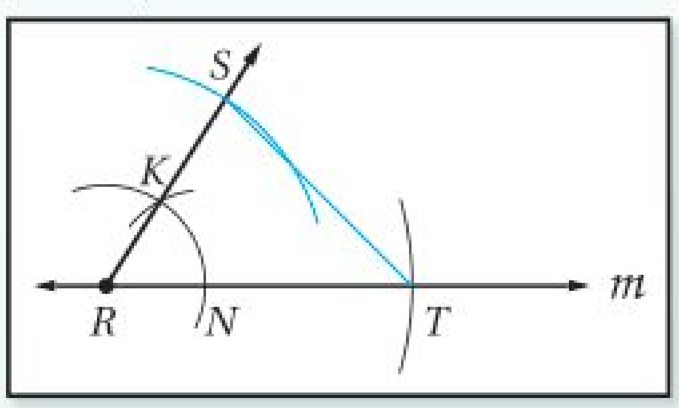


الخطوة 1: عيِّن النقطة R على المستقيم m . ثم أنشئ $\overline{RT} \cong \overline{AC}$ على m .



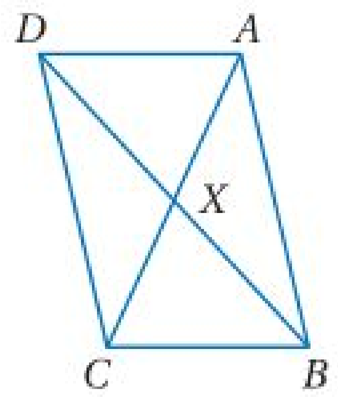
الخطوة 2: أنشئ $\angle R \cong \angle A$ ، باستعمال $\overline{RT}$ ضلعًا للزاوية، والنقطة R رأسًا لها كما يأتي:

- ضع رأس الفرجار على النقطة A ، وارسم قوسًا يقطع ضلعَي $\angle A$. سمِّ نقطتَي التقاطع D, E .
- باستعمال فتحة الفرجار نفسها، ضع رأس الفرجار عند R وارسم قوسًا يبدأ فوق المستقيم m ويقطعه، سمِّ نقطة التقاطع N .
- ضع رأس الفرجار عند E وعدِّل الفتحة حتى يصل رأس القلم إلى D.
- دون تغيير فتحة الفرجار، ضع رأس الفرجار عند النقطة N ، وارسم قوسًا يقطع القوس الذي رسمته سابقًا في النقطة K ، ثم ارسم $\overline{RK}$.



الخطوة 3: أنشئ $\overline{RS} \cong \overline{AB}$ ، ثم ارسم $\overline{ST}$ لتشكّل $\triangle RST$.

مثال 4 استعمال تطابق المثلثين بضلعين وزاوية محصورة SAS في البراهين



اكتب برهانًا تسلسليًّا لما يأتي.

المعطيات: X منتصف $\overline{DB}$

و X منتصف $\overline{AC}$

المطلوب: $\triangle DXC \cong \triangle BXA$

البرهان:

X هي منتصف $\overline{DB}$ (معطى) ← $\overline{DX} \cong \overline{BX}$ (نظرية نقطة المنتصف)

X هي منتصف $\overline{AC}$ (معطى) ← $\overline{CX} \cong \overline{AX}$ (نظرية نقطة المنتصف)

$\angle DXC \cong \angle BXA$ (الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان)

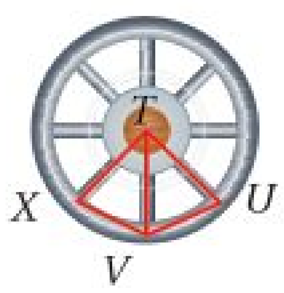
← $\triangle DXC \cong \triangle BXA$ (SAS)

إرشادات للدراسة

البراهين التسلسلية

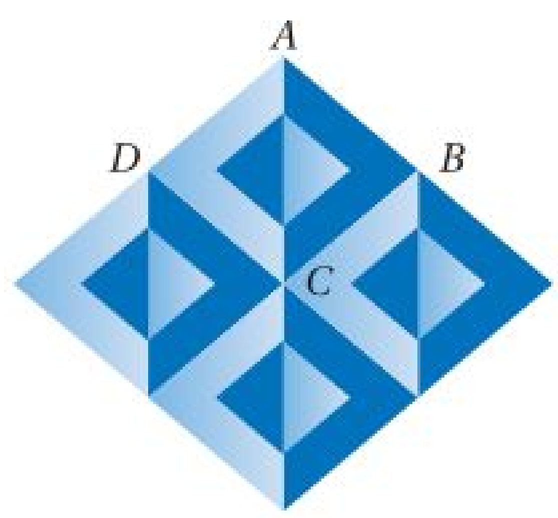
يمكن كتابة البراهين التسلسلية إما رأسيًا وإما أفقيًا.

تحقق من فهمك



4) قضبان الإطار الداخلية تقسمه إلى ثمانية أجزاء. إذا كان: $\overline{TU} \cong \overline{TX}$ وَ $\angle XTV \cong \angle UTV$، فبين أن $\triangle XTV \cong \triangle UTV$.

تأكد



المثال 1 1) **الخداع البصري:** في الشكل المقابل المربع $ABCD$ يطابق المربعات الثلاثة الأخرى التي تشكّل النمط.

a) ما عدد المثلثات المختلفة القياس التي استُعملت لعمل هذا النمط؟

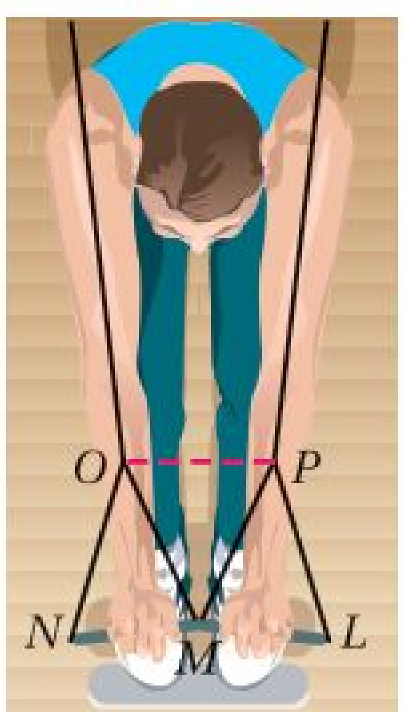
b) استعمل مسلمة التطابق SSS لإثبات أن $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

المثال 2 2) **إجابة مطولة:** إحداثيات رؤوس $\triangle ABC$ هي: $A(-3, -5)$, $B(-1, -1)$, $C(-1, -5)$. ورؤوس $\triangle XYZ$ هي $X(5, -5)$, $Y(3, -1)$, $Z(3, -5)$.

a) مثِّل كلا المثلثين في مستوى إحداثيٍّ واحدٍ.

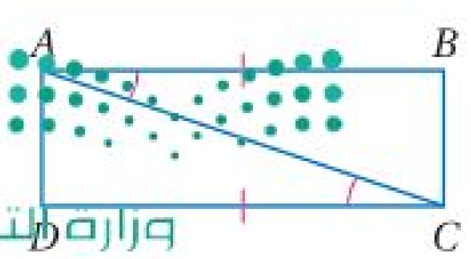
b) استعمل هذا التمثيل لتخمين ما إذا كان المثلثان متطابقين أم لا. وفسِّر إجابتك.

c) اكتب برهانًا منطقيًّا باستعمال الهندسة الإحداثية يدعم تخمينك في الفرع **b**.



المثال 3 3) **رياضة:** في الشكل المجاور، إذا كان: $\overline{LP} \cong \overline{NO}$, $\angle LPM \cong \angle NOM$ ، $\triangle MOP$ متطابق الأضلاع، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أنّ $\triangle LMP \cong \triangle NMO$.

المثال 4 4) اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: $\overline{BA} \cong \overline{DC}, \angle BAC \cong \angle DCA$

المطلوب: $\overline{BC} \cong \overline{DA}$

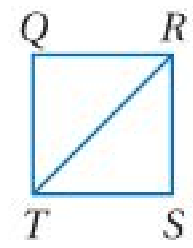
تدرب وحل المسائل

المثال 1 **برهان:** اكتب برهانًا من النوع المذكور في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

5) برهان حرٌّ

المعطيات: $\overline{QR} \cong \overline{SR}$, $\overline{ST} \cong \overline{QT}$

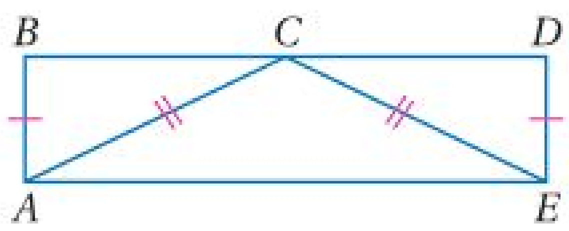
المطلوب: $\triangle QRT \cong \triangle SRT$



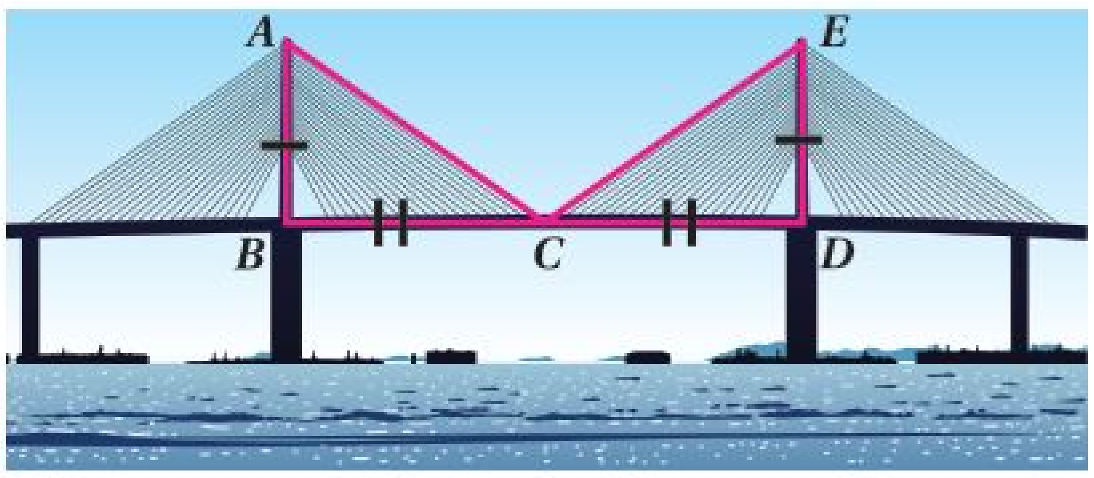
6) برهان ذو عمودين

المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{ED}$, $\overline{CA} \cong \overline{CE}$
$\overline{BD}$ تنصّف $\overline{AC}$

المطلوب: $\triangle ABC \cong \triangle EDC$



7) **جسور:** جسر الرياض المعلق طوله 763 m، وهو مثبت بحبال معدنيّة معلقة بِدعامتين خرسانيتين. كما هو مبين بالشكل، بحيث يلتقي الحبلان المعدنيان العلويان في النقطة C عند منتصف المسافة بين الدعامتين، إذا كانت $AB = ED$: فأثبت أن المثلثين المبيّنين في الشكل المجاور متطابقان.



المثال 2 **حدّد ما إذا كان $\triangle MNO \cong \triangle QRS$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين، ووضّح إجابتك:**

8) $M(2, 5), N(5, 2), O(1, 1), Q(-4, 4), R(-7, 1), S(-3, 0)$

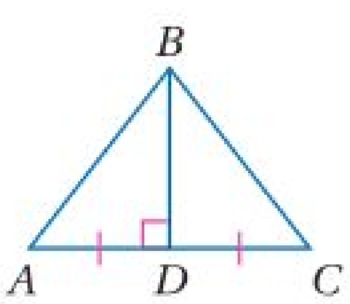
9) $M(0, -1), N(-1, -4), O(-4, -3), Q(3, -3), R(4, -4), S(3, 3)$

المثال 3 **برهان:** اكتب برهانًا من النوع المحدد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

10) برهان ذو عمودين

المعطيات: $\overline{BD} \perp \overline{AC}$, $\overline{BD}$ تنصّف $\overline{AC}$

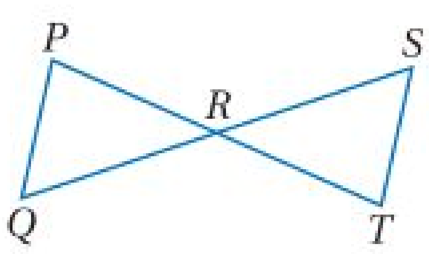
المطلوب: $\triangle ABD \cong \triangle CBD$



11) برهان حرٌّ

المعطيات: R نقطة المنتصف لكلٍّ من $\overline{QS}$, $\overline{PT}$

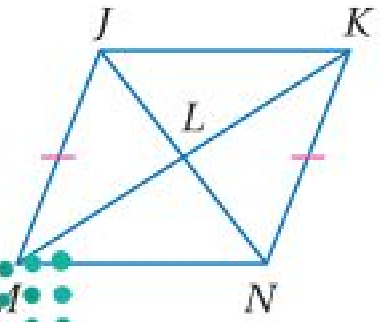
المطلوب: $\triangle PRQ \cong \triangle TRS$



المثال 4 **12)** **برهان:** اكتب برهانًا تسلسليًّا

المعطيات: $\overline{JM} \cong \overline{NK}$ ؛ L نقطة المنتصف لكلٍّ من $\overline{JN}$, $\overline{KM}$

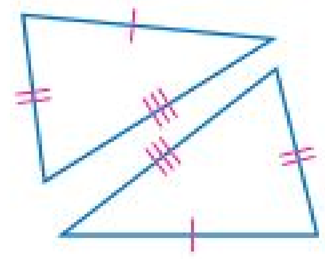
المطلوب: $\angle MJL \cong \angle KNL$



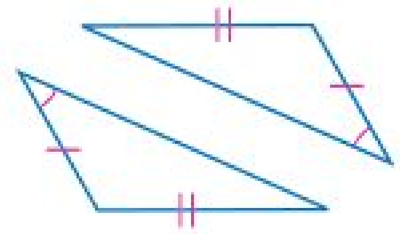
> **إرشادات للدراسة**
>
> تطابق ضلعين وزاوية غير محصورة بينهما في مثلث مع نظائرها في مثلث آخر، لا يكفي لإثبات أن المثلثين متطابقان.

حدّد ما إذا كان المثلثان في كلٍّ من الأسئلة الآتية متطابقين أم لا. وضح إجابتك.

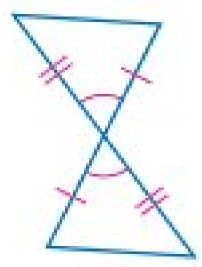
13)



14)



15)



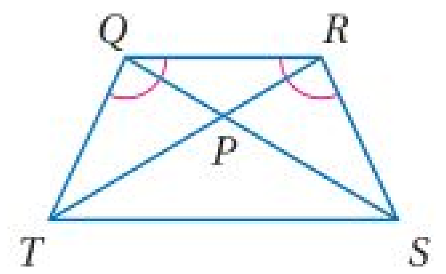
16) **إشارة تحذيرية:** استعمل الشكل المجاور.

a) ما اسم المجسم الذي تمثّله إشارة التحذير.

b) إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ ، $\overline{CB} \cong \overline{CD}$ ، فأثبت أنّ $\triangle ACB \cong \triangle ACD$.

c) لماذا يبدو المثلثان غير متطابقين في الشكل؟

17) **برهان:** اكتب برهانًا تسلسليًّا.

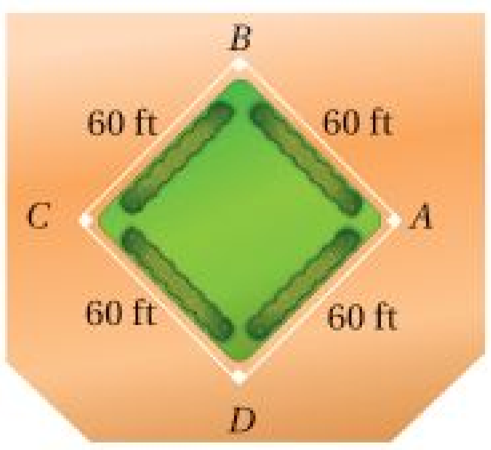


المعطيات: $\triangle TPQ \cong \triangle SPR$

$\angle TQR \cong \angle SRQ$

المطلوب: $\triangle TQR \cong \triangle SRQ$

18) في الشكل المجاور ABCD مزرعة مربعة الشكل، ويريد أخوان فصلها باستعمال سياج على أحد القطرين.

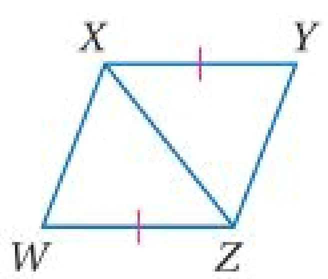


a) اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن $BD = AC$.

b) اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أنّ $\angle BDC \cong \angle BDA$.

> **إرشادات للدراسة**
>
> **الأشكال**
>
> عند كتابة البراهين أو حل المسائل التي تتضمن مثلثات متطابقة، من المفيد أن ترسم شكلاً خاصًا بك، وتعيّن عليه الأضلاع والزوايا المتطابقة التي تجدها.

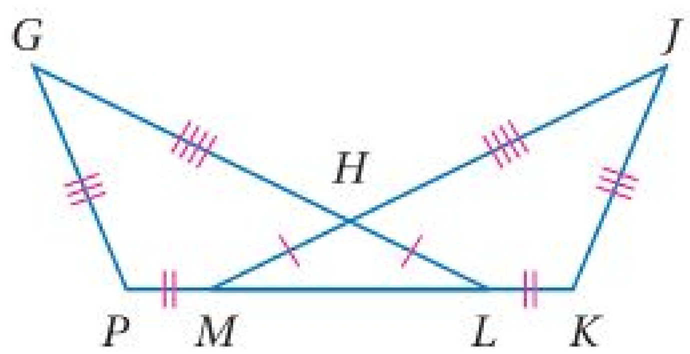
19) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: $\overline{YX} \cong \overline{WZ}$, $\overline{YX} \parallel \overline{ZW}$

المطلوب: $\triangle YXZ \cong \triangle WZX$

20) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا.



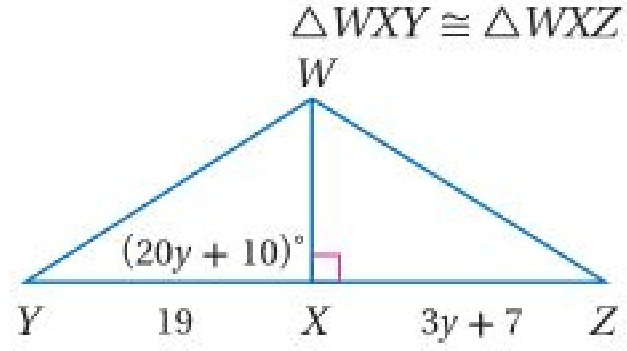
المعطيات: $\overline{HL} \cong \overline{HM}$, $\overline{PM} \cong \overline{KL}$,

$\overline{PG} \cong \overline{KJ}$, $\overline{GH} \cong \overline{JH}$

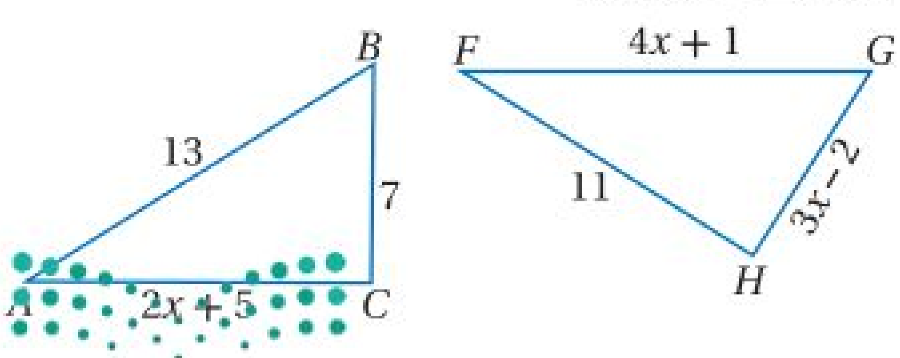
المطلوب: $\angle G \cong \angle J$

جبر: أوجد قيمة المتغير التي تجعل المثلثين متطابقين في كلٍّ من السؤالين الآتيين، وفسِّر إجابتك:

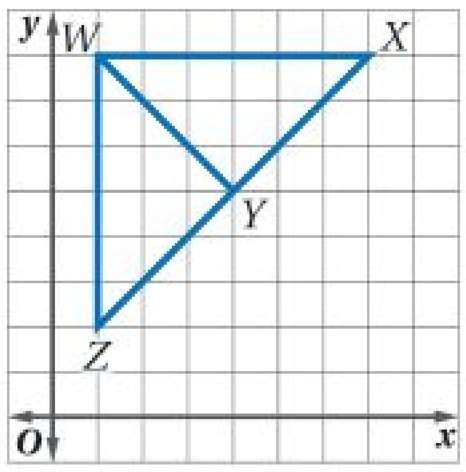
21) $\triangle WXY \cong \triangle WXZ$



22) $\triangle ABC \cong \triangle FGH$



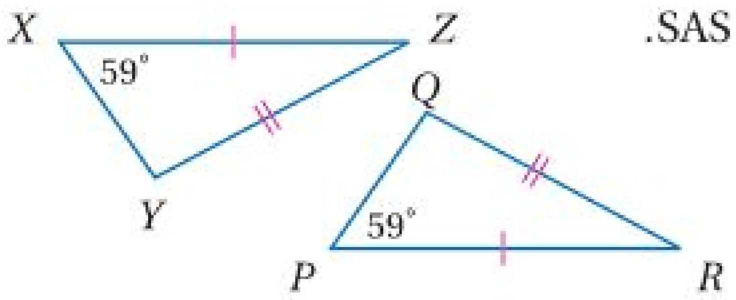
مسائل مهارات التفكير العليا



23) **تحدٍّ:** في الشكل المجاور:

a) صف طريقتين يمكنك استعمالهما لإثبات أنّ $\triangle WYZ$ يطابق $\triangle WYX$. علمًا بأنه لا يُسمح باستعمال المسطرة أو المنقلة. وأيّ طريقة تعتقد أنها فعّالة أكثر؟ وضح إجابتك.

b) أثبت أن $\triangle WYZ \cong \triangle WYX$ ووضّح إجابتك.

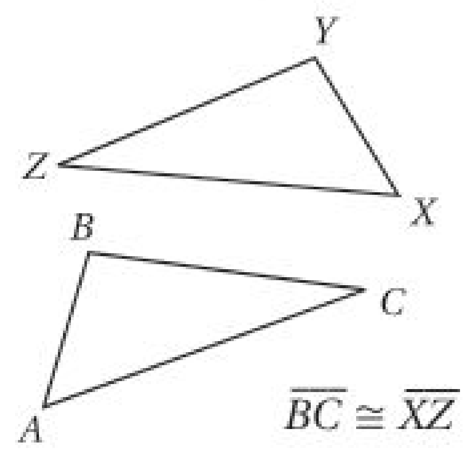


24) **اكتشف الخطأ:** قال أحمد: إنّ $\triangle PRQ \cong \triangle XYZ$ بحسب SAS. فاعترض خالد وقال: لا توجد معلومات كافية لإثبات أن المثلثين متطابقان. أيُّهما كانت إجابته صحيحة؟ وضح إجابتك.

25) **اكتب:** إذا كان زوجان من الأضلاع المتناظرة لمثلثين قائمَي الزاوية متطابقين، فهل المثلثان متطابقان؟ وضح إجابتك.

تدريب على اختبار

26) في الشكلين المجاورين، $\overline{AC} \cong \overline{XZ}$ و $\angle C \cong \angle Z$. ما المعلومة الإضافية التي يمكن استعمالها لإثبات أن $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$؟



A $\overline{BC} \cong \overline{YZ}$

B $\overline{AB} \cong \overline{XY}$

C $\overline{BC} \cong \overline{XZ}$

D $\overline{XZ} \cong \overline{XY}$

27) إذا كان $-2a + b = -7$، فما قيمة a إذا علمت أن $b = -1$؟

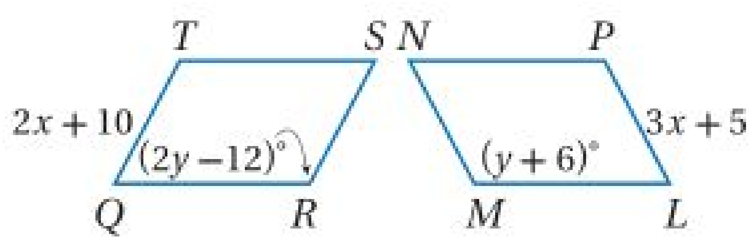
A -1

B 2

C 3

D 4

مراجعة تراكمية



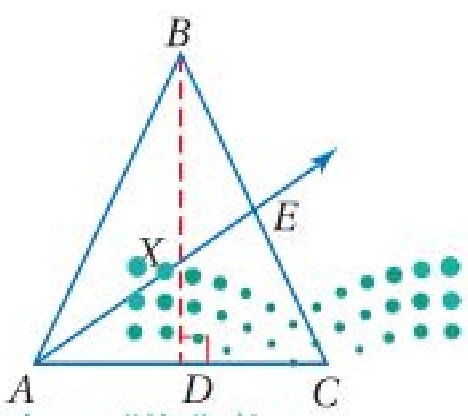
في الشكلين المجاورين، إذا علمت أن متوازي الأضلاع $LMNP \cong$ متوازي الأضلاع $QRST$، فأوجد: (الدرس 3-3)

28) قيمة x.

29) قيمة y.

30) اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي للعبارة: "الزاويتان المتجاورتان على مستقيم متكاملتان". وحدّد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أو خاطئة. وإذا كانت خاطئة، فأعط مثالًا مضادًّا. (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق



إذا علمت أن $\overline{AE}$, $\overline{BD}$ ينصِّفان الزاويتين والضلعين اللذين يقطعانهما، فاذكر القطع المستقيمة والزوايا المشار إليها فيما يأتي:

31) قطعة مستقيمة تطابق $\overline{EC}$

32) زاوية تطابق $\angle ABD$

33) زاوية تطابق $\angle BDC$

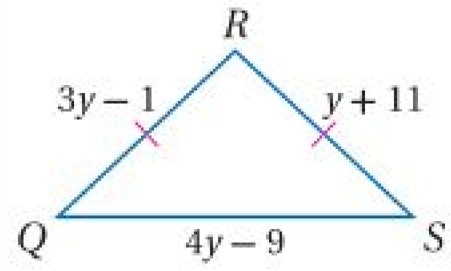
34) قطعة مستقيمة تطابق $\overline{AD}$

اختبار منتصف الفصل

الدروس من 1-3 إلى 4-3

1) **هندسة إحداثيّة:** صنّف $\triangle ABC$ الذي رؤوسه $A(-2, -1), B(-1, 3), C(2, 0)$ إلى مختلف الأضلاع أو متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين. (مهارة سابقة)

2) **اختيار من متعدّد:** أيٌّ مما يأتي يمثل أطوال أضلاع المثلث المتطابق الضلعين QRS؟ (مهارة سابقة)



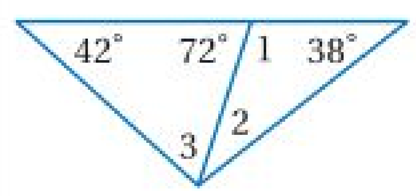
A 17, 17, 15

B 15, 15, 16

C 14, 15, 14

D 14, 14, 16

أوجد كلًّا من قياسات الزوايا الآتية: (الدرس 2-3)

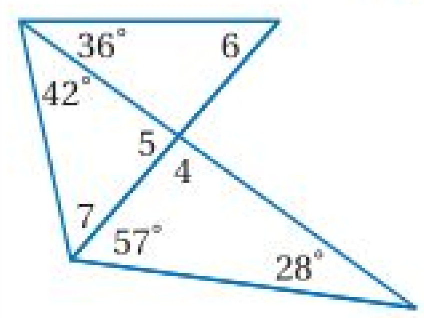


3) $m\angle 1$

4) $m\angle 2$

5) $m\angle 3$

أوجد كلًّا من قياسات الزوايا الآتية: (الدرس 2-3)



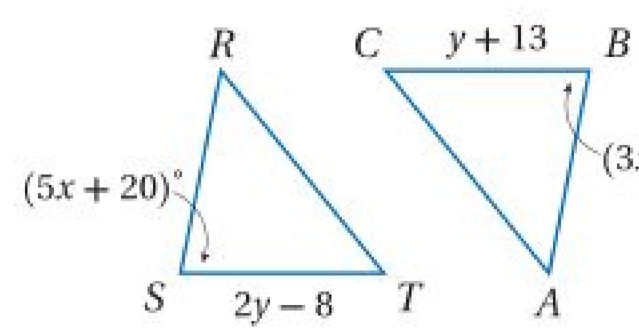
6) $m\angle 4$

7) $m\angle 5$

8) $m\angle 6$

9) $m\angle 7$

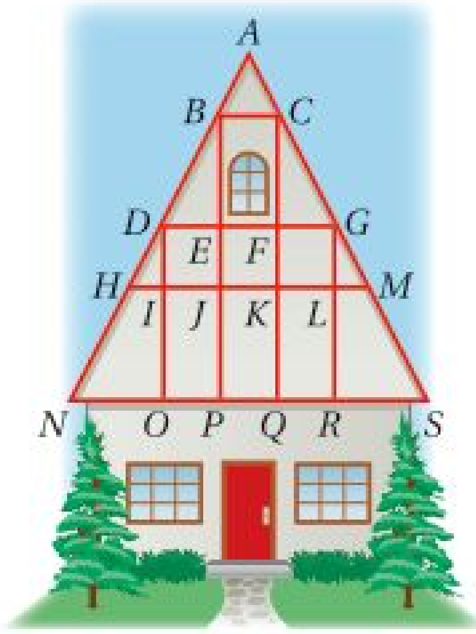
في الشكلين أدناه، إذا علمت أن $\triangle RST \cong \triangle ABC$ فأوجد: (الدرس 3-3)



10) قيمة x.

11) قيمة y.

12) **فن العمارة:** يبيّن الشكل المجاور بيتًا واجهته على شكل الحرف A، وتظهر عليه نقاط مختلفة. افترض أن القطع المستقيمة والزوايا التي تبدو أنها متطابقة هي متطابقة فعلًا. اكتب المثلثات المتطابقة. (الدرس 3-3)



13) **اختيار من متعدد:** إذا كان $\triangle SML \cong \triangle CBX$، فأي عبارة ممّا يأتي صحيحة؟ (الدرس 3-3)

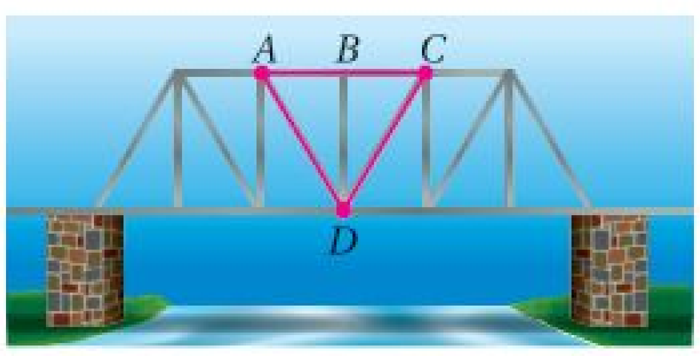
A $\overline{CB} \cong \overline{ML}$

B $\overline{XC} \cong \overline{ML}$

C $\angle X \cong \angle S$

D $\angle XCB \cong \angle LSM$

14) **جسور:** يُظهر الجسر في الشكل أدناه أن $\overline{AC} \perp \overline{BD}$، وأن B نقطة منتصف $\overline{AC}$. ما الطريقة التي يمكن استعمالها لإثبات أنّ $\triangle ABD \cong \triangle CBD$؟ (الدرس 4-3)



حدّد ما إذا كان $\triangle PQR \cong \triangle XYZ$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين: (الدرس 4-3)

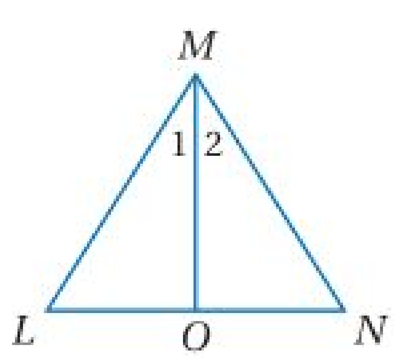
15) $P(3, -5), Q(11, 0), R(1, 6), X(5, 1), Y(13, 6), Z(3, 12)$

16) $P(-3, -3), Q(-5, 1), R(-2, 6), X(2, -6), Y(3, 3), Z(5, -1)$

17) اكتب برهانًا ذا عمودين. (الدرس 4-3)

المعطيات: $\triangle LMN$ متطابق الضلعين. فيه، $\overline{LM} \cong \overline{NM}$ ، $\overline{MO}$ تنصّف $\angle LMN$.

المطلوب: $\triangle MLO \cong \triangle MNO$



5 - 3 إثبات تطابق المثلثات ASA , AAS
Proving Triangles Congruent - ASA, AAS

فيما سبق:
درست إثبات تطابق مثلثين باستعمال SSS , SAS .

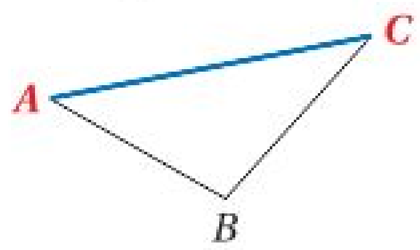
(الدرس 4-3)

والآن:
- أستعمل المسلمة ASA لاختبار التطابق.
- أستعمل النظرية AAS لاختبار التطابق.

المفردات:
الضلع المحصور
Included Side

لماذا؟
تتضمن مسابقات التجديف شخصين أو أكثر يجلسون ووجوههم نحو مؤخرة القارب، ولكلٍّ منهم مجداف. ويتطلب السباق عادة مسطّحًا من الماء طوله 1500 متر على الأقل، ويمكن استعمال المثلثات المتطابقة لقياس المسافات التي يصعب قياسها مباشرة. مثل طول مضمار سباق الزوارق.

مسلّمة التطابق بزاويتين وضلع محصور بينهما ASA: الضلع الواقع بين زاويتين متتاليتين لمضلعٍ يُسمى **الضلع المحصور**، ففي $\triangle ABC$ المجاور، $\overline{AC}$ هو الضلع المحصور بين $\angle A$, $\angle C$.

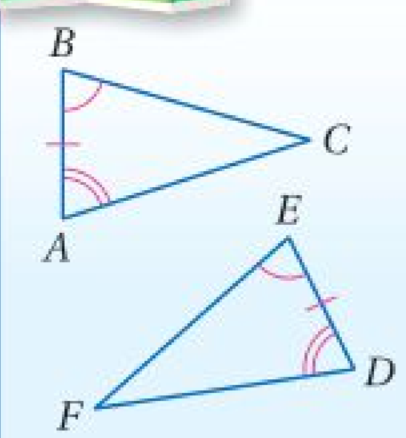


مسلمة 3.3 التطابق بزاويتين وضلع محصور بينهما (ASA)

أضف إلى مطويتك

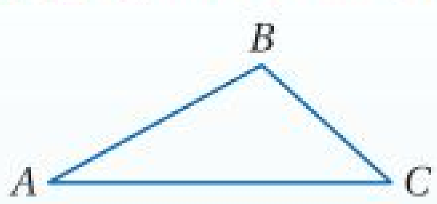
إذا طابقت زاويتان والضلع المحصور بينهما في مثلث نظائرهما في مثلث آخر، فإن المثلثين متطابقان.

مثال: إذا كانت $\angle A \cong \angle D$,
$\overline{AB} \cong \overline{DE}$,
$\angle B \cong \angle E$,
فإنَّ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



إنشاء هندسي
إنشاء مثلث يطابق مثلثًا مرسومًا باستعمال مسلمة التطابق بزاويتين وضلع محصور بينهما (ASA)

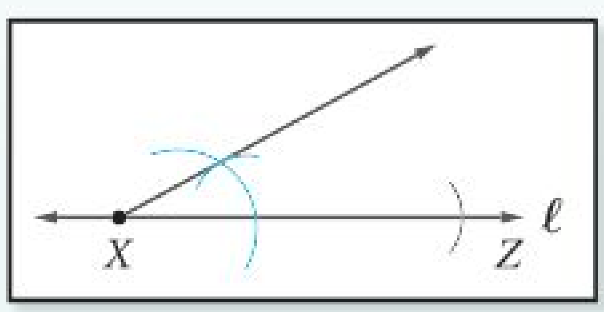
ارسم مثلثًا وسمِّه $\triangle ABC$، ثم استعمل المسلّمة ASA لتنشئ $\triangle XYZ$ الذي يطابق $\triangle ABC$.



الخطوة 1:

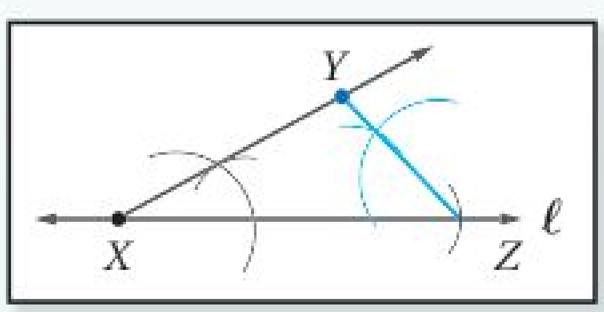
ارسم مستقيمًا ℓ، واختر عليه النقطة X. وأنشئ $\overline{XZ}$ على أن تكون $\overline{XZ} \cong \overline{AC}$.

الخطوة 2:



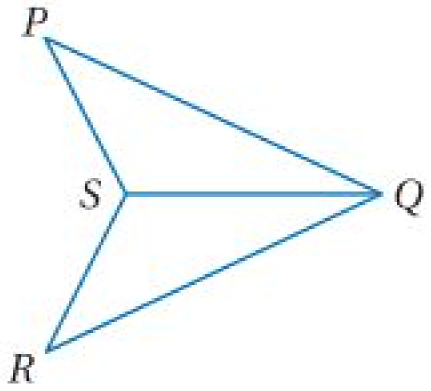
أنشئ زاوية مطابقة لـ $\angle A$ عند النقطة X باستعمال $\overline{XZ}$ ضلعًا للزاوية.

الخطوة 3:



أنشئ زاوية مطابقة لـ $\angle C$ عند النقطة Z باستعمال $\overline{XZ}$ ضلعًا للزاوية، وسمِّ نقطة تقاطع الضلعين الجديدين للزاويتين Y.

مثال 1 استعمال ASA لإثبات تطابق مثلثين



اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{QS}$ تنصّف $\angle PQR$

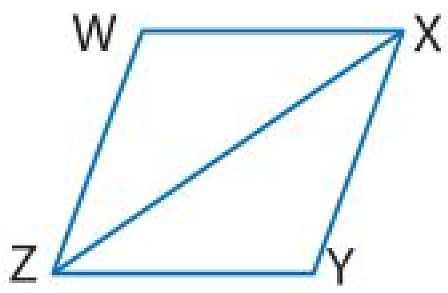
$\angle PSQ \cong \angle RSQ$.

المطلوب: $\triangle PQS \cong \triangle RQS$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{QS}$ تنصّف $\angle PQR$ ، $\angle PSQ \cong \angle RSQ$.	**1)** معطيات
2) $\angle PQS \cong \angle RQS$	**2)** تعريف منصّف الزاوية
3) $\overline{QS} \cong \overline{QS}$	**3)** خاصية الانعكاس للتطابق
4) $\triangle PQS \cong \triangle RQS$	**4)** ASA

تحقق من فهمك



1) اكتب برهاناً حرًّا.

المعطيات: $\overline{ZX}$ تنصّف $\angle WZY$ ، $\overline{XZ}$ تنصّف $\angle YXW$.

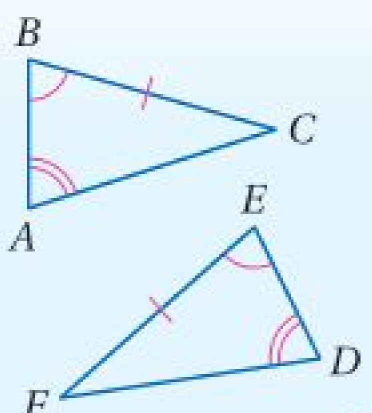
المطلوب: $\triangle WXZ \cong \triangle YXZ$

نظريّة التطابق بزاويتين وضلع غير محصور بينهما AAS: تطابقُ زاويتين وضلع غير محصور يكفي لإثبات أنّ المثلثين متطابقان. وتُعدّ علاقة التطابق هذه نظرية؛ لأنه يمكن إثبات صحتها باستعمال نظرية الزاوية الثالثة.

نظريّة 3.5 التطابق بزاويتين وضلع غير محصور بينهما (AAS)

أضف إلى مطويتك

إذا طابقتْ زاويتان وضلع غير محصور بينهما في مثلث نظائرها في مثلث آخر يكون المثلثان متطابقين.



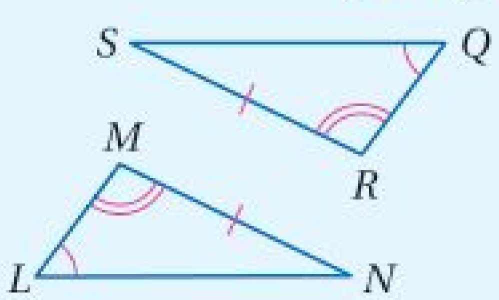
مثال إذا كانت $\angle A \cong \angle D,$

$\angle B \cong \angle E,$

$\overline{BC} \cong \overline{EF},$

فإنَ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

برهان نظرية التطابق بزاويتين وضلع غير محصور بينهما (AAS)



المعطيات: $\angle L \cong \angle Q,\ \angle M \cong \angle R,\ \overline{MN} \cong \overline{RS}$

المطلوب: $\triangle LMN \cong \triangle QRS$

البرهان:

$\angle L \cong \angle Q$ معطى

$\angle M \cong \angle R$ معطى

$\overline{MN} \cong \overline{RS}$ معطى

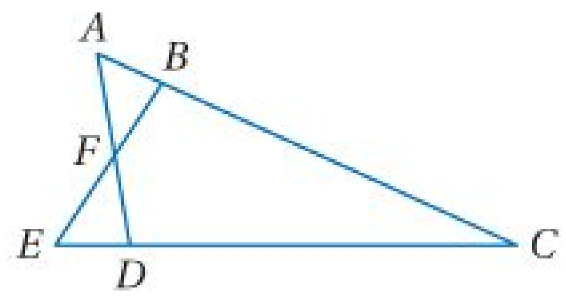
$\angle N \cong \angle S$ نظرية الزاوية الثالثة

$\triangle LMN \cong \triangle QRS$ ASA

إرشادات للدراسة

SSA تطابق ضلعين وزاوية غير محصورة بينهما: بالرغم من أن تطابق ضلعين وزاوية غير محصورة بينهما لا يكفي لإثبات أن المثلثين متطابقان؛ لكن تطابق زاويتين وضلع سواءً أكان محصورًا بينهما أو غير محصور بينهما كافٍ لإثبات تطابق مثلثين.

مثال 2 استعمال AAS لإثبات تطابق مثلثين



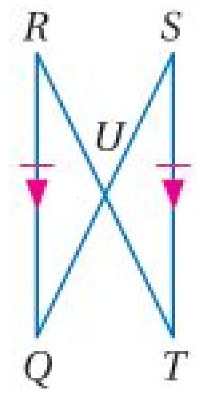
اكتب برهانًا حرًّا.

المعطيات: $\angle DAC \cong \angle BEC,$
$\overline{DC} \cong \overline{BC}$

المطلوب: $\triangle ACD \cong \triangle ECB$

البرهان: بما أن: $\angle DAC \cong \angle BEC, \overline{DC} \cong \overline{BC}$، وأن $\angle C \cong \angle C$ بحسب خاصية الانعكاس،
إذن $\triangle ACD \cong \triangle ECB$ بحسب النظرية AAS .

تحقق من فهمك



2) اكتب برهانًا تسلسليًّا:

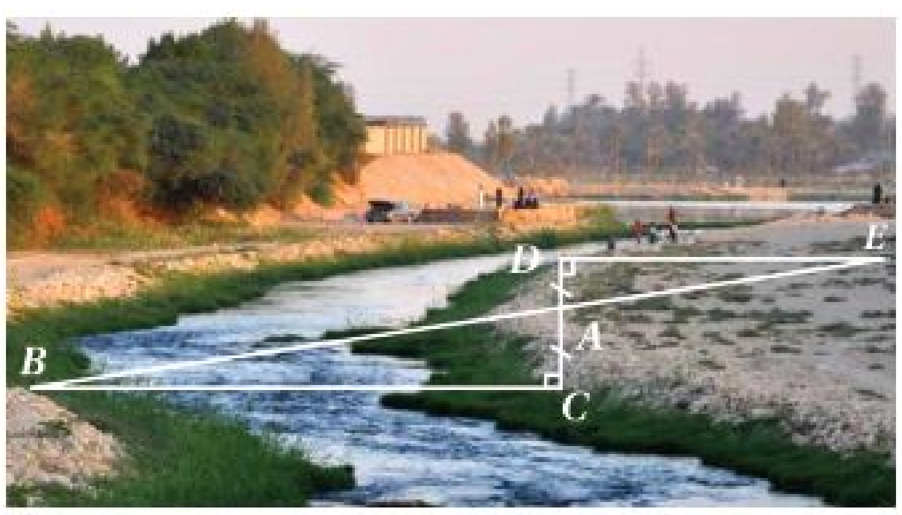
المعطيات: $\overline{RQ} \cong \overline{ST}\ ,\ \overline{RQ} \parallel \overline{ST}$

المطلوب: $\triangle RUQ \cong \triangle TUS$

يمكنك استعمال المثلثات المتطابقة لقياس المسافات التي يصعب قياسها مباشرة.

مثال 3 من واقع الحياة

مسافات: أراد أكرم أن يحسب المسافة بين النقطتين C , B، فقام بتعيين نقطة أخرى D ليستعملها نقطةً مرجعيةً، بحيث تكون العلاقات بين القطع المستقيمة كما في الشكل أدناه. إذا علمت أن طول DE يساوي 8 ft، فاحسب المسافة بين النقطتين C , B.



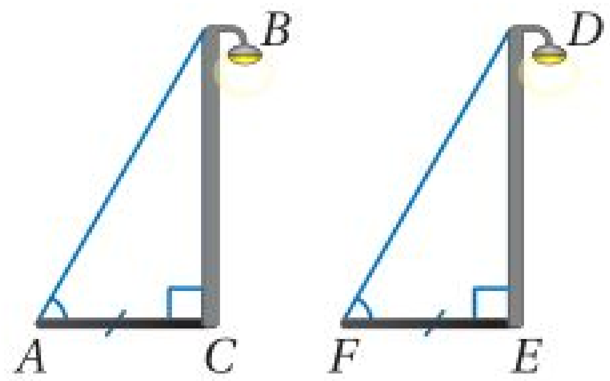
لتحديد طول $\overline{CB}$، يجب أولًا أن نثبت أن المثلثين اللذين أنشأهما أكرم متطابقان.

- بما أن $\overline{CD}$ عمودية على كلٍّ من $\overline{CB}$,$\overline{DE}$ كما هو مبيّن في الشكل، وجميع الزوايا القوائم متطابقة.
  إذن $\angle BCA \cong \angle EDA$.
- $\overline{AC} \cong \overline{AD}$
- $\angle BAC , \angle EAD$ زاويتان متقابلتان بالرأس إذن هما متطابقتان، وبحسب ASA ينتج أن $\triangle BAC \cong \triangle EAD$

وبما أن $\triangle BAC \cong \triangle EAD$ فإن $\overline{CB} \cong \overline{DE}$ ؛ لأن العناصر المتناظرة متطابقة. وبما أن طول $\overline{DE}$ يساوي 8 ft فإن طول $\overline{CB}$ يساوي 8 ft أيضًا، وهي المسافة بين النقطتين C, B.

إرشادات للدراسة

زاوية-زاوية-زاوية
$\angle B, \angle E$ في المثال 3 متطابقتان بحسب نظرية الزاوية الثالثة. إن تطابق الزوايا الثلاث المتناظرة غير كافٍ لإثبات تطابق مثلثين.



تحقق من فهمك

3) استعمل الشكل المجاور الذي يمثل عمودَي كهرباء وظلَّيهما لكتابة برهان حرٍّ يبيِّن أن $\overline{BC} \cong \overline{DE}$

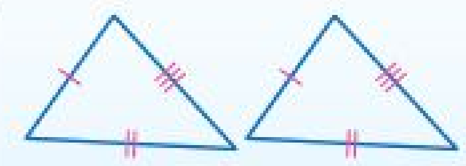
تعلمت طرائق عديدة لإثبات تطابق المثلثات.

ملخص المفاهيم

أضف إلى مطويتك

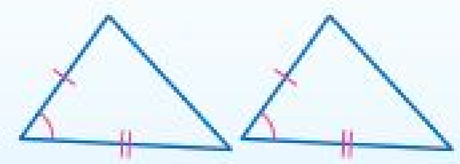
إثبات تطابق المثلثات

SSS



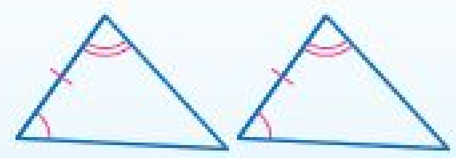
يتطابق مثلثان إذا كانت أضلاعُهما المتناظرة متطابقة.

SAS



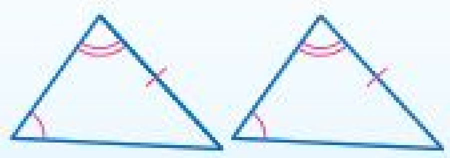
يتطابق المثلثان إذا طابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في المثلث الأول نظائرها في المثلث الآخر.

ASA



يتطابق مثلثان إذا طابقت زاويتان والضلع المحصور بينهما في المثلث الأول نظائرها في المثلث الآخر.

AAS



يتطابق مثلثان إذا طابقت زاويتان وضلع غير محصور بينهما في المثلث الأول نظائرها في المثلث الآخر.

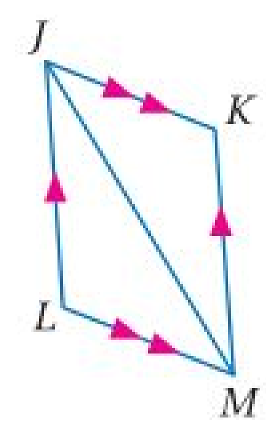
تأكد

المثالان 1, 2 **برهان:** برهن كلًّا مما يأتي باستعمال طريقة البرهان المذكورة:

1) برهان تسلسلي

المعطيات: $\overline{JK} \parallel \overline{LM}$, $\overline{JL} \parallel \overline{KM}$

المطلوب: إثبات أن: $\triangle JML \cong \triangle MJK$

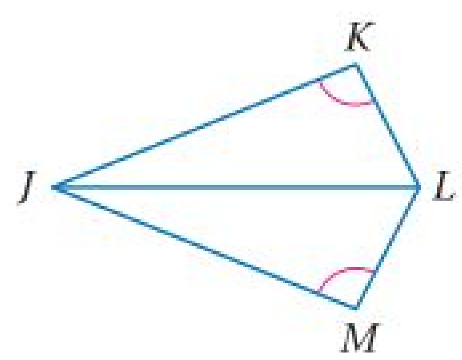


2) برهان حرّ

المعطيات: $\angle K \cong \angle M$,

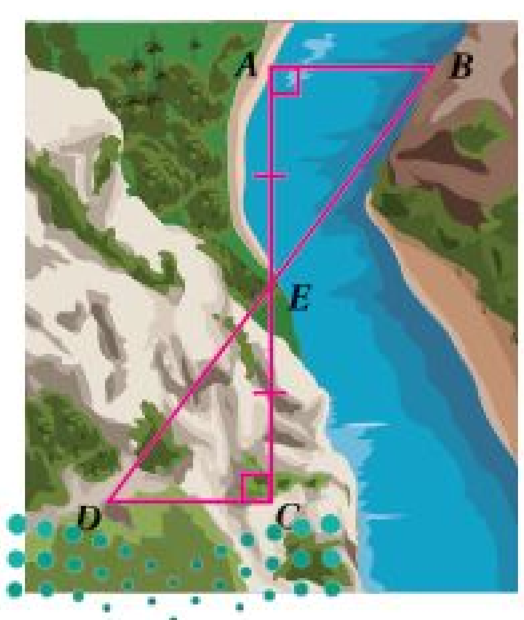
$\overline{JL}$ تنصف $\angle KLM$.

المطلوب: إثبات أن: $\triangle JKL \cong \triangle JML$



المثال 3

3) **بناء جسور:** يحتاج مسّاح إلى إيجاد المسافة بين النقطتين A, B المبينتين في الشكل المجاور لبناء جسر فوق النهر. فوضعَ وتدًا عند A، ووضع زميله وتدًا عند B في الجهة المقابلة، ثمّ عيّن المسّاح النقطة C في جهة A، بحيث كانت $\overline{CA} \perp \overline{AB}$. ووضع وتدًا رابعًا عند E، التي هي نقطة منتصف $\overline{CA}$. وأخيرًا وضع وتدًا عند النقطة D، بحيث كان $\overline{CD} \perp \overline{CA}$ ، والنقاط D, E, B تقع على مستقيمٍ واحدٍ.

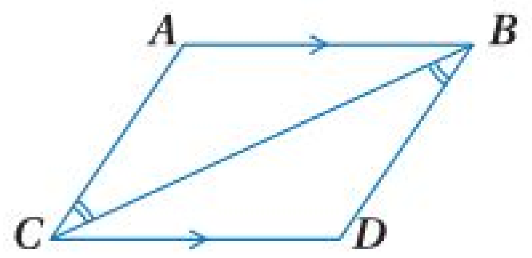


a) وضّح كيف يمكن أن يستعمل المسّاح المثلثين المتكونين لإيجاد المسافة بين النقطتين A, B.

b) إذا كان: $AC = 160\text{ m}$, $DC = 60\text{ m}$, $DE = 100\text{ m}$، فأوجد المسافة بين النقطتين A, B . ووضّح إجابتك.

تدرب وحل المسائل

المثال 1 **برهان:** على الشكل المقابل:

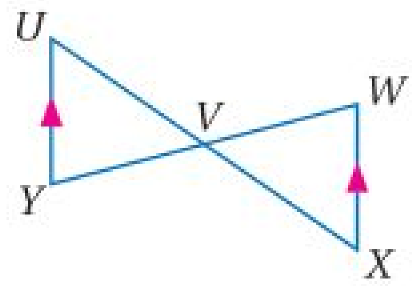


4) **المعطيات:** $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

$\angle CBD \cong \angle BCA$

المطلوب: $\triangle CAB \cong \triangle BDC$

المثال 2 **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.

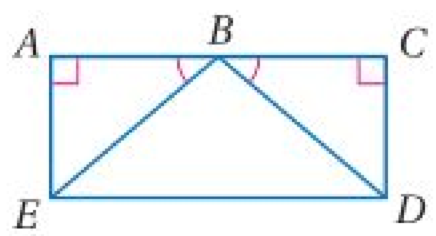


5) **المعطيات:** V نقطة منتصف $\overline{WY}$

$\overline{XW} \parallel \overline{UY}$

المطلوب: $\triangle UVY \cong \triangle XVW$

6) **برهان:** اكتب برهانًا تسلسليًّا.

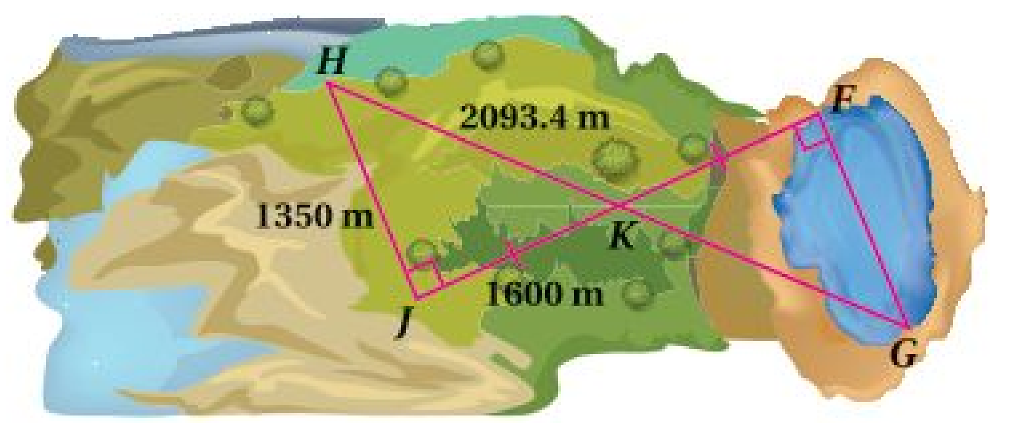


المعطيات: $\angle A$, $\angle C$ زاويتان قائمتان.

$\angle ABE \cong \angle CBD$, $\overline{AE} \cong \overline{CD}$

المطلوب: $\overline{BE} \cong \overline{BD}$

المثال 3 **7)** **سباق زوارق:** يرغب المشرفون في إقامة سباق تجديفٍ في بحيرة، لكنهم غير متأكدين ممَّا إذا كان طول البحيرة كافيًا لإجراء السباق أم لا، ولقياس طول البحيرة حدّدوا رؤوس المثلثين المبينين في الشكل أدناه، ووجدوا أطوال أضلاع $\triangle HJK$، استعمل المعلومات الواردة في فقرة لماذا للإجابة عن الفقرتين a, b

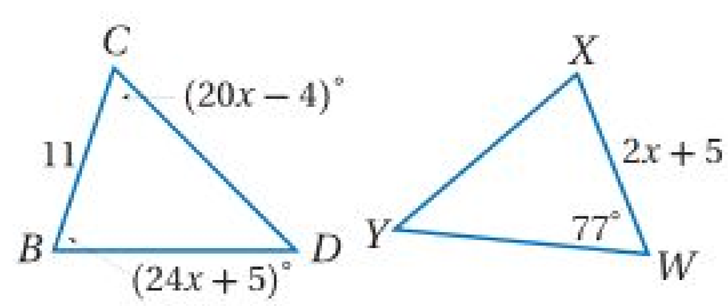


a) وضّح كيف يستعمل المشرفون على السباق المثلثين المتكونين لتقدير المسافة FG عبر البحيرة.

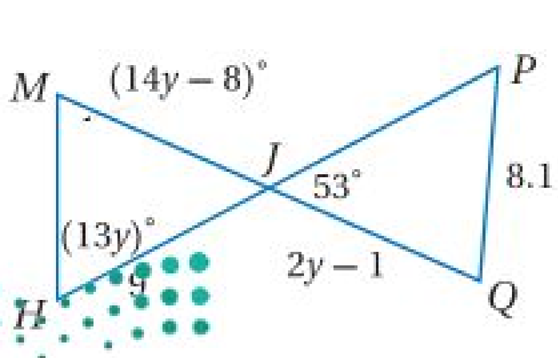
b) هل طول البحيرة كافٍ لإجراء سباق الزوارق باستعمال القياسات المعطاة؟ وضّح إجابتك.

جبر: أوجد قيمة المتغير التي تجعل المثلثين متطابقين في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

8) $\triangle BCD \cong \triangle WXY$



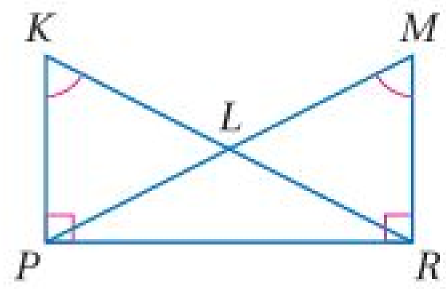
9) $\triangle MHJ \cong \triangle PQJ$



برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين

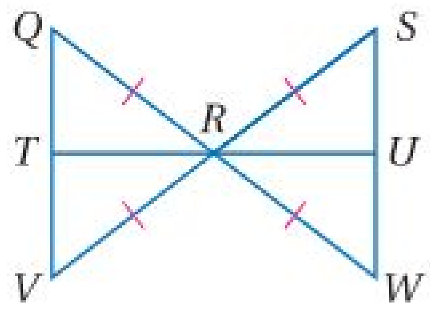
10) **المعطيات:** $\angle K \cong \angle M,\ \overline{KP} \perp \overline{PR},$
$\overline{MR} \perp \overline{PR}$

المطلوب: $\angle KPL \cong \angle MRL$



11) **المعطيات:** $\overline{QR} \cong \overline{SR} \cong \overline{WR} \cong \overline{VR}$

المطلوب: $\overline{QT} \cong \overline{WU}$



الربط مع الحياة

يعتمد حجم الدراجة الهوائية على طول أنبوب المقعد فيها. ويتراوح هذا الطول في الدراجات الهوائية للشباب ما بين **12 in** إلى **26 in**. وتعتبر ملائمة للراكب إذا استطاع أن يركب الدراجة بسهولة وهو واقف على الأرض.

12) **دراجات هوائية:** يشكِّل أنبوب مقعد الدراجة مثلثًا مع كلٍّ من دعامتَي السلسلة والمقعد. إذا كانت كل دعامة مقعد تشكّل زاوية قياسها $68°$ مع دعامة السلسلة المناظرة لها، وكل دعامة سلسلة تشكل زاوية قياسها $44°$ مع أنبوب المقعد، فبيّنْ أن دعامتَي المقعد لهما الطول نفسه.

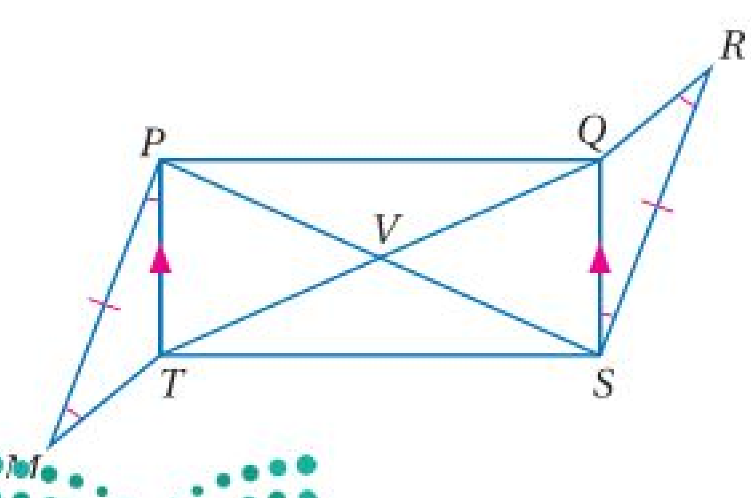
مسائل مهارات التفكير العليا

13) **مسألة مفتوحة:** ارسم مثلثين يمكن إثبات تطابقهما باستعمال مسلّمة ASA، وسمِّهما.

14) **اكتشف الخطأ:** يقول عمر إنه لا يمكن إثبات تطابق مثلثين بتطابق ثلاث زوايا AAA، بينما يقول حسن إنه بإمكانه إثبات هذا التطابق، أيُّهما كانت إجابته صحيحة؟ وضح إجابتك.

15) **تبرير:** أوجد مثالًا مضادًّا يوضّح لماذا لا تستعمل حالة تطابق ضلعين وزاوية غير محصورة بينهما SSA؛ لإثبات تطابق مثلثين.

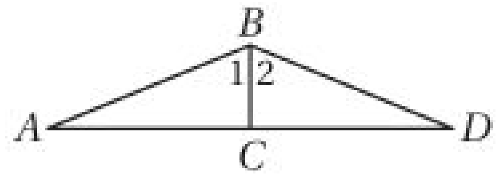
16) **تحدٍّ:** باستعمال المعلومات المعطاة في الشكل المجاور، اكتب برهانًا تسلسليًّا لإثبات أن $\triangle PVQ \cong \triangle SVT$.



17) **اكتب:** لخّص الطرائق الواردة في الدروس من 3–3 إلى 3–5؛ لإثبات تطابق المثلثات في جدول موضحًا متى تُستعمل كل طريقة.

تدريب على اختبار

18) في الشكل أدناه، $\overline{BC} \perp \overline{AD}$, $\angle 1 \cong \angle 2$.



أي نظرية أو مسلّمة مما يأتي يمكن استعمالها لإثبات أن $\triangle ABC \cong \triangle DBC$؟

A) AAS
B) ASA
C) SAS
D) SSS

19) ما قيمة $\sqrt{121 + 104}$ ؟

A) 15
B) 21
C) 125
D) 225

مراجعة تراكمية

20) إذا علمت أن: $A(6, 4), B(1, -6), C(-9, 5), X(0, 7), Y(5, -3), Z(15, 8)$ ، فبيّن ما إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ أم لا. ووضّح إجابتك. (الدرس 3-4)

21) **جبر:** إذا كان: $\triangle RST \cong \triangle JKL, RS = 7, ST = 5, RT = 9 + x, JL = 2x - 10, JK = 4y - 5$ ، فارسم شكلًا يمثّل المثلثين المتطابقين، وسمّه. ثمّ أوجد قيمة كلٍّ من x , y . (الدرس 3-3)

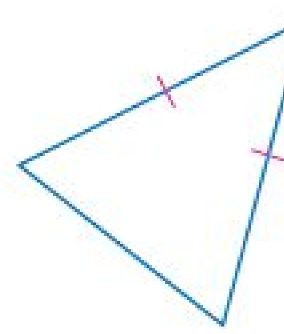
22) أكمل جدول الصواب المجاور (مهارة سابقة)

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
F	T		
T	T		
F	F		
T	F		

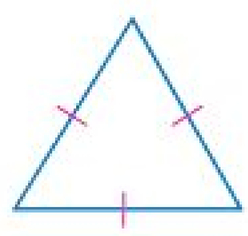
استعد للدرس اللاحق

صنف كلًّا من المثلثين الآتيين وفقًا لأضلاعه:

23)



24)



رابط الدرس الرقمي

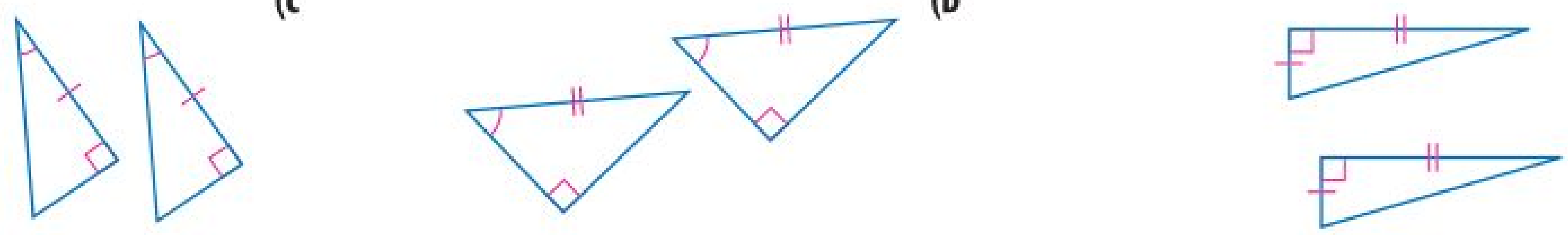
www.ien.edu.sa

توسّع

3-5 معمل الهندسة
تطابق المثلثات القائمة
Congruence in Right Triangles

في الدرسين 5 - 3 ,4 - 3 تعلمت نظريات ومسلّمات تُثبت تطابق المثلثات، فكيف تطبّق هذه النظريات والمسلّمات على المثلثات القائمة؟

ادرس كل زوج من المثلثات القائمة الآتية:



حلّل:

1) هل يتطابق كل زوج من المثلثات؟ إن كان ذلك صحيحًا، فأي نظرية تطابق أو مسلمة استعملت؟

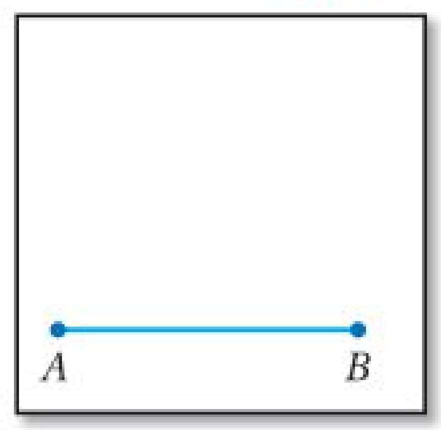
2) أعد كتابة قواعد التطابق في التمرين 1 باستعمال الساق (L)، أو الوتر (H) ليحل محل الضلع (S). واحذف A لكل زاوية قائمة؛ لأن كل مثلث قائم الزاوية يحوي زاوية قائمة. وجميع الزوايا القوائم متطابقة.

3) **خمّن:** إذا علمت أن ضلعَي الزاوية القائمة المتناظرين في المثلثات القائمة متطابقان، فما المعلومات الأخرى الضرورية حتى تؤكد تطابق المثلثات؟ وضّح إجابتك.

في الدرس 5–3 درست أن الحالة SSA ليست كافية لتحديد تطابق مثلثين، فهل يمكن استعمالها لبرهنة تطابق مثلثين قائمين؟

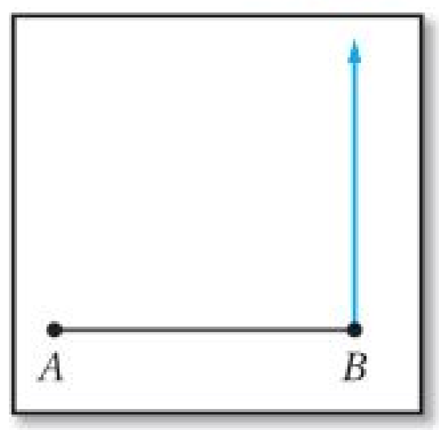
نشاط SSA والمثلثات القائمة

الخطوة 1:



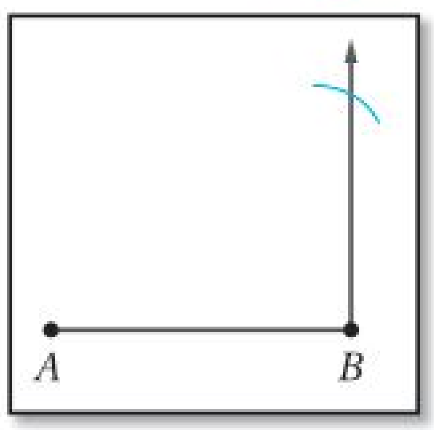
ارسم $\overline{AB}$ على أن يكون $AB = 6$ cm

الخطوة 2:



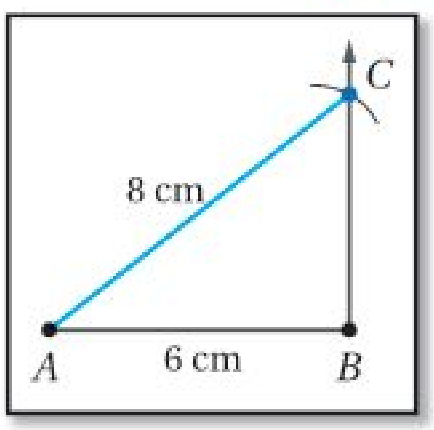
استعمل المنقلة لرسم نصف مستقيم من B عمودي على $\overline{AB}$.

الخطوة 3:



افتح الفرجار فتحة تساوي 8 cm وركّزه عند النقطة A، ثمّ ارسم قوسًا يقطع نصف المستقيم.

الخطوة 4:



سمّ نقطة التقاطع C، ثم ارسم $\overline{AC}$ لإكمال $\triangle ABC$.

حلّل:

4) هل يؤدي النموذج إلى رسم مثلث وحيد؟

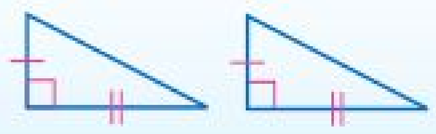
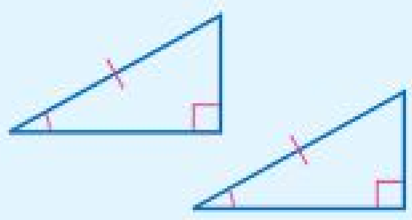
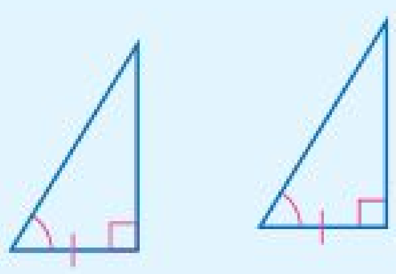
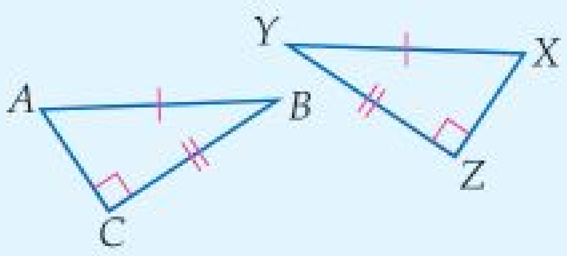
5) هل يمكنك استعمال طولَي الوتر والضلع لتبيّن تطابق مثلثين قائمين؟

6) خمّن حالة SSA الخاصة بالمثلثات القائمة الزاوية.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

النشاط السابق يبيّن أربع طرائق لإثبات تطابق المثلثات القائمة وهي:

نظريات ومسلّمات — **تطابق المثلثات القائمة** — أضف إلى مطويتك

نظرية 3.6: تطابق الساقين LL إذا طابق ساقان في مثلث قائم نظيريهما في مثلث قائم آخر، فإن المثلثين متطابقان.	
نظرية 3.7: تطابق وتر وزاوية حادة HA إذا طابق وتر وزاوية حادة في مثلث قائم الوتر والزاوية الحادة المناظرة في مثلث قائم آخر، فإن المثلثين متطابقان.	
نظرية 3.8: تطابق ساق وزاوية حادة LA إذا طابق ساق وزاوية حادة في مثلث قائم الساق المناظرة والزاوية الحادة المناظرة في مثلث قائم آخر، فإن المثلثين متطابقان.	
نظرية 3.9: تطابق وتر وساق HL إذا طابق وتر وساق في مثلث قائم وترًا وساقًا في مثلث قائم آخر، فإن المثلثين متطابقان.	

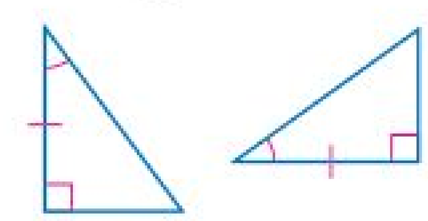
قراءة الرياضيات

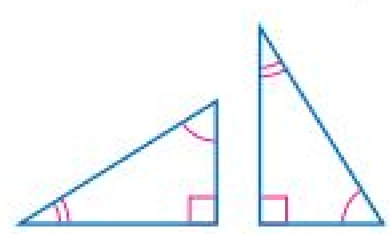
اختصارات رياضية

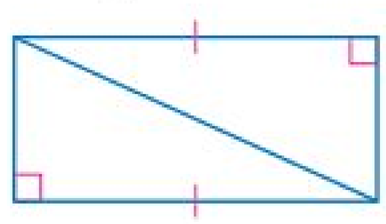
L هي اختصار لـ **leg** أو ساق، وَ H اختصار لـ **Hypotenuse** أو وتر، وَ A اختصار لـ **Angle** أو زاوية.

تمارين:

حدّد ما إذا كان كل زوج من المثلثات الآتية متطابقين أم لا، وإذا كانت الإجابة "نعم"، فاذكر المسلمة أو النظرية التي استعملتها:

7) 

8) 

9) 

برهان: اكتب برهانًا لكلٍّ مما يأتي:

10) النظرية 3.7

11) النظرية 3.8 (إرشاد: توجد حالتان ممكنتان)

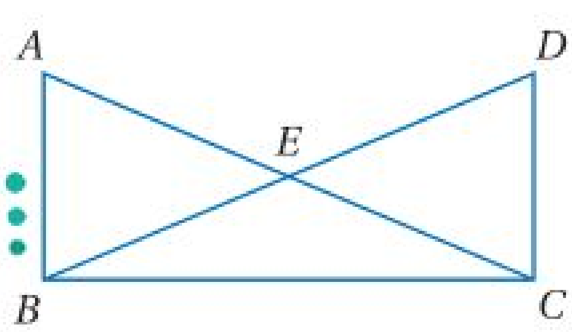
12) النظرية 3.9 (إرشاد: استعمل نظرية فيثاغورس)

استعمل الشكل المجاور للإجابة عن السؤال 13.

13) **المعطيات:** $\overline{AB} \perp \overline{BC}, \overline{DC} \perp \overline{BC}$

$\overline{AC} \cong \overline{BD}$

المطلوب: $\overline{AB} \cong \overline{DC}$



3-6

المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع
Isosceles and Equilateral Triangles

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درست المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع.

(الدرس 3-1)

والآن:

- أستعمل خصائص المثلثات المتطابقة الضلعين.
- أستعمل خصائص المثلثات المتطابقة الأضلاع.

المفردات:

ساقا المثلث المتطابق الضلعين
legs of an isosceles triangle

زاوية الرأس
vertex angle

زاويتا القاعدة
base angles

لماذا؟

للعبة القطار السريع في مدينة الألعاب دعائم مثلثية بين المسارات لتقويتها وتثبيتها، والدعائم المثلثية الظاهرة في الصورة عبارة عن مثلثات متطابقة الضلعين.

خصائص المثلث المتطابق الضلعين: تذكّر أن المثلثات المتطابقة الضلعين لها ضلعان متطابقان على الأقل، وأن لعناصرها أسماءً خاصة.

حيث يُسمّى الضلعان المتطابقان **الساقين**، والزاوية التي ضلعاها الساقان تُسمّى **زاوية الرأس**. ويُسمى ضلع المثلث المقابل لزاوية الرأس القاعدةَ. والزاويتان المكونتان من القاعدة والضلعين المتطابقين تُسميان **زاويتَي القاعدة**.

ففي الشكل المجاور، $\angle 1$ هي زاوية الرأس، وزاويتا القاعدة هما $\angle 2$, $\angle 3$.

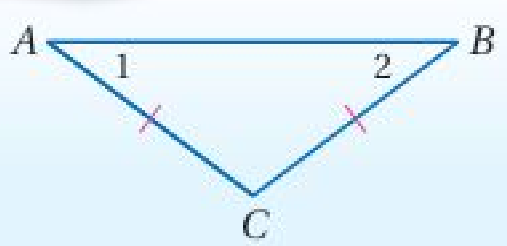
نظريات — المثلث المتطابق الضلعين

أضف إلى مطويتك

3.10 نظرية المثلث المتطابق الضلعين

إذا تطابق ضلعان في مثلث، فإن الزاويتين المقابلتين لهما متطابقتان.

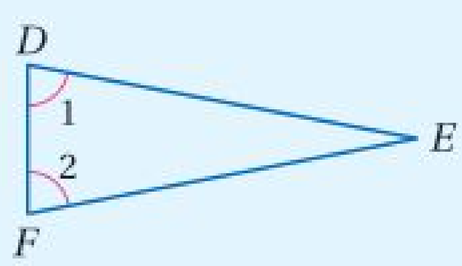
مثال: إذا كان $\overline{AC} \cong \overline{BC}$، فإن $\angle 2 \cong \angle 1$.



3.11 عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين

إذا تطابقت زاويتان في مثلث، فإن الضلعين المقابلين لهما متطابقان.

مثال: إذا كان $\angle 2 \cong \angle 1$ ، فإن $\overline{FE} \cong \overline{DE}$



ستبرهن النظرية 3.11 في السؤال 24

مثال 1 القطع المستقيمة المتطابقة والزوايا المتطابقة

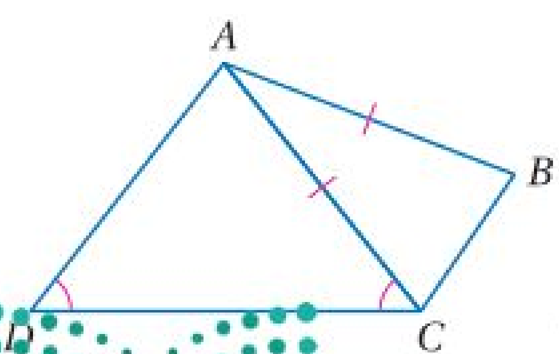
a) سمّ زاويتين متطابقتين غير المشار إلى تطابقهما في الشكل.

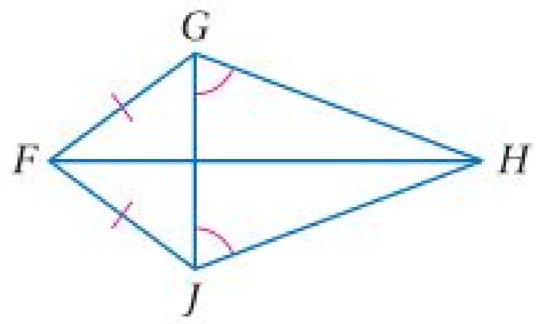
$\angle ACB$ تقابل $\overline{AB}$، $\angle B$ تقابل $\overline{AC}$ ؛

لذا فإن $\angle ACB \cong \angle B$.

b) سمّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين غير المشار إلى تطابقهما في الشكل.

$\overline{AD}$ تقابل $\angle ACD$، $\overline{AC}$ تقابل $\angle D$ ، لذا فإن $\overline{AD} \cong \overline{AC}$.





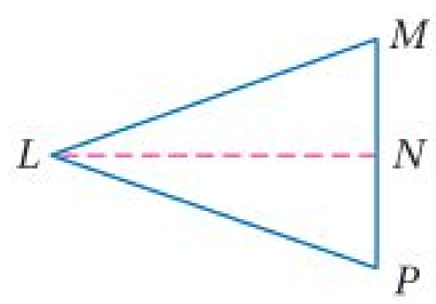
تحقق من فهمك

1A) سمِّ زاويتين متطابقتين غير مشار إلى تطابقهما في الشكل.

1B) سمِّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين غير المشار إلى تطابقهما في الشكل.

لإثبات نظرية المثلث المتطابق الضلعين، ارسم مستقيمًا مساعدًا، ثم استعمل المثلثين الناتجين.

البرهان — نظرية المثلث المتطابق الضلعين



المعطيات: في $\triangle LMP$ ، $\overline{LM} \cong \overline{LP}$

المطلوب: إثبات أن: $\angle M \cong \angle P$

البرهان:

العبارات	المبرِّرات
1) افترض أن N نقطة منتصف $\overline{MP}$.	1) كل قطعة مستقيمة لها نقطة منتصف واحدة.
2) ارسم قطعة مساعدة $\overline{LN}$.	2) كل نقطتين تحدِّدان مستقيمًا.
3) $\overline{PN} \cong \overline{NM}$	3) نظرية نقطة المنتصف.
4) $\overline{LN} \cong \overline{LN}$	4) خاصية الانعكاس في التطابق.
5) $\overline{LM} \cong \overline{LP}$	5) معطًى.
6) $\triangle LMN \cong \triangle LPN$	6) مسلّمة التطابق بثلاثة أضلاع.
7) $\angle M \cong \angle P$	7) العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقةً.

خصائص المثلث المتطابق الأضلاع: نظرية المثلث المتطابق الضلعين تقود إلى نتيجتين حول زوايا المثلث المتطابق الأضلاع.

مراجعة المفردات

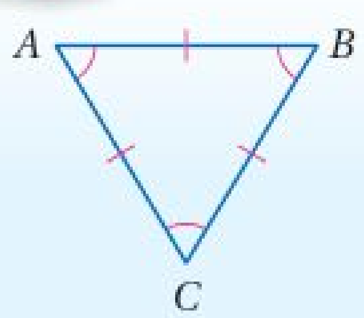
المثلث المتطابق الأضلاع: هو مثلث أضلاعه الثلاثة متطابقة.

نتيجتان — المثلث المتطابق الأضلاع

أضف إلى مطويتك

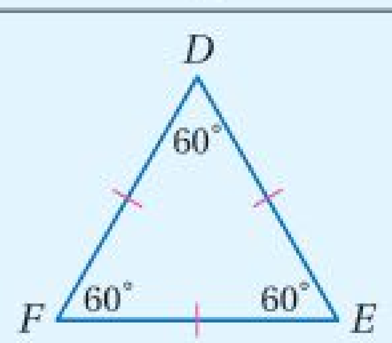
3.3 يكون المثلث متطابق الأضلاع إذا وفقط إذا كان متطابق الزوايا.

مثال: $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$ ،
إذا وفقط إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$



3.4 قياس كل زاوية في المثلث المتطابق الأضلاع $60°$.

مثال: إذا كان $\overline{DE} \cong \overline{EF} \cong \overline{FD}$ ،
فإن $m\angle E = m\angle F = m\angle D = 60°$.

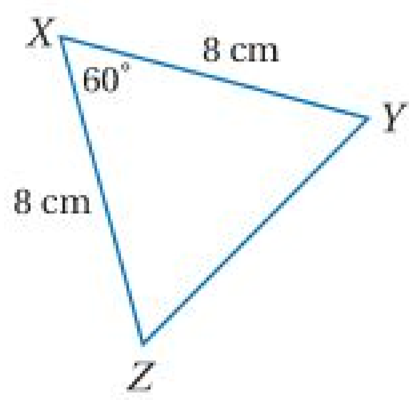


ستبرهن النتيجتين 3.3, 3.4 في السؤالين 22, 23

مثال 2 إيجاد القياسات المجهولة

أوجد كل قياس من القياسات الآتية:

a) $m\angle Y$

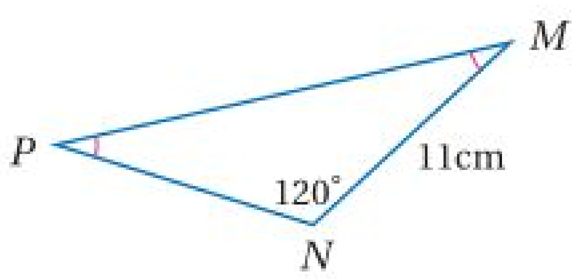


بما أن $XY = XZ$ ، $\overline{XY} \cong \overline{XZ}$ ، وباستعمال نظرية المثلث المتطابق الضلعين، تكون زاويتا القاعدة Z, Y متطابقتين؛ لذا فإن $m\angle Z = m\angle Y$. استعمل نظرية مجموع زوايا المثلث لإيجاد $m\angle Y$.

$m\angle X + m\angle Y + m\angle Z = 180°$	نظرية مجموع زوايا المثلث
$60° + m\angle Y + m\angle Y = 180°$	$m\angle X = 60°, m\angle Z = m\angle Y$
$60° + 2(m\angle Y) = 180°$	بسّط
$2(m\angle Y) = 120°$	اطرح 60 من كل طرف
$m\angle Y = 60°$	اقسم كل طرف على 2

b) YZ

$m\angle Z = m\angle Y$ ؛ لذا بالتعويض فإن $m\angle Z = 60°$، وبما أن $m\angle X = 60°$ ، فإن قياس كل زاوية من الزوايا الثلاث $60°$ ؛ لذا فالمثلث متطابق الزوايا. وهو متطابق الأضلاع أيضًا، لذا فإن $XY = XZ = ZY$. وبما أن $XY = 8\,\text{cm}$ ، إذن $YZ = 8\,\text{cm}$



تحقق من فهمك

2A) $m\angle M$ **2B)** PN

إرشادات للدراسة

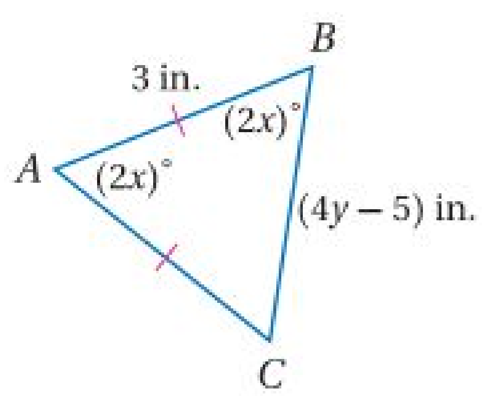
المثلثات المتطابقة الضلعين

كما اكتشفت في المثال 2 ، أي مثلث متطابق الضلعين فيه زاوية قياسها $60°$ يكون مثلثًا متطابق الأضلاع.

يمكنك استعمل خصائص المثلثات المتطابقة الأضلاع والجبر لتجد القيم المجهولة.

مثال 3 إيجاد القيم المجهولة

جبر: أوجد قيمة كل متغير في الشكل المجاور.

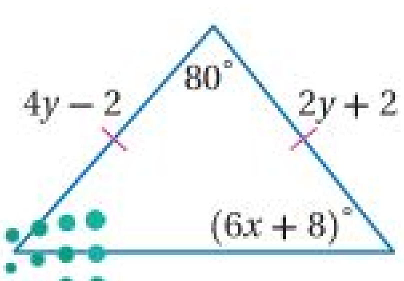


بما أن $m\angle A = m\angle B$؛ أي أن $\angle A \cong \angle B$ فإن $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ باستعمال عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين؛ وبذلك فإن أضلاع المثلث متطابقة. وقياس كل زاوية فيه تساوي $60°$ ؛ لذا فإن $2x = 60, x = 30$.

وبما أن المثلث متطابق الأضلاع، إذن جميع الأضلاع متطابقة.

$AB = BC$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$3 = 4y - 5$	عوّض
$8 = 4y$	اجمع 5 إلى كلٍّ من الطرفين
$2 = y$	اقسم كل طرف على 4

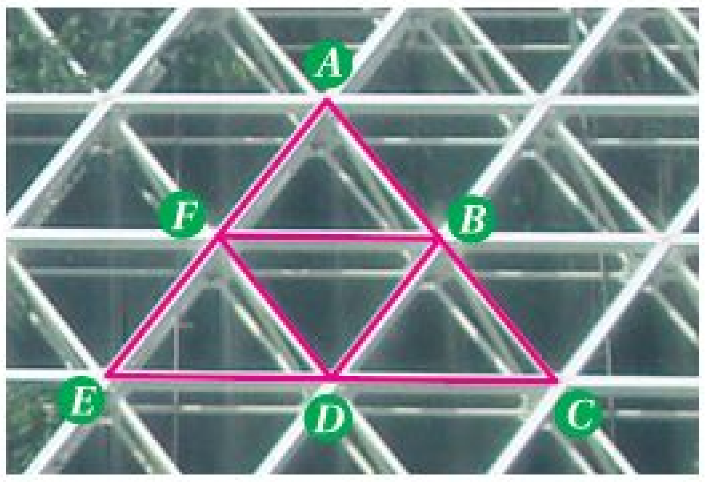
تحقق من فهمك



3) أوجد قيمة كلٍّ من المتغيرين في الشكل المجاور .

مثال 4 من واقع الحياة — تطبيق تطابق المثلثات

بناء: في الصورة المجاورة. $\triangle ACE$ مثلث متطابق الأضلاع. F نقطة منتصف $\overline{AE}$، D نقطة منتصف $\overline{EC}$، B نقطة منتصف $\overline{CA}$. برهن أن $\triangle FBD$ متطابق الأضلاع.



المعطيات: $\triangle ACE$ متطابق الأضلاع، و F نقطة منتصف $\overline{AE}$، و D نقطة منتصف $\overline{EC}$،و B نقطة منتصف $\overline{CA}$

المطلوب: إثبات أن: $\triangle FBD$ متطابق الأضلاع.

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\triangle ACE$ متطابق الأضلاع.	1) معطى
2) F نقطة منتصف $\overline{AE}$، و D نقطة منتصف $\overline{EC}$، و B نقطة منتصف $\overline{CA}$.	2) معطى
3) $\angle A \cong \angle C \cong \angle E$	3) المثلث المتطابق الأضلاع متطابق الزوايا
4) $AF = FE, ED = DC, CB = BA$	4) تعريف نقطة المنتصف
5) $\overline{CA} \cong \overline{AE} \cong \overline{EC}$	5) تعريف المثلث المتطابق الأضلاع
6) $CA = AE = EC$	6) تعريف التطابق
7) $\frac{1}{2}CA = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}BC$	7) خاصية الضرب
8) $AF = FE = ED = DC = AB = BC$	8) بالتعويض
9) $\overline{AF} \cong \overline{ED} \cong \overline{CB}, \overline{FE} \cong \overline{DC} \cong \overline{BA}$	9) تعريف التطابق
10) $\triangle AFB \cong \triangle EDF \cong \triangle CBD$	10) مسلّمة SAS
11) $\overline{DF} \cong \overline{FB} \cong \overline{BD}$	11) العناصر المتناظرة متطابقة.
12) $\triangle FBD$ متطابق الأضلاع.	12) تعريف المثلث المتطابق الأضلاع

الربط مع الحياة

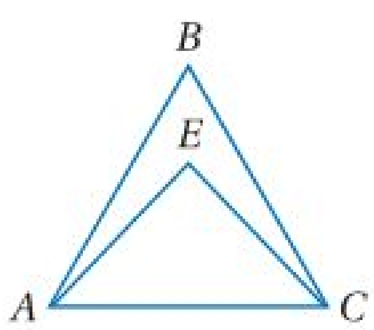
استعمل المهندس المعماري في هذا المبنى قضبانًا حديديّةً تم تثبيتها على شكل مثلثات لتزيد المبنى دعمًا وقوةً مراعيًا في ذلك الجوانب الجمالية للبناء أيضًا.

تحقق من فهمك

4) في الصورة أعلاه إذا علمت أن $\triangle ACE$ متطابق الأضلاع، فيه: $\overline{FD} \parallel \overline{BC}$، $\overline{BD} \parallel \overline{EF}$، و D نقطة منتصف $\overline{EC}$، فأثبت أن $\triangle FED \cong \triangle BDC$.

تأكد

المثال 1 باستعمال الشكل المجاور أجب عن السؤالين الآتيين:

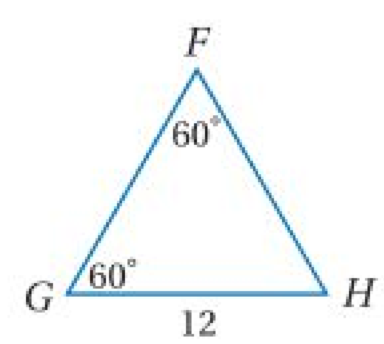


1) إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CB}$، فسمّ زاويتين متطابقتين.

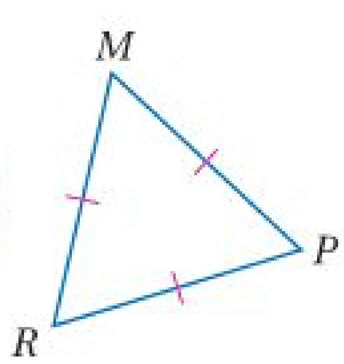
2) إذا كان $\angle EAC \cong \angle ECA$ ، فسمّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

المثال 2 أوجد كلًّا من القياسين الآتيين:

3) FH

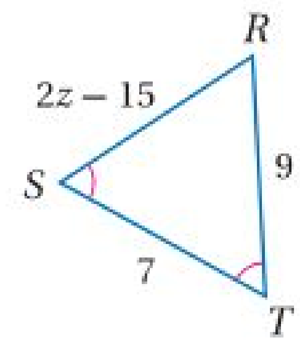


4) $m\angle MRP$

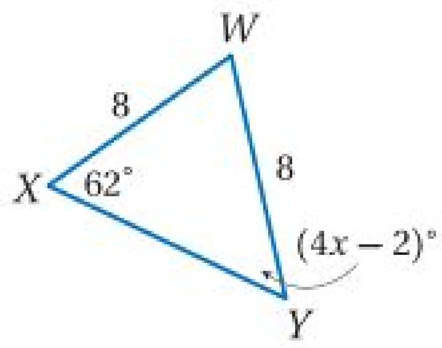


المثال 3 **جبر:** أوجد قيمة المتغير في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

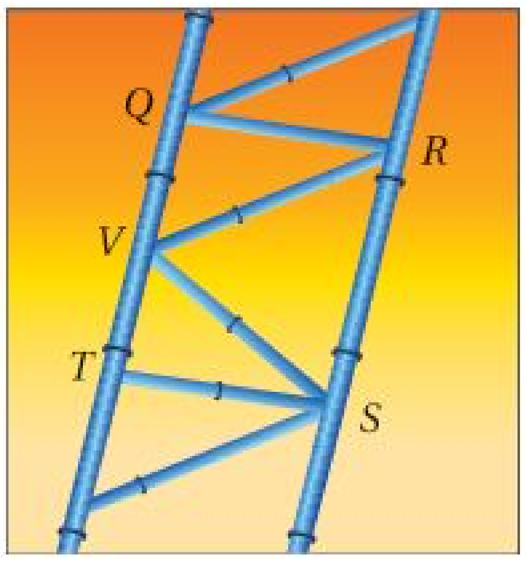
5)



6)



المثال 4 **7) القاطرة السريعة:** الشكل المجاور يظهر جزءًا من سكة القاطرة السريعة المبينة في فقرة "لماذا؟" مكوّنة من مثلثات.

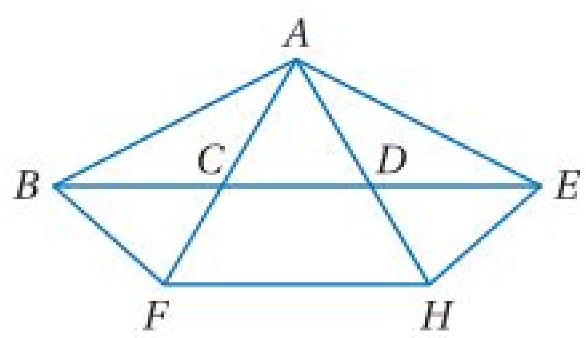


a) إذا كان $\overline{QR}$، $\overline{ST}$ عموديَّان على $\overline{QT}$، وَ $\triangle RVS$ متطابق الضلعين قاعدته $\overline{RS}$، $\overline{SR} \parallel \overline{QT}$، فأثبت أن $\triangle RQV \cong \triangle STV$.

b) إذا كان $QR = 2$ m، $VR = 2.5$ m، فأوجد البعد بين المستقيمين $\overleftrightarrow{ST}$ وَ $\overleftrightarrow{QR}$. برِّر إجابتك.

تدرب وحل المسائل

المثال 1 باستعمال الشكل المجاور أجب عن الأسئلة 11–8 :



8) إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{AE}$، فسمّ زاويتين متطابقتين.

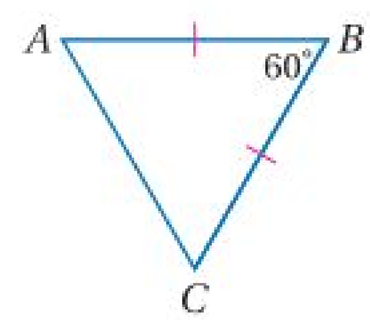
9) إذا كانت $\angle ABF \cong \angle AFB$، فسمّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

10) إذا كانت $\overline{CA} \cong \overline{DA}$، فسمّ زاويتين متطابقتين.

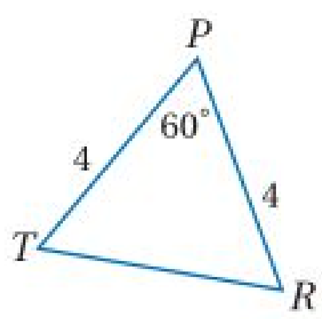
11) إذا كانت $\angle DAE \cong \angle DEA$، فسمّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

المثال 2 أوجد كلًّا من القياسين الآتيين:

12) $m\angle BAC$

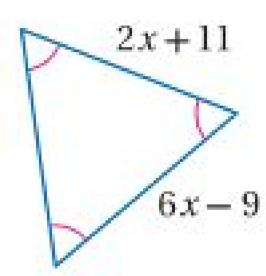


13) TR

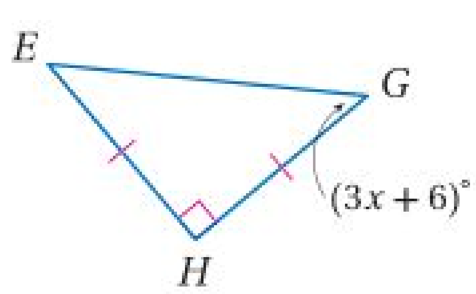


المثال 3 **جبر:** أوجد قيمة المتغير في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

14)



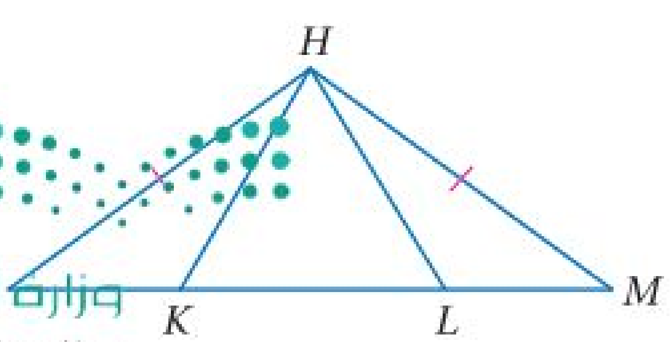
15)

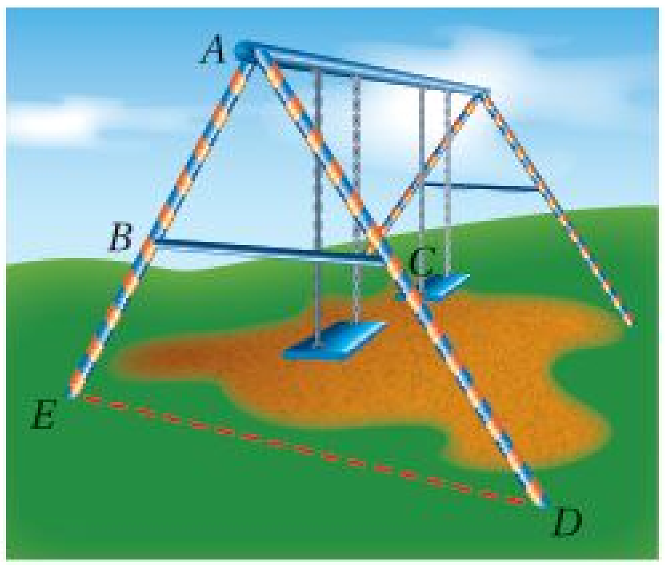


المثال 4 **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا.

16) **المعطيات:** $\triangle HJM$ متطابق الضلعين، $\triangle HKL$ متطابق الأضلاع.

المطلوب إثبات أن: $\angle JHK \cong \angle MHL$





17) **حدائق:** اصطحب خالد أخاه الأصغر إلى حديقة الحي، فلاحظ أن دعائم الأرجوحة الموجودة في الحديقة تشكل مجموعتين من المثلثات، وأن $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ ولكن $\overline{BC} \ncong \overline{AB}$.

a) إذا قدّر خالد أن $m\angle BAC = 50^\circ$، فما قيمة $m\angle ABC$ وفقًا لهذا التقدير؟ وضّح إجابتك.

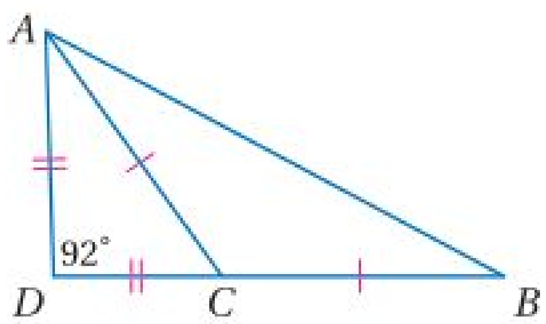
b) إذا كان $\overline{BE} \cong \overline{CD}$، فبيِّن أن $\triangle AED$ متطابق الضلعين.

c) إذا كان $\overline{ED} \cong \overline{AD}$, $\overline{BC} \parallel \overline{ED}$، فبيّن أن $\triangle AED$ متطابق الأضلاع.

الربط مع الحياة

مهمة الوالدين اختيار الألعاب التي تناسب أعمار أطفالهم.

أوجد كلًّا من القياسات الآتية:



18) $m\angle CAD$

19) $m\angle ACD$

20) $m\angle ACB$

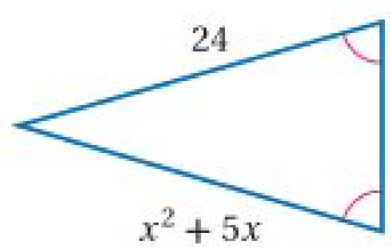
21) $m\angle ABC$

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لكل نتيجة أو نظرية مما يأتي:

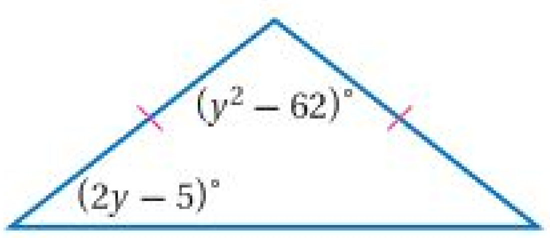
22) النتيجة 3.3 **23)** النتيجة 3.4 **24)** النظرية 3.11

أوجد قيمة المتغير في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

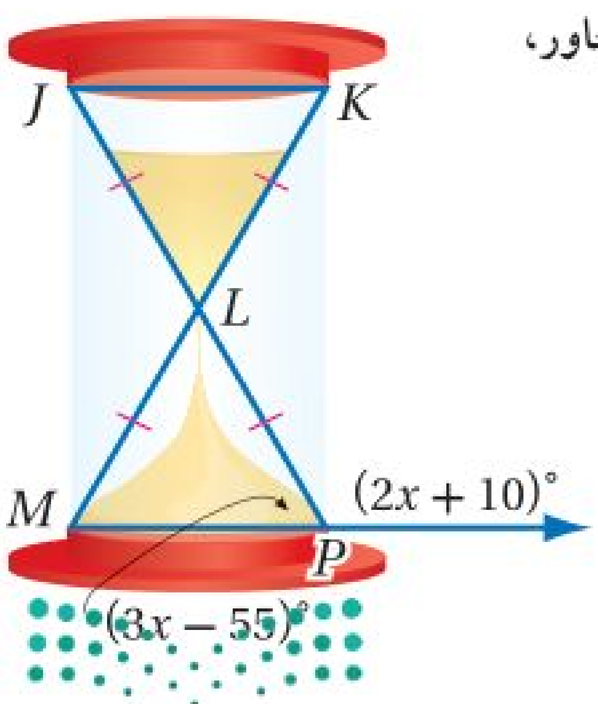
25)



26)



الساعات الرملية: استعمل الساعة الرملية المبينة في الشكل المجاور، وأوجد كلًّا من القياسات الآتية:



27) $m\angle LPM$

28) $m\angle LMP$

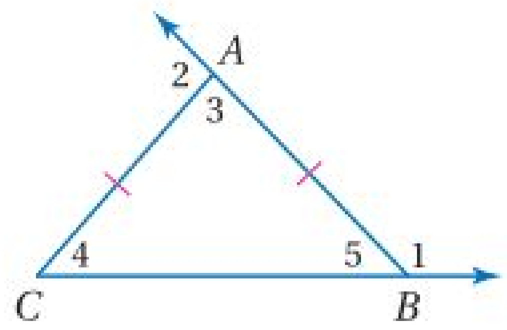
29) $m\angle JLK$

30) $m\angle JKL$

الربط مع الحياة

دقة ساعة الرمل الزجاجية تعتمد على ثبات معدل تدفق الرمل الذي يعتمد على نسبة قطر الثقب إلى قطر حبات الرمل المستعملة.

31) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، ستكتشف القياسات الممكنة للزوايا الداخلية للمثلث المتطابق الضلعين، إذا عُلم قياس زاوية خارجية له.



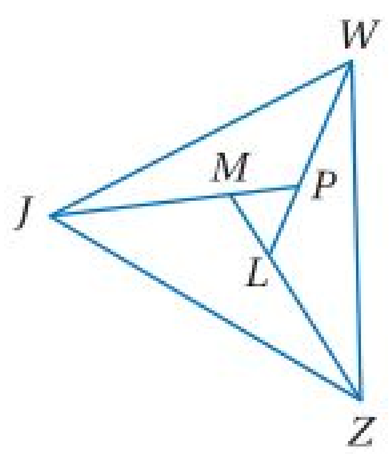
a) **هندسيًّا:** استعمل المسطرة والمنقلة لرسم ثلاثة مثلثات مختلفة، كلٌّ منها متطابق الضلعين. ومُدّ أحد ضلعَي زاوية الرأس ومدّت القاعدة من إحدى جهتيها كما في الشكل المجاور.

b) **جدوليًّا:** استعمل المنقلة لإيجاد $m\angle 1$ لكل مثلث وسجّله في جدول. واستعمل $m\angle 1$ لحساب قياسات $\angle 5$, $\angle 4$,$\angle 3$، ثم أوجد $m\angle 2$ وسجّله في جدول آخر واستعمله لحساب القياسات السابقة نفسها. رتّب نتائجك في جدولين.

c) **لفظيًّا:** وضّح كيف استعملت $m\angle 1$ لإيجاد قياسات $\angle 5$,$\angle 4$,$\angle 3$. ثم وضّح كيف استعملت $m\angle 2$ لإيجاد هذه القياسات نفسها.

d) **جبريًّا:** إذا كان $m\angle 1 = x$، فاكتب عبارة جبرية لإيجاد قياس كلٍّ من $\angle 5$,$\angle 4$,$\angle 3$، وبالمثل إذا كان $m\angle 2 = x$ ، فاكتب عبارة جبرية لإيجاد قياس كلٍّ من الزوايا نفسها.

مسائل مهارات التفكير العليا



32) **تحدٍّ:** في الشكل المجاور إذا كان $\triangle WJZ$ متطابق الأضلاع، $\angle ZWP \cong \angle WJM \cong \angle JZL$ ، فأثبت أن $\overline{WP} \cong \overline{ZL} \cong \overline{JM}$.

تبرير: حدّد ما إذا كانت كلٌّ من العبارتين الآتيتين صحيحة أحيانًا أو دائمًا أو غير صحيحة أبدًا. ووضّح إجابتك:

33) إذا كان قياس زاوية رأس المثلث المتطابق الضلعين عددًا صحيحًا، فإن قياس كلٍّ من زاويتَي القاعدة عدد صحيح.

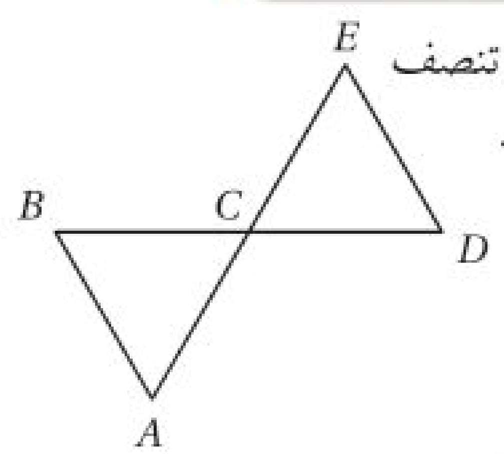
34) إذا كان قياس كلٍّ من زاويتَي القاعدة عددًا صحيحًا، فإن قياس زاوية الرأس عدد فردي.

35) **مسألة مفتوحة:** ارسم مثلثًا متطابق الضلعين، فيه زاويتا القاعدة منفرجتان إن أمكنك ذلك، وإلا فوضّح السبب.

36) **اكتب:** وضّح كيف تستعمل قياس زاوية قاعدة المثلث المتطابق الضلعين لإيجاد قياس زاوية الرأس.

تدريب على اختبار

37) في الشكل المجاور، $\overline{AE}$, $\overline{BD}$ تنصف كلٌّ منهما الأخرى في النقطة C.



أي المعلومات الإضافية الآتية تعد كافية لإثبات أن $\overline{DE} \cong \overline{DC}$؟

A $\angle A \cong \angle BCA$

B $\angle B \cong \angle D$

C $\angle ACB \cong \angle EDC$

D $\angle A \cong \angle B$

38) إذا كان $x = -3$ ، فإنّ قيمة $4x^2 - 7x + 5$ تساوي:

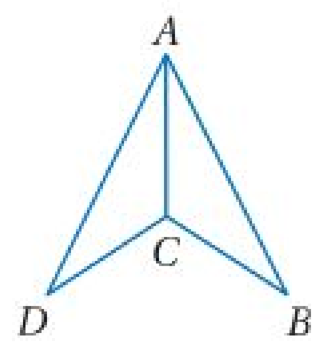
A 2

B 20

C 42

D 62

مراجعة تراكمية



39) إذا كان: $AB = 27$ in، $AD = 27$ in، $DC = 7$ in، $CB = 7$ in، فحدّد ما إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle ADC$. (الدرس 4-3)

اذكر الخاصية التي تبرر كلًّا من العبارات الآتية: (مهارة سابقة)

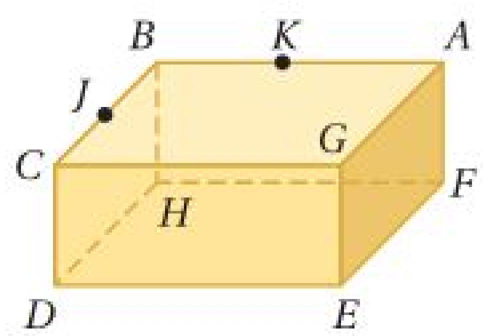
40) إذا كان $x(y + z) = a$ ، فإنّ $xy + xz = a$.

41) إذا كان $n - 17 = 39$ ، فإنّ $n = 56$.

42) إذا كان $m\angle P + m\angle Q = 110°$ وكانت $m\angle R = 110°$ ، فإنّ $m\angle P + m\angle Q = m\angle R$.

43) إذا كان $MD = 15$, $CV = MD$ فإنّ $CV = 15$.

انظر إلى الشكل المجاور. (مهارة سابقة)



44) ما عدد المستويات الظاهرة في هذا الشكل؟

45) سمِّ ثلاث نقاطٍ تقع على استقامةٍ واحدةٍ.

استعد للدرس اللاحق

أوجد إحداثيات نقطة المنتصف للقطعة التي إحداثيات طرفَيها كما يأتي:

46) $A(2, 15)$, $B(7, 9)$

47) $C(-4 , 6)$, $D(2, -12)$

48) $E(3 , 2.5)$, $F(7.5 , 4)$

7-3 المثلثات والبرهان الإحداثي
Triangles and Coordinate Proof

فيما سبق:

درست استعمال الهندسة الإحداثية لبرهان تطابق المثلثات.

(مهارة سابقة)

والآن:

- أرسم مثلثات، وأحدد مواقعها لاستعمالها في البرهان الإحداثي.
- أكتب برهانًا إحداثيًا.

المفردات:

البرهان الإحداثي
coordinate proof

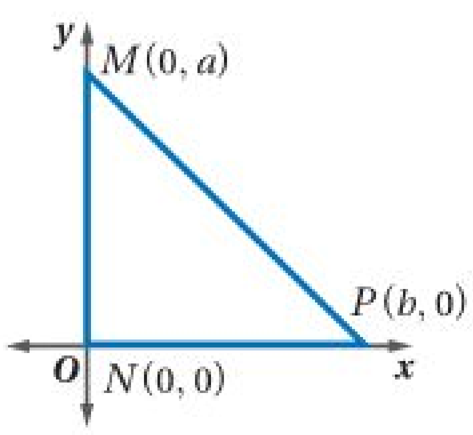
لماذا؟

نظام تحديد الموقع العالمي (GPS) يستقبل البث من الأقمار الاصطناعية، والتي يمكن بواسطتها تحديد موقع السيارة. ويمكن الاستفادة من هذه المعلومات بالإضافة إلى برمجيات أخرى لتوجيه حركة السيارة.

موقع المثلث وتسميته: كما هو الحال في نظام تحديد الموقع العالمي، فإن معرفة إحداثيات رؤوس شكل ما في مستوى إحداثيٍّ، يمكّنك من اكتشاف خصائصه والتوصل إلى استنتاجات خاصة به. ويستعمل **البرهان الإحداثي** الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر لإثبات صحة المفاهيم الهندسية. فالخطوة الأولى في البرهان الإحداثي هي تمثيل الشكل في المستوى الإحداثي.

مثال 1 **تحديد موقع المثلث وتسميته**

ارسم المثلث القائم MNP في المستوى الإحداثي، وسمّ رؤوسه على أن يكون طول $\overline{MN}$ يساوي a وحدة، وطول $\overline{NP}$ يساوي b وحدة.



- يُحدّد طول الضلع الذي يقع على أحد المحورين بسهولة؛ لذا من الأفضل وضع ضلعَي القائمة على المحورين x, y.
- اجعل زاوية المثلث القائمة $\angle N$ على نقطة الأصل، فيكون ضلعا القائمة على المحورين هما x, y.
- ارسم المثلث في الربع الأول.
- ارسم M على المحور y، وبما أن طول $\overline{MN}$ يساوي a وحدة، فإن إحداثيها x يساوي صفرًا، وإحداثيها y يساوي a.
- ارسم P على المحور x، وبما أن طول $\overline{NP}$ يساوي b وحدة، فإن إحداثيها y يساوي صفرًا، وإحداثيها x يساوي b.

تحقق من فهمك

1) ارسم المثلث JKL المتطابق الضلعين في المستوى الإحداثي وسمِّ رؤوسه، على أن يكون طول قاعدته $\overline{JL}$ يساوي a وحدة، ويكون ارتفاعه b وحدة، والرأس K يقع على المحور y.

إرشادات للدراسة

الارتفاع على القاعدة في المثلث المتطابق الضلعين ينصف القاعدة.

مفهوم أساسي **رسم المثلثات في المستوى الإحداثي**

أضف إلى مطويتك

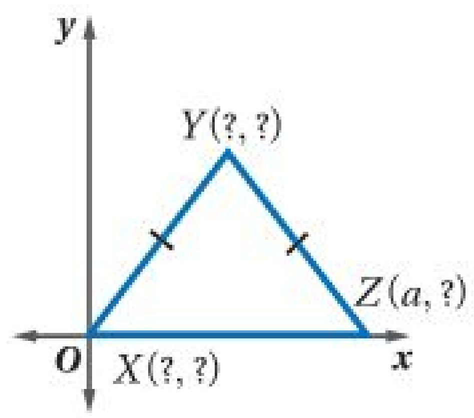
الخطوة 1: اجعل نقطة الأصل رأسًا للمثلث.

الخطوة 2: ارسم ضلعًا واحدًا على الأقل من أضلاع المثلث على أحد المحورين.

الخطوة 3: ارسم المثلث في الربع الأول إن أمكن.

الخطوة 4: استعمل الإحداثيات التي تجعل الحسابات أبسط ما يمكن.

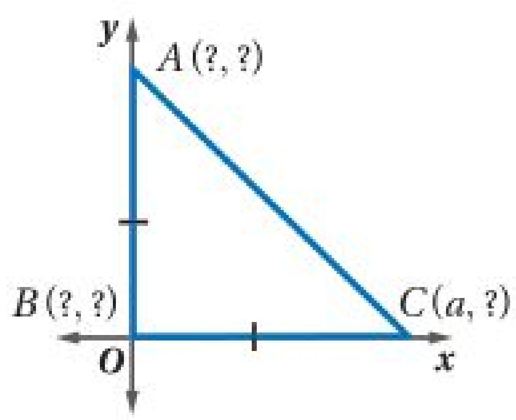
مثال 2 إيجاد الإحداثيات المجهولة



أوجد الإحداثيات المجهولة في المثلث XYZ المتطابق الضلعين.

بما أن الرأس X يقع عند نقطة الأصل، فإن إحداثياته هي $(0, 0)$، ولأن الرأس Z يقع على المحور x، فإن الإحداثي y له يساوي صفرًا، فتكون إحداثيات الرأس Z هي $(a, 0)$، وبما أن $\triangle XYZ$ متطابق الضلعين، فإن الإحداثي x للنقطة Y يقع في منتصف المسافة بين a، 0 ويكون $\frac{a}{2}$، أما الإحداثي y للنقطة Y فلا يمكننا إيجاده بدلالة a، وإذا افترضناه b، فتكون إحداثيات النقطة Y هي $\left(\frac{a}{2}, b\right)$.

تحقق من فهمك



2) أوجد الإحداثيات المجهولة في المثلث $\triangle ABC$ المتطابق الضلعين والقائم الزاوية.

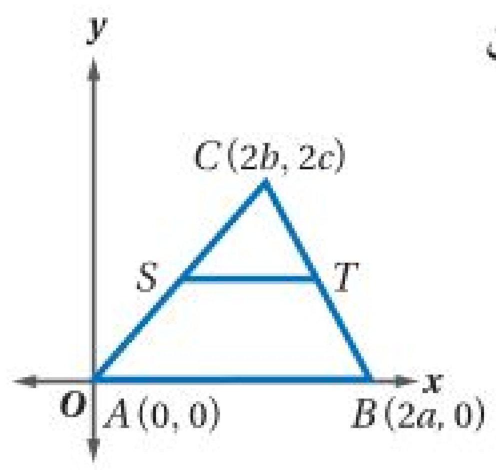
إرشادات للدراسة

الزاوية القائمة

تقاطع المحور x مع المحور y يشكّل زاوية قائمة؛ ولذا يُعد هذا التقاطع المكان المناسب لموقع الزاوية القائمة.

كتابة البرهان الإحداثي بعد رسم المثلث في المستوى الإحداثي، وتحديد إحداثيات رؤوسه، يمكنك استعمال البرهان الإحداثي؛ للتحقق من بعض الخصائص وبرهنة بعض النظريات.

مثال 3 كتابة البرهان الإحداثي



اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن القطعة المستقيمة التي تصل بين منتصفَي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث.

اجعل أحد رؤوس المثلث عند نقطة الأصل وسمِّه A، واستعمل إحداثيات من مضاعفات 2؛ لأن قانون نقطة المنتصف يتضمن قسمة مجموع الإحداثيين على 2

المعطيات: $\triangle ABC$، فيه:

S نقطة منتصف $\overline{AC}$،

T نقطة منتصف $\overline{BC}$.

المطلوب: إثبات أن $\overline{ST} \parallel \overline{AB}$.

البرهان:

باستعمال قانون نقطة المنتصف، فإن إحداثيات S هي: $\left(\frac{2b+0}{2}, \frac{2c+0}{2}\right) = (b, c)$

وكذلك إحداثيات T هي: $\left(\frac{2a+2b}{2}, \frac{0+2c}{2}\right) = (a+b, c)$

وبتطبيق قانون الميل، فإن ميل $\overline{ST}$ هو: $\frac{c-c}{a+b-b} = 0$

وميل $\overline{AB}$ هو: $\frac{0-0}{2a-0} = 0$

وبما أن ميل $\overline{ST}$ يساوي ميل $\overline{AB}$، فإن $\overline{AB} \parallel \overline{ST}$.

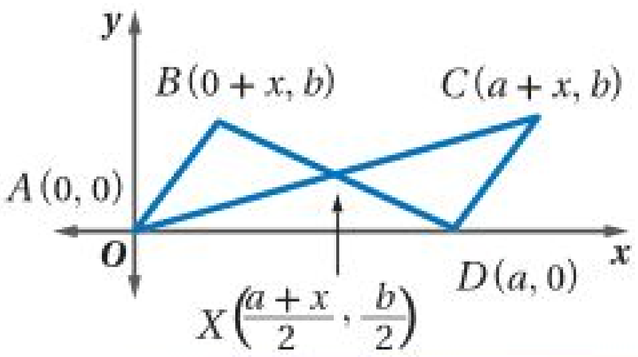
إرشادات للدراسة

البرهان الإحداثي

تنطبق الإرشادات والطرائق المستعملة في هذا الدرس على كل المضلعات، ولا تقتصر على المثلثات.

تحقق من فهمك

3) اكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات أن:
$\triangle ABX \cong \triangle CDX$.



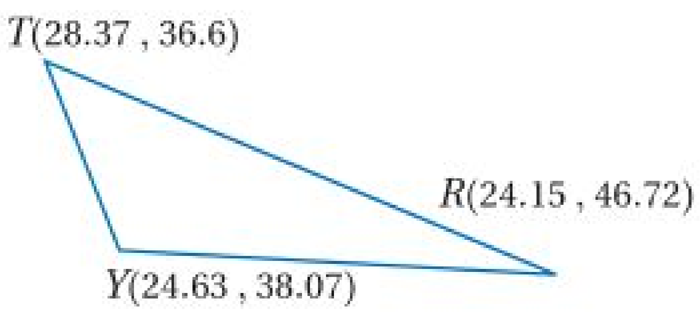
يمكن استعمال طرائق البرهان الإحداثي لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال 4 من واقع الحياة تصنيف المثلثات

جغرافيا: **إذا علمت أن الإحداثيات التقريبية لكلٍّ من الرياض وينبع وتبوك هي: الرياض 24.15°N 46.72°E، ينبع 24.63°N 38.07°E، تبوك 28.37°N 36.6°E.**

فاكتب برهانًا إحداثيًا يبيّن أن المثلث الذي رؤوسه هذه المدن الثلاث مختلف الأضلاع.

إرشاد: يمكن التعبير عن إحداثي الرياض 24.15°N 46.72°E بالزوج المرتب (24.15, 46.72) وكذلك بقية المدن.



الخطوة الأولى هي رسم شكل تقريبي لهذا المثلث، وتعيين المواقع الثلاثة وإحداثياتها على الرسم، ولتكن R تمثّل الرياض، و Y تمثّل ينبع، و T تمثّل تبوك.

إذا لم يتطابق أي ضلعين في $\triangle RYT$، فسيكون مختلف الأضلاع. استعمل قانون المسافة بين نقطتين والآلة الحاسبة لإيجاد أطوال أضلاع المثلث.

$$RY = \sqrt{(24.15 - 24.63)^2 + (46.72 - 38.07)^2}$$
$$\approx 8.66$$

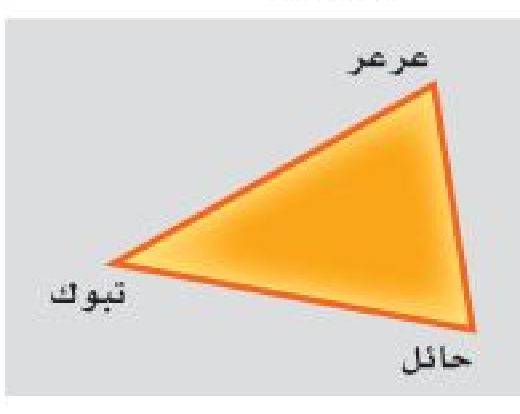
$$RT = \sqrt{(28.37 - 24.15)^2 + (36.6 - 46.72)^2}$$
$$\approx 10.96$$

$$YT = \sqrt{(24.63 - 28.37)^2 + (38.07 - 36.6)^2}$$
$$\approx 4.02$$

وبما أن أطوال أضلاع المثلث مختلفة، إذن فهو مثلث مختلف الأضلاع؛ أيْ أن المثلث الذي رؤوسه هي الرياض وينبع وتبوك مختلف الأضلاع.

تحقق من فهمك

4) **جغرافيا:** يضم مجمّع كشفيّ ثلاث فرق من ثلاث مدن تمثل مثلثًا.
إذا كانت الإحداثيات التقريبية لمواقع هذه المدن الثلاث هي:
تبوك 28.37°N36.6°E، عرعر 30.9°N41.13°E، حائل 27.43°N41.68°E،
فاكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات أن المثلث الذي رؤوسه هذه المدن الثلاث متطابق الضلعين تقريبًا.



الربط مع الحياة

يقع مثلث برمودا المبين في الخريطة في المحيط الأطلسي، وهو على شكل مثلث مختلف الأضلاع. وتقدر مساحته الحقيقية بـ 482344 ميلًا مربعًا.

تاريخ الرياضيات

محمد بن أحمد أبو الريحان البيروني الخوارزمي، 362هـ - 973هـ،
برز في كثير من فروع المعرفة الإنسانية (الأدب، الجغرافيا، الفلك، الرياضيات)، فقد حدد بدقة خطوط الطول وخطوط العرض، ووضع قاعدة حسابية لتسطيح الكرة؛ أي نقل الخطوط والخرائط من الكرة إلى سطح مسطح والعكس..

تأكد

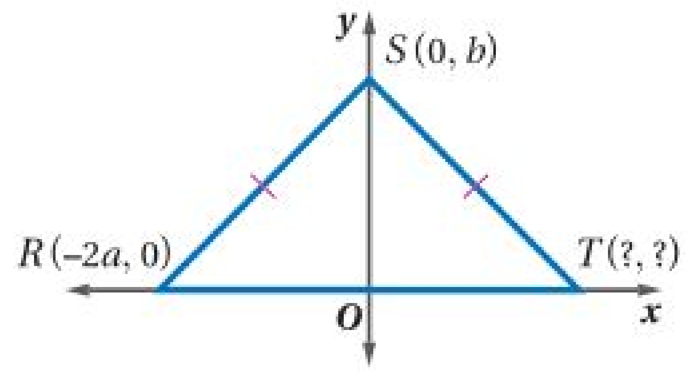
المثال 1 ارسم كلًّا من المثلثين الآتيين في المستوى الإحداثي، وحدّد إحداثيات رؤوسه.

1) $\triangle ABC$ قائم الزاوية، فيه $\overline{AC}, \overline{AB}$ ضلعا القائمة، وطول $\overline{AC}$ يساوي $2a$ وحدة، وطول $\overline{AB}$ يساوي $2b$ وحدة.

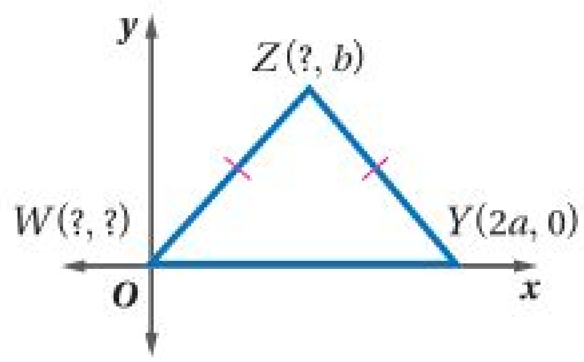
2) $\triangle FGH$ المتطابق الضلعين الذي طول قاعدته $\overline{FG}$ يساوي $2a$ وحدة.

المثال 2 أوجد الإحداثيات المجهولة في كلٍّ من المثلثين الآتيين:

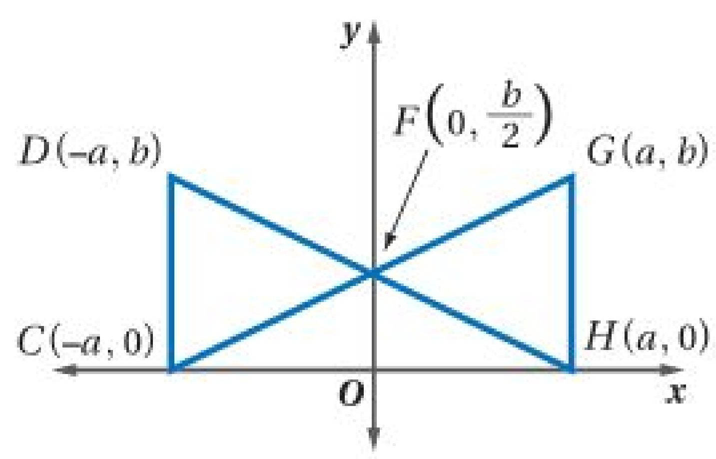
3)



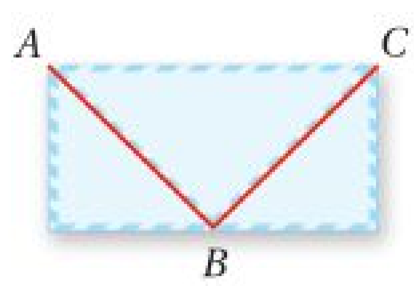
4)



المثال 3 5) اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن $\triangle FDC \cong \triangle FGH$.



المثال 4 6) اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن المثلث ABC متطابق الضلعين، علمًا بأن بُعدَي المظروف هما: 10 cm, 20 cm، والنقطة B في منتصف الحافة السفلى للمظروف.



تدرب وحل المسائل

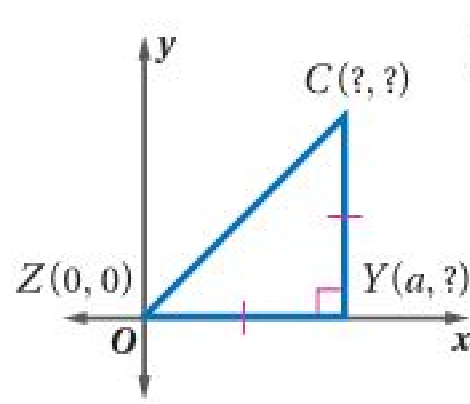
المثال 1 ارسم كل مثلثٍ من المثلثات الآتية في المستوى الإحداثي، وحدِّد إحداثيات رؤوسه:

7) $\triangle ABC$ المتطابق الضلعين الذي طول قاعدته $\overline{AB}$ يساوي a وحدة.

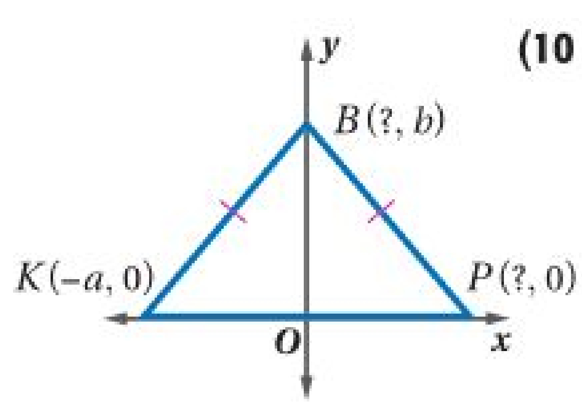
8) $\triangle XYZ$ القائم الزاوية الذي وتره $\overline{YZ}$، وطول الضلع $\overline{XY}$ يساوي b وحدة، وطول $\overline{XZ}$ ثلاثة أمثال طول $\overline{XY}$.

المثال 2 أوجد الإحداثيات المجهولة في كل مثلث مما يأتي:

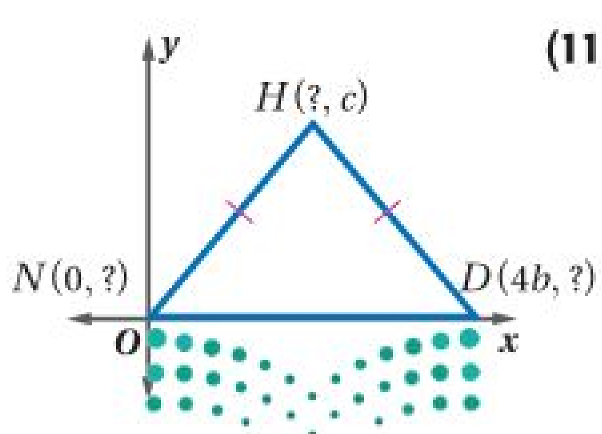
9)



10)



11)



المثالان 3, 4 **برهان:** **اكتب برهانًا إحداثيًّا لكل عبارة من العبارات الآتية:**

12) القطع المستقيمة الثلاث الواصلة بين نقاط منتصفات أضلاع مثلث متطابق الضلعين تشكّل مثلثًا متطابق الضلعين أيضًا.

13) طول القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفَي ضلعين في المثلث يساوي نصف طول الضلع الثالث.

14) **جغرافيا:** إذا علمت أن الإحداثيات التقريبية لمواقع مدن جازان ونجران وخميس مشيط هي: جازان 16.9°N 42.58°E ، نجران 17.5°N 44.16°E ، خميس مشيط 18.3°N 42.8°E، فبيّن أن المثلث الذي رؤوسه هي هذه المدن الثلاث مختلف الأضلاع.

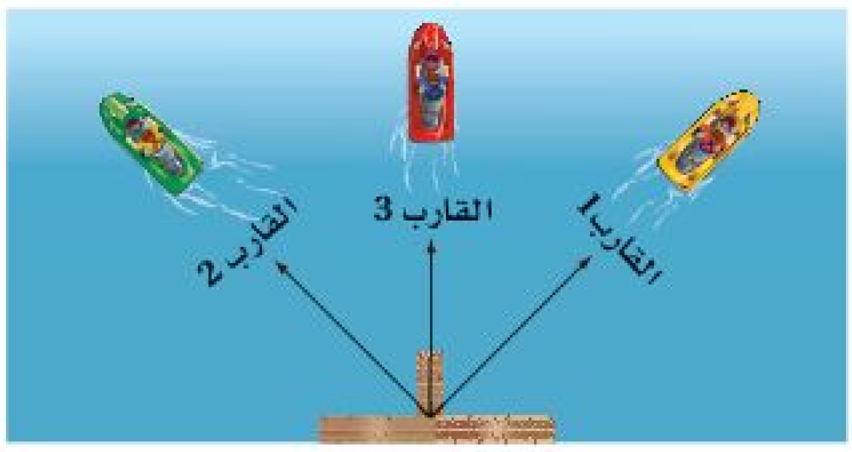
في $\triangle XYZ$ ، أوجد ميل كل ضلع من أضلاعه، ثم حدد ما إذا كان المثلث قائم الزاوية أم لا. ووضّح إجابتك.

15) $X(0, 0), Y(2h, 2h), Z(4h, 0)$

16) $X(0, 0), Y(1, h), Z(2h, 0)$

17) **نزهة:** أقامت عائلتان خيمتين في متنزَّه كبير. إذا اعتبرنا أن موقع إدارة المتنزَّه تقع عند النقطة (0, 0)، وأن إحداثيات موقعَي الخيمتين هما (12, 9) , (0, 25). فاكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن الشكل المتكون من مواقع إدارة المتنزَّه والخيمتين هو مثلث قائم الزاوية.

18) **رياضة مائية:** انطلقت ثلاثة قوارب مائية من الرصيف نفسه، فاتجه الأول نحو الشمال الشرقي، واتجه الثاني نحو الشمال الغربي، أما الثالث فاتجه نحو الشمال.



توقف القاربان (الأول والثاني) على بُعد 300 m تقريبًا من الرصيف، بينما توقف الثالث على بُعد 212 m من الرصيف.

a) إذا اعتبرنا أن الرصيف يمثل النقطة (0, 0)، فمثِّل هذا الوضع بيانيًّا، وأوجد معادلة خط سير القارب الأول، ومعادلة خط سير القارب الثاني. وفسّر إجابتك.

b) اكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن الرصيف والقاربين (الأول والثاني) تُشكّل مثلثًا قائم الزاوية متطابق الضلعين.

c) أوجد إحداثيات مواقع هذه القوارب الثلاثة، وفسّر إجابتك.

d) اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن القوارب الثلاثة تقع على خط مستقيم واحد تقريبًا، وأن القارب الثالث يقع في منتصف المسافة بين القاربين الأول والثاني.

الربط مع الحياة

تستثمر المنطقة الشرقية وجدة إطلالتيهما على الخليج العربي والبحر الأحمر في توجيه برامج رياضية بحرية متنوعة للسياح الذين يتوافدون على الواجهات البحرية من مختلف مناطق المملكة.

مسائل مهارات التفكير العليا

تحدٍّ: **إذا كانت إحداثيات النقطة J هي (0, 0)، والنقطة K هي $(2a, 2b)$، فأوجد إحداثيات النقطة L ، على أن يكون $\triangle JKL$ من النوع المحدّد في كلٍّ من الأسئلة الثلاثة الآتية:**

19) مثلث مختلف الأضلاع
20) مثلث قائم الزاوية
21) مثلث متطابق الضلعين

22) **مسألة مفتوحة:** في المستوى الإحداثي، ارسم مثلثًا قائم الزاوية متطابق الضلعين، على أن تكون نقطة الأصل هي نقطة منتصف وتره، وحدِّد إحداثيات كل رأسٍ من رؤوسه.

23) **تبرير:** إحداثيات رأسين في مثلثٍ هما: $(0, 0)$, $(a, 0)$. إذا أعطي إحداثي الرأس الثالث بدلالة a، وكان المثلث متطابق الضلعين، فحدّد إحداثيات الرأس الثالث، ثم ارسم المثلث في المستوى الإحداثي.

24) **اكتب:** وضّح فائدة اتباع كلٍّ من الإرشادات الآتية؛ لرسم المثلث في المستوى الإحداثي عند كتابة البرهان الإحداثي:

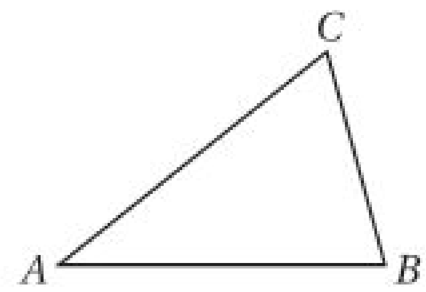
a) اجعل نقطة الأصل أحد رؤوس المثلث.

b) ارسم ضلعًا واحدًا على الأقل من أضلاع المثلث على المحور x أو المحور y.

c) حاول أن يقع المثلث في الربع الأول ما أمكن ذلك.

تدريب على اختبار

25) في الشكل أدناه إذا كان $m\angle B = 76°$، وقياس $\angle A$ يساوي نصف قياس $\angle B$، فما $m\angle C$؟



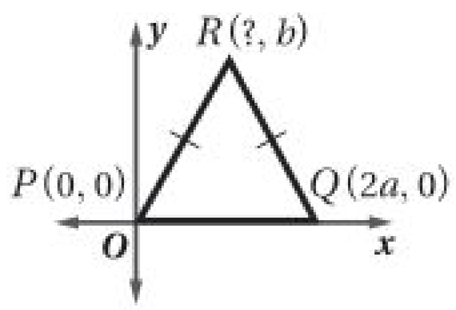
A) $33°$

B) $38°$

C) $46°$

D) $66°$

26) ما إحداثيات النقطة R في المثلث المجاور؟



A) $(4a, b)$

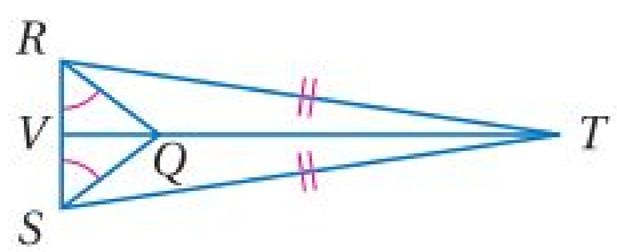
B) (a, b)

C) $(\frac{a}{2}, b)$

D) $(\frac{a}{4}, b)$

مراجعة تراكمية

باستعمال الشكل المجاور، أجب عن الأسئلة 29–27. (الدرس 3-6)



27) سمّ زاويتين متطابقتين غير المشار إليهما في الشكل.

28) سمِّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين غير المشار إليهما في الشكل.

29) سمِّ مثلثين متطابقين.

30) ما ميل المستقيم المار بالنقطتين $(6 , 2)$, $(-6 , -2)$. (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط الآتية، وقرّب الناتج إلى أقرب عُشرٍ:

31) $X(5, 4) , Y(2, 1)$

32) $A(1, 5) , B(-2, -3)$

33) $J(-2, 6) , K(1, 4)$

الفصل 3 دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

تصنيف المثلثات (الدرس 1-3)

- يمكن تصنيف المثلث بحسب نوع زواياه، فيكون حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية. وكذلك يمكن تصنيفه بحسب أضلاعه، فيكون مختلف الأضلاع أو متطابق الضلعين أو متطابق الأضلاع.

زوايا المثلث (الدرس 2-3)

- قياس الزاوية الخارجية للمثلث يساوي مجموع قياسَي الزاويتين الداخليتين البعيدتين.

المثلثات المتطابقة (الدرس 3-3 إلى 3-5)

- SSS: يتطابق مثلثان إذا كانت أضلاعُهما المتناظرة متطابقة.
- SAS: يتطابق مثلثان إذا طابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في المثلث الأول نظائرها في المثلث الآخر.
- ASA: يتطابق مثلثان إذا طابقت زاويتان والضلع المحصور بينهما في المثلث الأول نظائرها في المثلث الآخر.
- AAS: يتطابق مثلثان إذا طابقت زاويتان وضلع غير محصور بينهما في المثلث الأول نظائرها في المثلث الآخر.

المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع (الدرس 3-6)

- زاويتا القاعدة في المثلث المتطابق الضلعين متطابقتان، ويكون المثلث متطابق الأضلاع إذا تطابقت جميع زواياه.

المثلثات والبرهان الإحداثي (الدرس 3-7)

- يستعمل البرهان الإحداثي الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر؛ لإثبات صحة المفاهيم الهندسية.

المطويات منظم أفكار

تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدوَّنة في مطويتك.

المفردات الأساسية:

- المثلث الحاد الزوايا (ص. 152)
- المثلث المنفرج الزاوية (ص. 152)
- المثلث القائم الزاوية (ص. 152)
- المثلث المتطابق الأضلاع (ص. 153)
- المثلث المتطابق الضلعين (ص. 153)
- المثلث المختلف الأضلاع (ص. 153)
- المستقيم المساعِد (ص. 160)
- الزاوية الخارجية (ص. 162)
- الزاويتان الداخليتان البعيدتان (ص. 162)
- البرهان التسلسليّ (ص. 162)
- النتيجة (ص. 163)
- التطابق (ص. 168)
- المضلعات المتطابقة (ص. 168)
- العناصر المتناظرة (ص. 168)
- الزاوية المحصورة (ص. 178)
- الضلع المحصور (ص. 185)
- ساقا المثلث المتطابق الضلعين (ص. 194)
- زاوية الرأس (ص. 194)
- زاويتا القاعدة (ص. 194)
- البرهان الإحداثي (ص. 202)

اختبر مفرداتك

حدّد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة فاستبدل ما تحته خط لتصبح صحيحة:

1) المثلث المتطابق الزوايا هو مثال على المثلث الحاد الزوايا.

2) المثلث الذي يحوي زاوية أكبر من $90°$ هو مثلث قائم الزاوية.

3) المثلث المتطابق الأضلاع يكون متطابق الزوايا دائمًا.

4) المثلث المختلف الأضلاع فيه ضلعان متطابقان على الأقل.

5) الضلع المحصور هو الضلع الذي يقع بين زاويتين متتاليتين في مضلع.

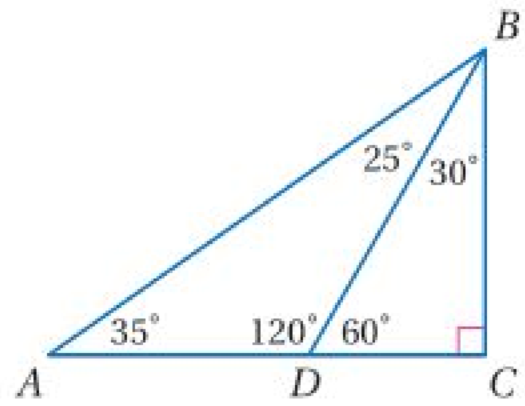
6) البرهان التسلسلي يستعمل الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر لبرهنة المفاهيم الهندسية.

7) قياس الزاوية الخارجية لمثلث يساوي مجموع قياسَي الزاويتين الداخليتين البعيدتين.

مراجعة الدروس

3-1 تصنيف المثلثات (ص: 152-158)

صنِّف كلًّا من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:



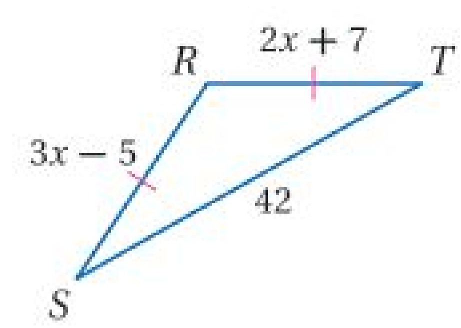
8) $\triangle ADB$

9) $\triangle BCD$

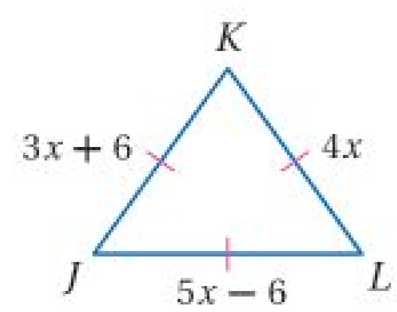
10) $\triangle ABC$

جبر: أوجد قيمة x وأطوال الأضلاع المجهولة في المثلثات الآتية:

11)



12)

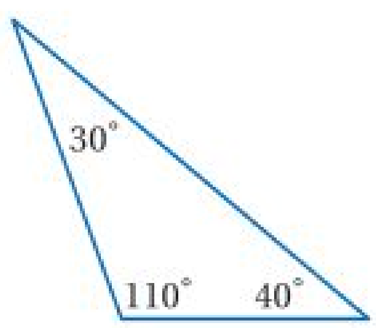


13) **خرائط:** المسافة من الرياض إلى المدينة المنورة ومنها إلى مكة المكرمة ثم إلى الرياض تساوي 2092 km، والمسافة بين الرياض ومكة المكرمة تزيد 515 km على المسافة بين المدينة المنورة ومكة المكرمة. والمسافة بين المدينة المنورة ومكة المكرمة تقل 491 km عن المسافة بين الرياض والمدينة المنورة. أوجد المسافة بين كل مدينتين من هذه المدن، وصنّف المثلث الذي رؤوسه هذه المدن الثلاث.

مثال 1

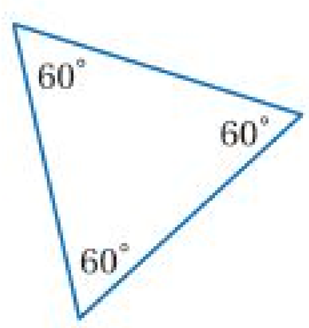
صنّف كلًّا من المثلثين الآتيين إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية.

(a



بما أن للمثلث زاوية منفرجة، فيكون مثلثًا منفرج الزاوية.

(b

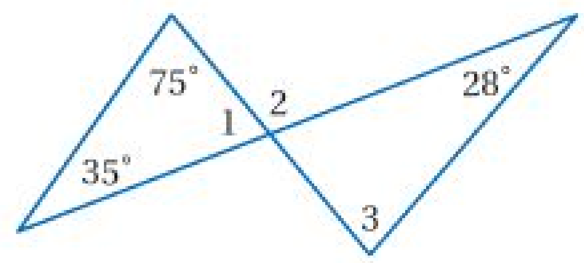


للمثلث ثلاث زوايا حادة جميعها متساوية؛ لذا فهو مثلث متطابق الزوايا.

الفصل 3 دليل الدراسة والمراجعة

3-2 زوايا المثلثات (ص: 160-167)

أوجد قياس كلٍّ من الزوايا المرقّمة الآتية:



14) $\angle 1$

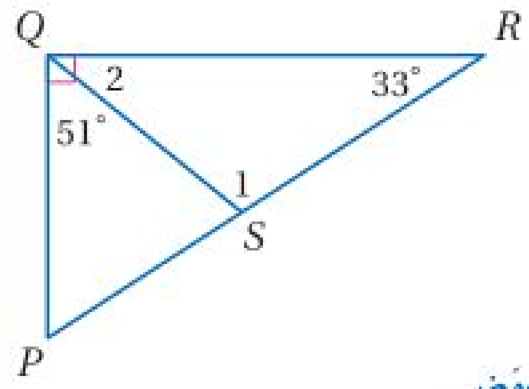
15) $\angle 2$

16) $\angle 3$

17) **منازل:** حديقة منزلية على صورة مثلث متطابق الضلعين كما في الشكل أدناه. أوجد قيمة x.

مثال 2

أوجد قياس كلٍّ من الزوايا المرقّمة في الشكل المجاور:



$m\angle 2 + m\angle PQS = 90^\circ$

$m\angle 2 + 51^\circ = 90^\circ$ عوّض

$m\angle 2 = 39^\circ$ اطرح 51 من الطرفين

$m\angle 1 + m\angle 2 + 33^\circ = 180^\circ$ نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$m\angle 1 + 39^\circ + 33^\circ = 180^\circ$ عوّض

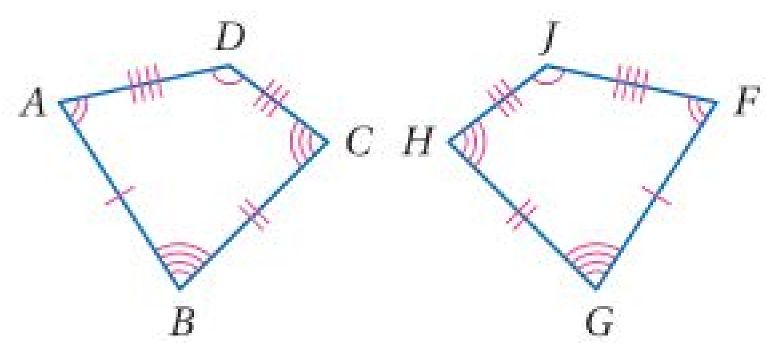
$m\angle 1 + 72^\circ = 180^\circ$ بسّط

$m\angle 1 = 108^\circ$ اطرح 72 من الطرفين

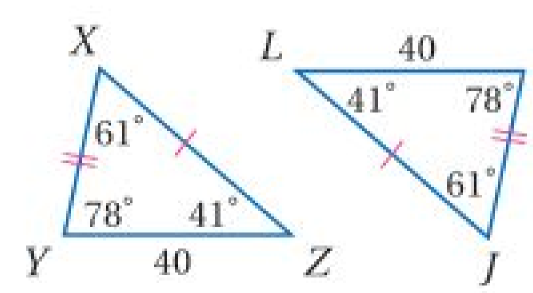
3-3 المثلثات المتطابقة (ص: 168-175)

بيّن أن كل مضلعين مما يأتي متطابقان، وذلك بتحديد العناصر المتناظرة المتطابقة جميعها، ثم اكتب عبارة التطابق:

18)



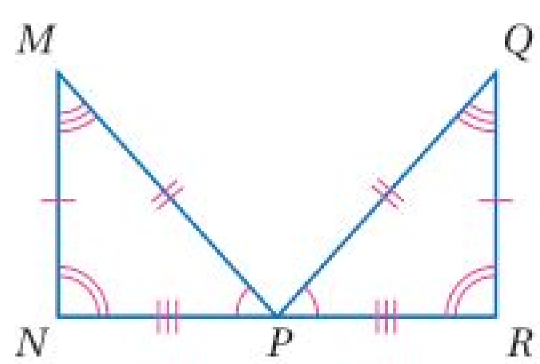
19)



20) **فسيفساء:** يُظهر الشكل المجاور جزءًا من تبليط فسيفسائي. سمِّ 4 مثلثات تبدو متطابقة في الشكل.

مثال 3

بيّن أن المثلثين الآتيين متطابقان، وذلك بتحديد العناصر المتناظرة المتطابقة جميعها، ثم اكتب عبارة التطابق:



الزوايا: $\angle N \cong \angle R, \angle M \cong \angle Q, \angle MPN \cong \angle QPR$

الأضلاع: $\overline{MN} \cong \overline{QR}, \overline{MP} \cong \overline{QP}, \overline{NP} \cong \overline{RP}$

جميع العناصر المتناظرة في المثلثين متطابقة؛ لذا فإن

$\triangle MNP \cong \triangle QRP$

3-4 إثبات تطابق المثلثات SSS, SAS (ص: 176-183)

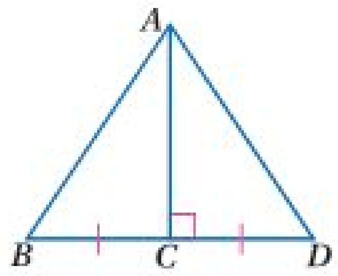
حدّد ما إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$، ووضح إجابتك.

21) $A(5, 2), B(1, 5), C(0, 0), X(-3, 3), Y(-7, 6), Z(-8, 1)$

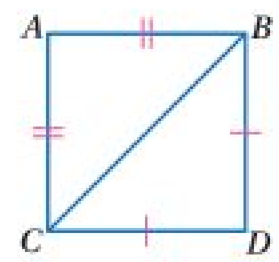
22) $A(3, -1), B(3, 7), C(7, 7), X(-7, 0), Y(-7, 4), Z(1, 4)$

حدّد المسلّمة التي يمكن استعمالها لإثبات أن كل مثلثين فيما يأتي متطابقان، وإذا كان إثبات تطابقهما غير ممكن فاكتب "غير ممكن".

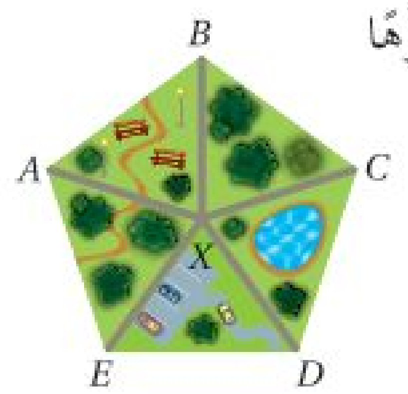
23) $\triangle ABC, \triangle ADC$



24) $\triangle ABC, \triangle DBC$

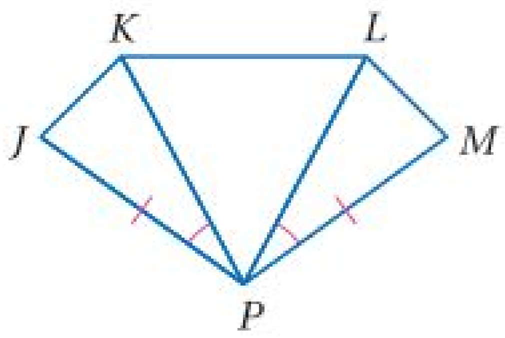


25) **متنزهات:** يظهر الرسم المجاور متنزَّهًا على صورة خماسي فيه خمسة ممرات مُشاة لها الطول نفسه، تؤدي إلى نقطة المركز. إذا كانت جميع الزوايا المركزية متساوية القياس، فأي مسلمة (نظرية) تستعمل لإثبات أن $\triangle ABX \cong \triangle DCX$؟



مثال 4

اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: $\triangle KPL$ متطابق الأضلاع.

$\overline{JP} \cong \overline{MP}$

$\angle JPK \cong \angle MPL$

المطلوب: إثبات أن $\triangle JPK \cong \triangle MPL$.

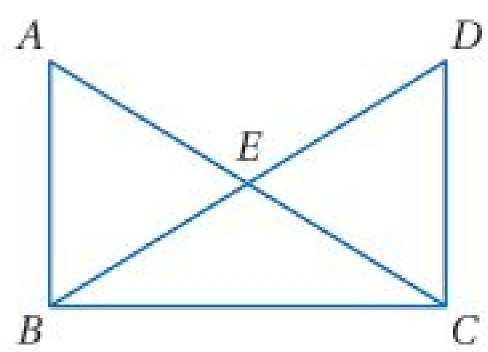
العبارات	المبررات
1) $\triangle KPL$ متطابق الأضلاع.	1) معطى
2) $\overline{PK} \cong \overline{PL}$	2) تعريف المثلث المتطابق الأضلاع
3) $\overline{JP} \cong \overline{MP}$	3) معطى
4) $\angle JPK \cong \angle MPL$	4) معطى
5) $\triangle JPK \cong \triangle MPL$	5) SAS

3-5 إثبات تطابق المثلثات ASA, AAS (ص: 185-191)

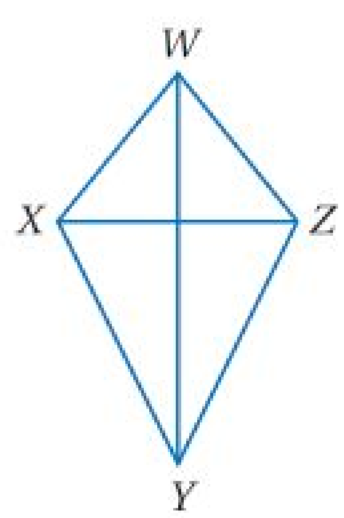
اكتب برهانًا ذا عمودين.

26) **المعطيات:**
$\overline{AB} \parallel \overline{DC}, \overline{AB} \cong \overline{DC}$

المطلوب: إثبات أن $\triangle ABE \cong \triangle CDE$.



27) **الطائرة الورقية:** يظهر الشكل المجاور طائرة عثمان الورقية. إذا علمت أن $\overline{WY}$ تنصف كلًّا من $\angle XWZ, \angle XYZ$، فأثبت أن $\triangle WXY \cong \triangle WZY$.



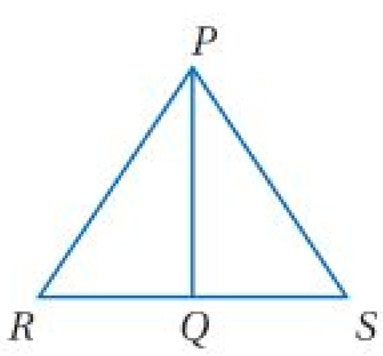
مثال 5

اكتب برهانًا تسلسليًّا.

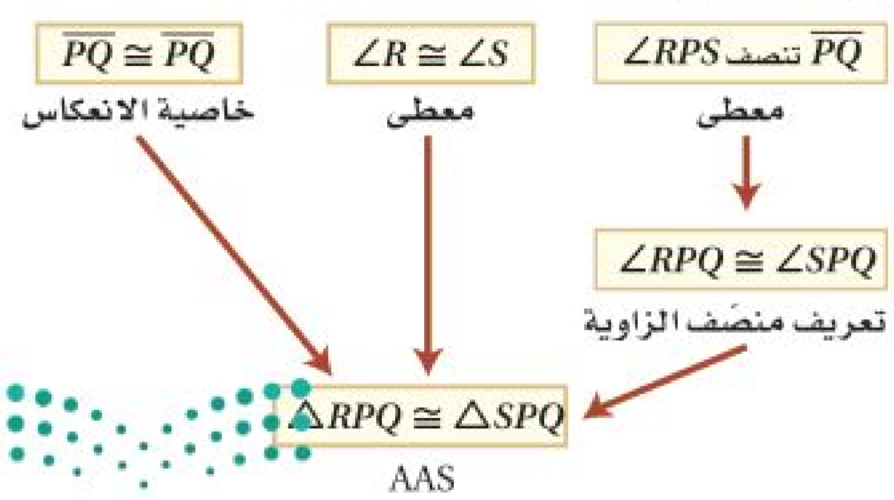
المعطيات: $\overline{PQ}$ تنصف $\angle RPS$

$\angle R \cong \angle S$

المطلوب: إثبات أن $\triangle RPQ \cong \triangle SPQ$.



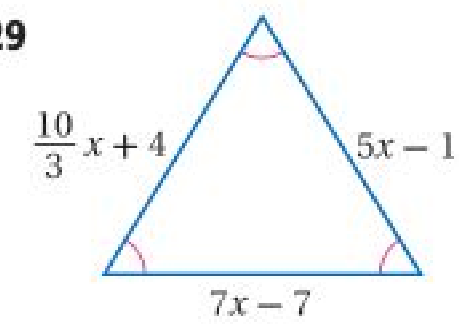
البرهان التسلسلي:



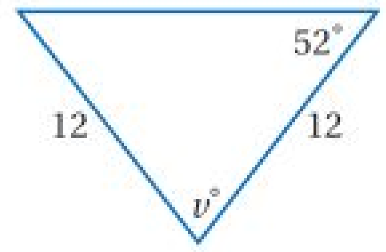
3-6 المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع (ص: 194-201)

أوجد قيمة كلٍّ من المتغيرين فيما يأتي:

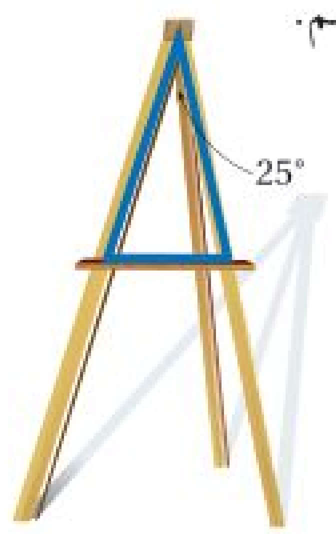
28)



29)

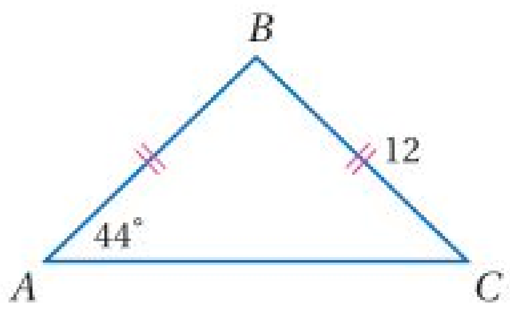


30) **رسم:** يستعمل وليد حاملًا خشبيًّا للرسم. والقطعة الداعمة الأفقية في الحامل تشكل مثلثًا متطابق الضلعين مع الدعامتين الأماميتين كما في الشكل المجاور، ما قياس كلٍّ من زاويتَي قاعدة المثلث؟



مثال 6

أوجد كل قياس فيما يأتي:



a) $m\angle B$

بما أن $AB = BC$ ، فإن $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ ، وبتطبيق نظرية المثلث المتطابق الضلعين تكون زاويتا القاعدة A, C متطابقتين؛ إذن $m\angle A = m\angle C$. استعمل نظرية مجموع قياس زوايا المثلث لكتابة معادلة. ثم حلها لتجد $m\angle B$.

$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$	نظرية مجموع زوايا المثلث
$m\angle B + 44 + 44 = 180$	$m\angle A = m\angle C = 44°$
$m\angle B + 88 = 180$	بسّط
$m\angle B = 92°$	اطرح 88 من الطرفين

b) AB

$AB = BC$ ؛ إذن $\triangle ABC$ متطابق الضلعين. وبما أن $BC = 12$ ، فإن $AB = 12$ أيضًا.

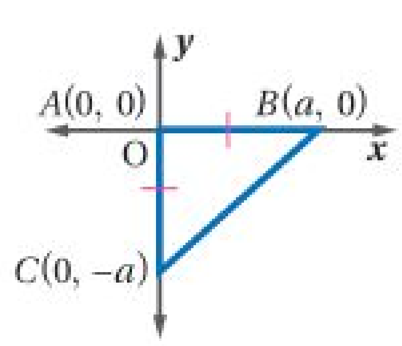
3-7 المثلثات والبرهان الإحداثي (ص: 202-207)

31) ارسم $\triangle MNO$ القائم الزاوية في M ، طولا ضلعيه $a, 2a$.

32) **جغرافيا:** عيّن شاكر المدينة المنورة وبريدة وحائل كما هو مبين على الخريطة المجاورة. اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن المثلث الذي رؤوسه هذه المدن الثلاث مختلف الأضلاع.

مثال 7

ارسم المثلث $\triangle ABC$ المتطابق الضلعين والقائم الزاوية وطول كلٍّ من ساقَي القائمة يساوي a وحدة على الربع الرابع في المستوى الإحداثي، وحدد إحداثيات رؤوسه.

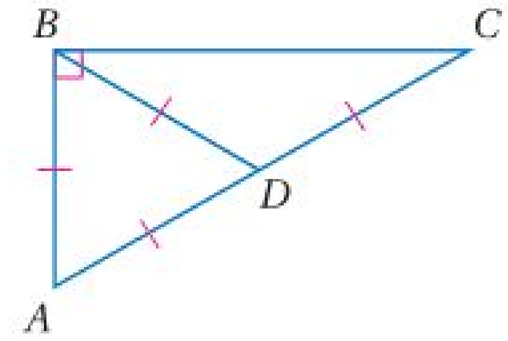


- اجعل نقطة الأصل رأسًا للزاوية القائمة في المثلث.
- اجعل أحد ضلعَي القائمة على المحور x ، والضلع الآخر على المحور y.
- بما أن النقطة B على المحور x ، إذن إحداثيها y يساوي صفرًا، وإحداثيها x يساوي a.

وبما أن $\triangle ABC$ متطابق الضلعين، فإن C ستبعد عن نقطة الأصل a وحدة وإحداثيَّيها $(0, -a)$؛ لأنها تقع على الجزء السالب من المحور y ، وذلك لكي يكون المثلث في الربع الرابع.

اختبار الفصل

صنّف كلًّا من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:

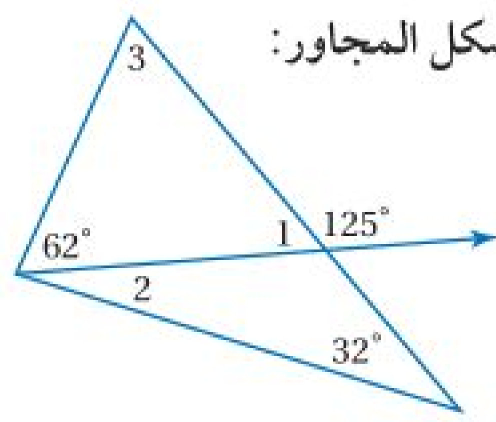


1) $\triangle ABD$

2) $\triangle ABC$

3) $\triangle BDC$

أوجد قياس كلٍّ من الزوايا المرقّمة في الشكل المجاور:

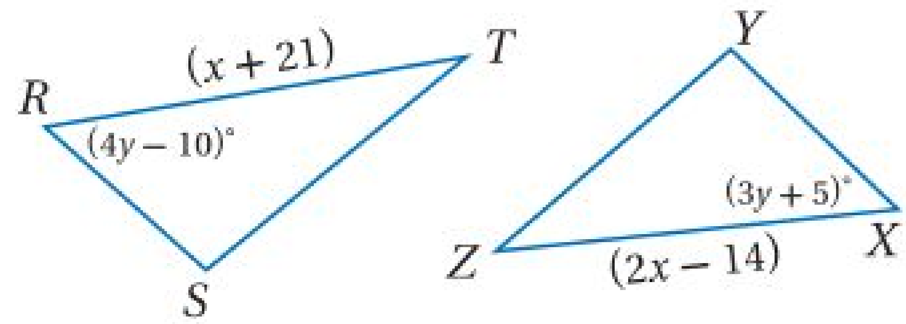


4) $\angle 1$

5) $\angle 2$

6) $\angle 3$

في المثلثين أدناه، إذا كان $\triangle RST \cong \triangle XYZ$ فأوجد:



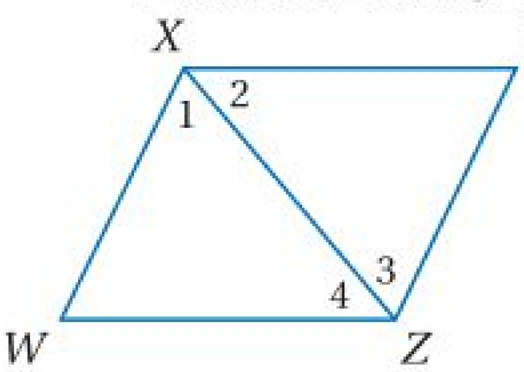
7) قيمة x.

8) قيمة y.

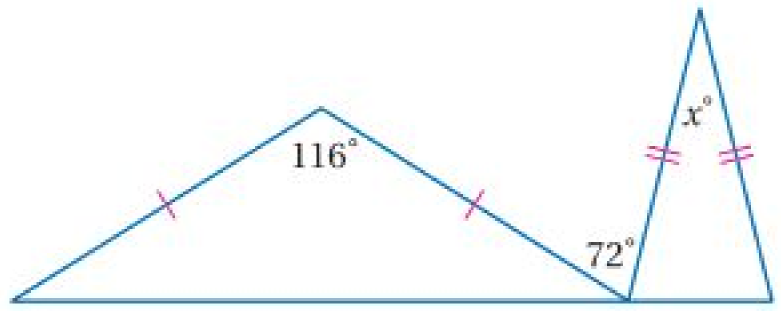
9) **برهان** اكتب برهانًا تسلسليًا.

المعطيات: $\overline{XY} \parallel \overline{WZ}$, $\overline{XW} \parallel \overline{YZ}$

المطلوب: إثبات أن $\triangle XWZ \cong \triangle ZYX$



10) **اختيار من متعدد** ما قيمة x في الشكل أدناه؟



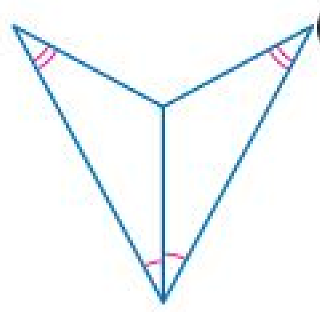
A 36 C 28

B 32 D 22

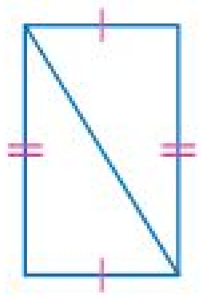
11) إذا علمت أن: $T(-4, -2), J(0, 5), D(1, -1), S(-1, 3)$ ، $E(3, 10), K(4, 4)$. فحدد ما إذا كان $\triangle TJD \cong \triangle SEK$ أم لا، ووضح إجابتك.

حدد النظرية أو المسلّمة التي يمكن استعمالها لإثبات أن كل زوج من المثلثات متطابق. واكتب " غير ممكن " إذا تعذر إثبات التطابق.

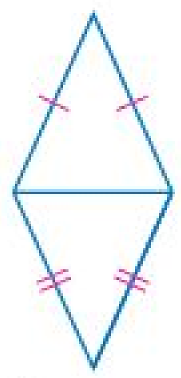
12)



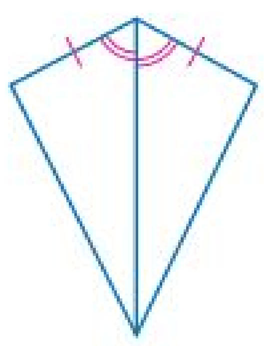
13)



14)



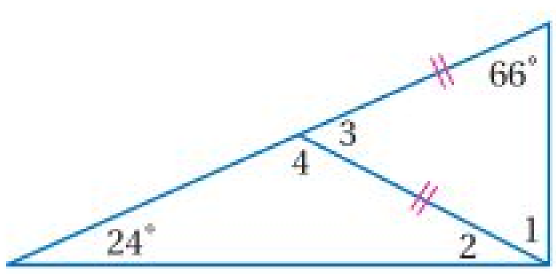
15)



أوجد قياس كلٍّ من الزاويتين الآتيتين:

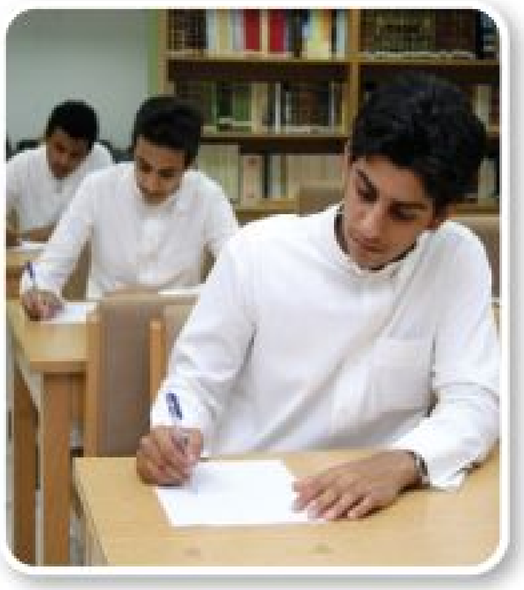
16) $\angle 1$

17) $\angle 2$



18) **برهان** إذا كان $\triangle ABC$ متطابق الضلعين وقائم الزاوية، وكانت M نقطة منتصف وتره $\overline{AB}$. فاكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات أن $\overline{CM}$ عمودية على $\overline{AB}$.

الأسئلة ذات الإجابات القصيرة



الأسئلة ذات الإجابات القصيرة تتطلب منك أن تقدِّم حلًّا لها متضمنًا الطريقة والتبريرات والتفسيرات التي استعملتها. وفي العادة يتم تصحيح هذه الأسئلة، وتحدد درجاتها باستعمال سلالم التقدير.

وهذا مثال على تصحيح هذا النوع من الأسئلة.

سلالم التقدير		
	المعايير	الدرجة
درجة كاملة	الإجابة صحيحة مدعَّمة بتفسيرات كاملة توضح كل خطوة.	2
درجة جزئية	• الإجابة صحيحة، لكن التفسيرات ليست كاملة. • الإجابة غير صحيحة، لكن التفسيرات صحيحة.	1 1
لا يستحق درجة	لم يُقدِّم أي إجابة، أو أن الإجابة ليس لها معنى.	0

استراتيجيات حل الأسئلة ذات الإجابات القصيرة

الخطوة 1

اقرأ السؤال جيدًا؛ كي تفهم الشيء الذي تحاول حله.

- حدد الحقائق ذات العلاقة.
- ابحث عن الكلمات المفتاحية والمصطلحات الرياضية.

الخطوة 2

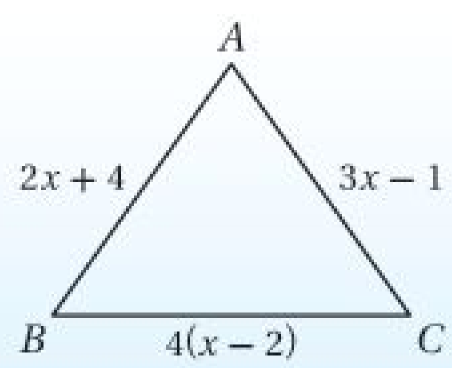
ضع خطة وحل المسألة.

- فسّر تبريرك، أو اعرض الطريقة التي ستتبعها لحل المسألة.
- اكتب الحل كاملًا مبينًا الخطوات جميعها.
- تحقق من إجابتك إذا سمح الوقت بذلك.

مثال

اقرأ السؤال الآتي، وحدد المطلوب. ثم استعمل المعلومات الواردة في السؤال لحله. واكتب خطوات الحل.

ما محيط المثلث ABC متطابق الضلعين الذي قاعدته $\overline{BC}$؟



اقرأ السؤال بعناية. تَعْلَم من السؤال أن $\triangle ABC$ متطابق الضلعين قاعدته $\overline{BC}$، والمطلوب أن تجد محيط هذا المثلث.

ضع خطة وحل السؤال.

ضلعا المثلث المتطابق الضلعين متطابقان.

لذا $\overline{AC} \cong \overline{AB}$ أو $AB = AC$. والآن حل المعادلة لتجد قيمة x.

$$AB = AC$$
$$2x + 4 = 3x - 1$$
$$2x - 3x = -1 - 4$$
$$-x = -5$$
$$x = 5$$

ثم أوجد طول كل ضلع من أضلاع المثلث.

$\overline{AB}$: $2(5) + 4 = 14$

$\overline{AC}$: $3(5) - 1 = 14$

$\overline{BC}$: $4(5 - 2) = 12$

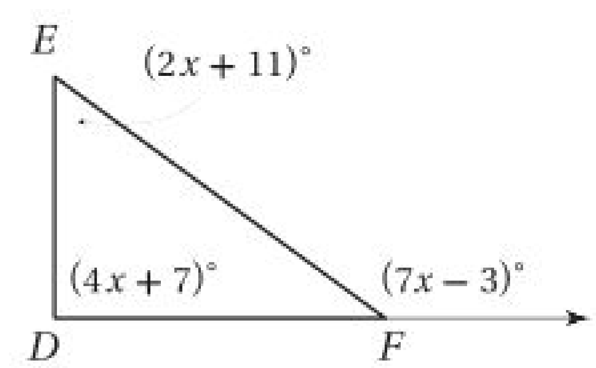
وبما أن $14 + 14 + 12 = 40$، إذن محيط $\triangle ABC$ يساوي 40 وحدةً.

خطوات الحل والحسابات والتبريرات واضحة. وتوصل الطالب إلى الإجابة الصحيحة؛ إذن تستحق هذه الإجابة درجتين.

تمارين ومسائل

اقرأ كل سؤال فيما يأتي، وحدد المطلوب، ثم استعمل المعلومات الواردة في السؤال. واكتب خطوات الحل:

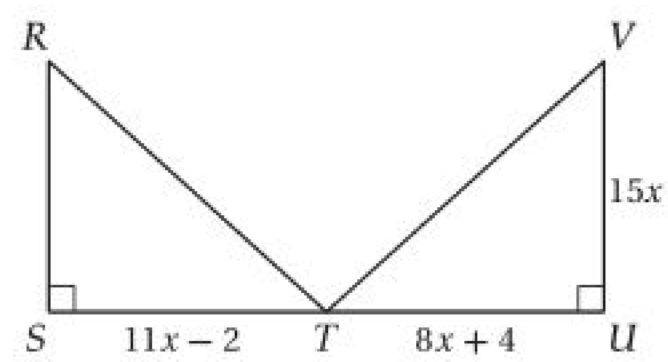
1) صنّف $\triangle DEF$ بحسب زواياه.



2) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطتين: $(-2 ,0)$, $(2, 4)$.

3) يحتاج مزارع إلى إنشاء حظيرة مستطيلة الشكل لأغنامه، مساحتها $1000\,m^2$، ويريد أن يوفر المال عن طريق شراء أقل كمية ممكنة من السياج. إذا كانت أبعاد الحظيرة أعدادًا صحيحة، فأوجد بُعدَي القطعة التي تتطلب أقل كميةٍ من السياج.

4) في الشكل أدناه، $\triangle RST \cong \triangle VUT$. ما مساحة $\triangle RST$؟



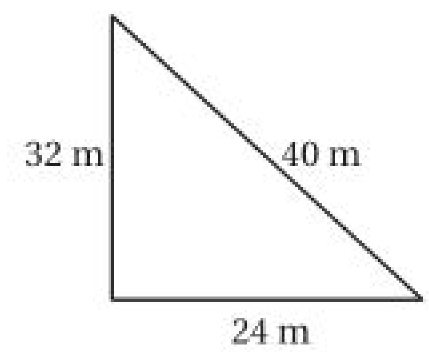
اختبار تراكمي

للفصول 3-1

أسئلة الاختيار من متعدد

اختر رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

1) يصنف المثلث المرسوم أدناه بحسب أضلاعه بأنه:



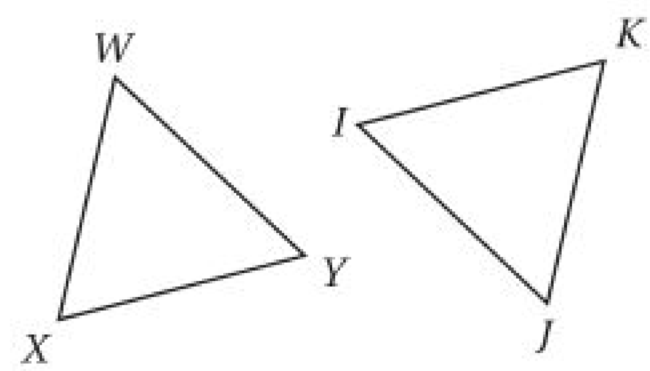
A متطابق الأضلاع

B متطابق الضلعين

C قائم الزاوية

D مختلف الأضلاع

2) في المثلثين أدناه إذا كان: $\overline{WX} \cong \overline{JK}, \overline{YX} \cong \overline{IK}, \angle X \cong \angle K$



فأيُّ العبارات الآتية تعبِّر عن تطابق هذين المثلثين؟

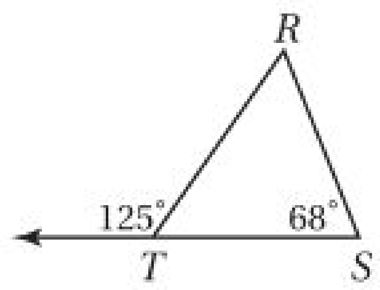
A $\triangle WXY \cong \triangle KIJ$

B $\triangle WXY \cong \triangle IKJ$

C $\triangle WXY \cong \triangle JKI$

D $\triangle WXY \cong \triangle IJK$

3) ما قياس الزاوية R في الشكل أدناه؟



A $57°$

B $59°$

C $65°$

D $68°$

4) افترض أن قياس إحدى زاويتَي القاعدة في مثلث متطابق الضلعين يساوي $44°$، فما قياس زاوية رأس المثلث؟

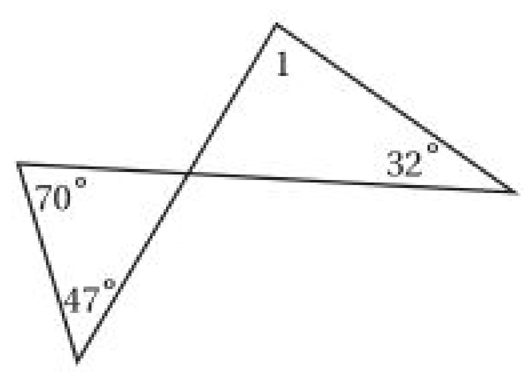
A $108°$

B $92°$

C $56°$

D $44°$

5) أوجد $m\angle 1$؟



A $85°$

B $63°$

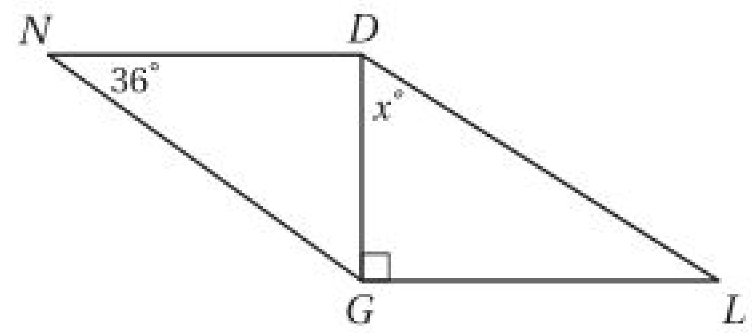
C $47°$

D $32°$

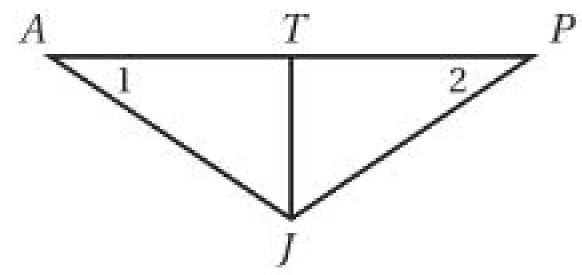
أسئلة ذات إجابات قصيرة

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

6) إذا كان $\triangle NDG \cong \triangle LGD$ في الشكل أدناه، فما قيمة x؟

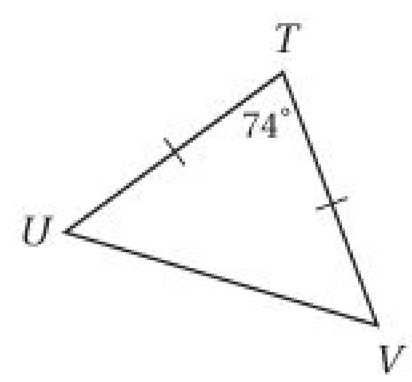


7) في الشكل أدناه $\angle 2 \cong \angle 1$ ، $\overline{JT} \perp \overline{AP}$



حدِّد نظرية التطابق التي تبيِّن أن $\triangle ATJ \cong \triangle PTJ$ باستعمال المعطيات الواردة في السؤال فقط، ووضح إجابتك.

8) أوجد $m\angle TUV$ في الشكل أدناه.



9) أثبت الجملة "يتطابق مثلثان إذا تطابق ضلعان وزاوية غير محصورة بينهما من المثلث الأول مع نظائرها من المثلث الثاني" إذا كانت صحيحة بكتابة برهان حرٍّ، أو ارسم شكلًا يبيِّن عدم صحَّتِها.

10) إذا علمت أن $\triangle DCB \cong \triangle EFG$، فاكتب الزوايا والأضلاع المتناظرة في المثلثين.

أسئلة ذات إجابات مطولة

11) أجب عن الأسئلة a–d؛ لتحصل على برهان إحداثيٍّ للعبارة الآتية:

المثلث الذي رؤوسه $A(0, 0), B(2a, b), C(4a, 0)$ هو مثلث متطابق الضلعين.

a) عيِّن الرؤوس على ورقة رسم بيانيٍّ.

b) استعمل قانون المسافة لكتابة عبارة تمثِّل AB.

c) استعمل قانون المسافة لكتابة عبارة تمثِّل BC.

d) استعمل النتائج التي توصَّلت إليها في الفرعين b , c؛ لتدوِّن استنتاجك عن $\triangle ABC$.

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

إذا لم تستطع الإجابة عن ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
فعد إلى الدرس...	3-1	3-3	3-2	3-6	3-2	3-3	3-5	3-6	3-4	3-3	3-7

الفصل 4

العلاقات في المثلث
Relationships in Triangle

فيما سبق:

درستُ طرائق تصنيف المثلثات.

والآن:

- أتعرف القطع المستقيمة والنقاط المرتبطة بالمثلثات.
- أتعرف العلاقات الخاصة بين أضلاع المثلث وزواياه.
- أكتب برهانًا غير مباشر.

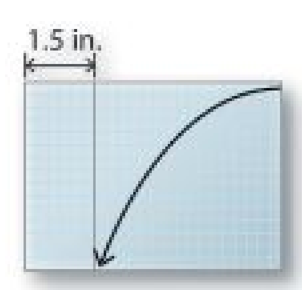
لماذا؟

التصميم الداخلي: تستعمل العلاقات في المثلث لإيجاد الأبعاد وقياسات الزوايا ومقارنتها. ويستعمل مهندسو التصميم الداخلي هذه العلاقات لتحسين تصاميمهم.

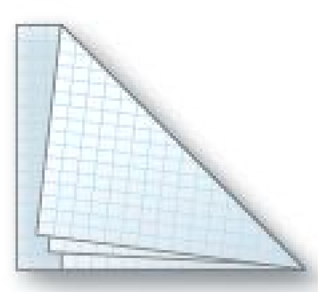
المطويات منظم أفكار

العلاقات في المثلث: اعمل هذه المطوية؛ لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول الفصل 4، مبتدئًا بسبع أوراق رسم بياني.

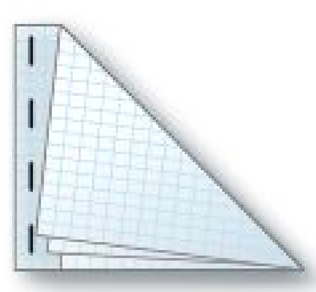
1. **اجمع الأوراق،** واطوِ الركن العلوي الأيمن إلى الحافة السفلى لتشكل مثلثات متطابقة وحافة مستطيلة.



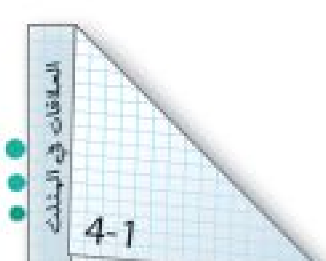
2. **اطوِ الجزء** المستطيل كما هو مبين بالشكل.



3. **ثبّت الأوراق** على طول الحافة المستطيلة في أربعة أماكن.



4. **اكتب** عنوان الفصل على الحافة المستطيلة، ورقّم كل درس أسفل المثلث، وخصص الورقة الأخيرة للمفردات الجديدة كما هو موضح بالشكل.



التهيئة للفصل 4

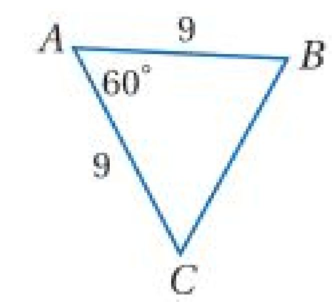
تشخيص الاستعداد:

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

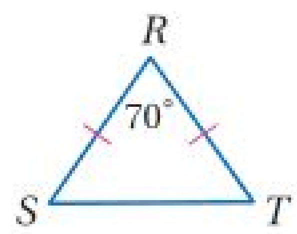
اختبار سريع

أوجد كلًّا من القياسين الآتيين:

1) BC



2) $m\angle RST$



3) حدائق: يصمِّم عبد الله حوضًا لزراعة الورود على شكل مثلث قائم الزاوية. إذا كان طول كلٍّ من ضلعَي القائمة 7 ft، فما طول الضلع الثالث (قرِّب إلى أقرب عدد صحيح)؟

للأسئلة 6–4 ضع تخمينًا مبنيًّا على المعطيات وارسم شكلًا يوضح تخمينك:

4) $\angle 4$, $\angle 3$ زاويتان متجاورتان على خط مستقيم.

5) $JKLM$ مربع.

6) $\overrightarrow{BD}$ منصّف لـ $\angle ABC$.

7) تبرير: حدّد ما إذا كان التخمين التالي المبني على المعطيات الواردة صحيحًا دائمًا أو صحيحًا أحيانًا أو غير صحيح أبدًا. وفسِّر إجابتك.

المعطيات: D, E, F ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة.

التخمين: $DE + EF = DF$

حل كلًّا من المتباينات الآتية:

8) $x + 16 < 41$

9) $x - 6 > 2x$

10) $6x + 9 < 7x$

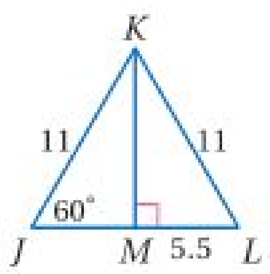
11) $8x + 15 > 9x - 26$

12) صور: أضافت نورة 15 صورة إلى ألبوم صورها، فأصبح عدد الصور أكثر من 120، فكم صورة كانت في الألبوم؟

مراجعة سريعة

مثال 1

أوجد كلًّا من القياسين الآتيين:



a) JM

b) $m\angle JKL$

a) بما أن $JK = KL$ (معطى)، فإن $m\angle J = m\angle L$ (نظرية المثلث المتطابق الضلعين)، وبما أن $m\angle KMJ = m\angle KML = 90^\circ$ $(KM \perp JM)$، فإن هذا يعني أن $\angle KMJ \cong \angle KML$، ويكون $\triangle KMJ \cong \triangle KML$ بحسب AAS، ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة، فإن $JM = ML = 5.5$

b)

$m\angle J + m\angle JKL + m\angle L = 180^\circ$	نظرية مجموع زوايا المثلث
$60^\circ + m\angle JKL + 60^\circ = 180^\circ$	$m\angle J = m\angle L = 60^\circ$
$120^\circ + m\angle JKL = 180^\circ$	بسّط
$m\angle JKL = 60^\circ$	اطرح 120 من الطرفين

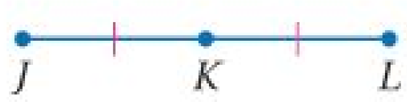
مثال 2

ضع تخمينًا مبنيًّا على المعطى الآتي، إذا كانت K نقطة منتصف $\overline{JL}$، وارسم شكلًا يوضح تخمينك.

المعطيات: K نقطة منتصف $\overline{JL}$.

التخمين: $\overline{JK} \cong \overline{KL}$

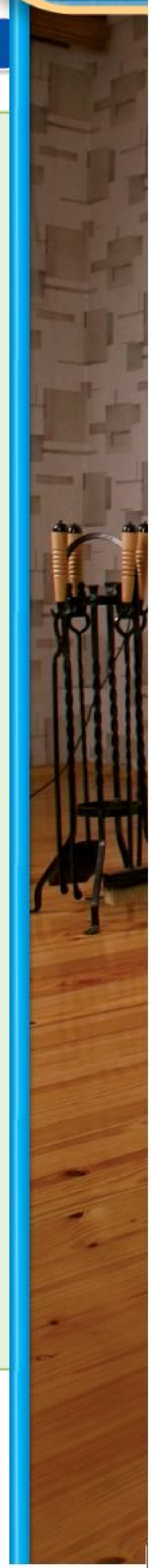
الرسم:



مثال 3

حل المتباينة $3x + 5 > 2x$

$3x + 5 > 2x$	معطى
$3x - 3x + 5 > 2x - 3x$	اطرح $3x$ من الطرفين
$5 > -x$	بسّط
$-5 < x$	اقسم الطرفين على -1



استكشاف **معمل الهندسة**

4-1 إنشاء المنصّفات
Constructing Bisectors

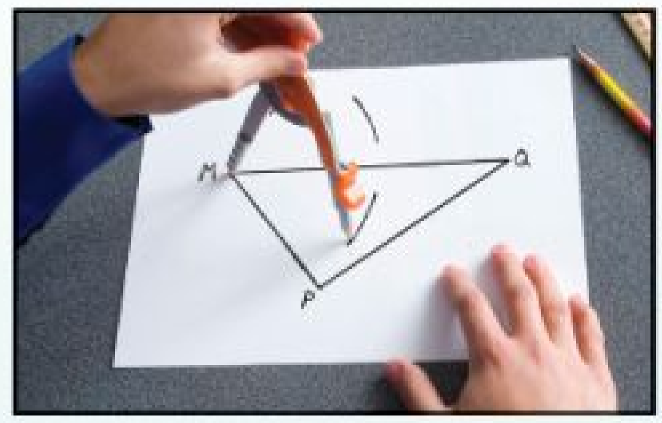
رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

سوف تنشئ فيما يلي العمود المنصف لأحد أضلاع مثلث والمنصف لإحدى زواياه.
العمود المنصِف لقطعةٍ مستقيمةٍ هو العمود على القطعة المار بمنتصفها.

إنشاء هندسي 1 العمود المنصّف

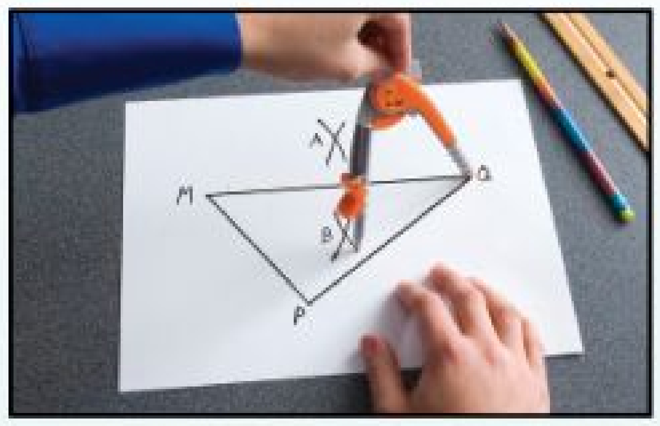
إنشاء العمود المنصّف لأحد أضلاع مثلث.

الخطوة 1:



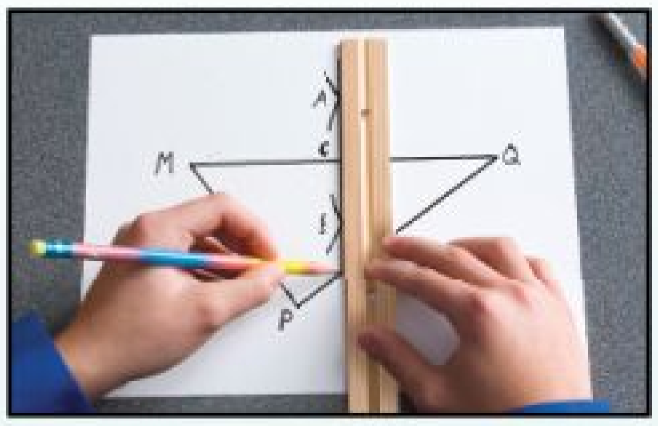
افتح الفرجار فتحة أكبر من $\frac{1}{2}MQ$، وارسم قوسًا من الرأس M فوق $\overline{MQ}$ وقوسًا آخر تحتها.

الخطوة 2:



استعمل فتحة الفرجار نفسها. وارسم من الرأس Q قوسًا فوق $\overline{MQ}$ وقوسًا آخر تحتها. وسمِّ نقطتي تقاطع القوسين A , B.

الخطوة 3:



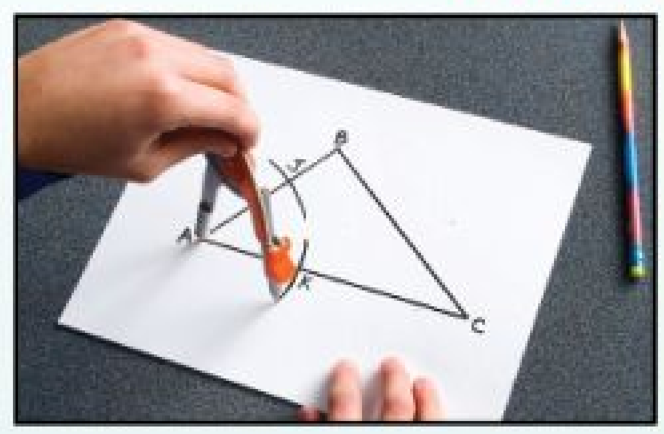
استعمل مسطرة غير مدرّجة وارسم المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$. وسمّ نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{AB}, \overline{MQ}$ بالحرف C.

منصّف زاوية في مثلث هو نصف مستقيم يقسم الزاوية إلى زاويتين متطابقتين.

إنشاء هندسي 2 منصّف الزاوية

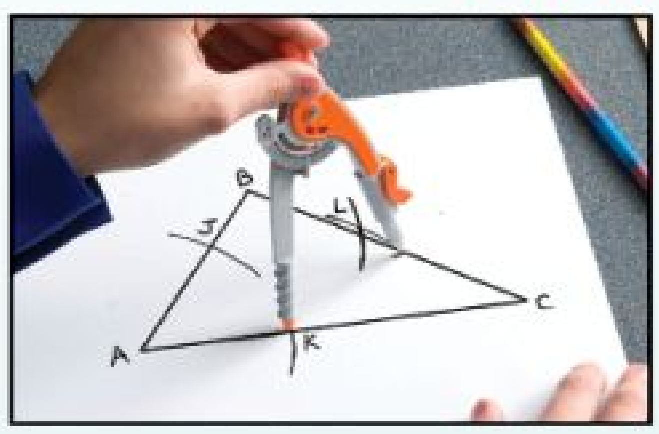
إنشاء منصّف زاوية في مثلث.

الخطوة 1:



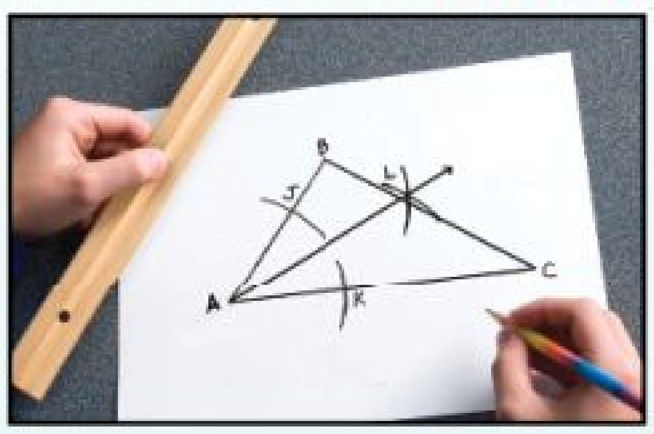
ثبِّت الفرجار عند الرأس A ، وارسم قوسًا يقطع $\overline{AB}, \overline{AC}$. وسمِّ نقطتَي التقاطع J, K.

الخطوة 2:



ثبّت الفرجار عند J، وارسم قوسًا داخل الزاوية A ، وارسم من K قوسًا آخر، مستعملًا فتحة الفرجار نفسها، على أن يقطع القوس الأول في نقطة سمِّها L .

الخطوة 3:



استعمل مسطرة غير مدرّجة لرسم $\overrightarrow{AL}$، وهو منصّف للزاوية A في $\triangle ABC$.

التمثيل والتحليل:

1) أنشئ العمودين المنصّفين للضلعين الآخرين في $\triangle MPQ$. ثم أنشئ منصّفي الزاويتين الباقيتين في $\triangle ABC$. ماذا تلاحظ حول نقطة التلاقي في الحالتين؟

كرّر الإنشاءين السابقين لكل نوع من المثلثات الآتية:

2) حادّ الزوايا
3) منفرج الزاوية
4) قائم الزاوية

4-1 المنصّفات في المثلث
Bisectors of Triangle

فيما سبق:

درستُ منصّف القطعة المستقيمة ومنصّف الزاوية.

والآن:

- أتعرَّف الأعمدة المنصّفة في المثلثات وأستعملها.
- أتعرَّف منصّفات الزوايا في المثلثات وأستعملها.

المفردات:

العمود المنصّف
perpendicular bisector

المستقيمات المتلاقية
concurrent lines

نقطة التلاقي
point of concurrency

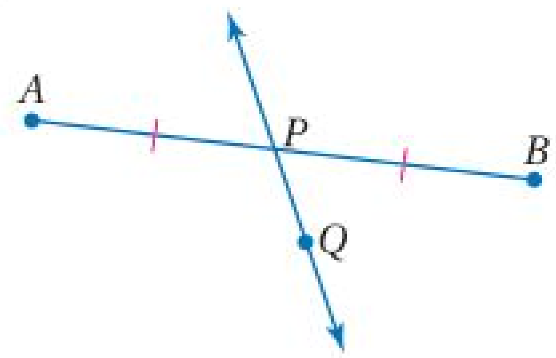
مركز الدائرة الخارجية للمثلث
circumcenter

مركز الدائرة الداخلية للمثلث
incenter

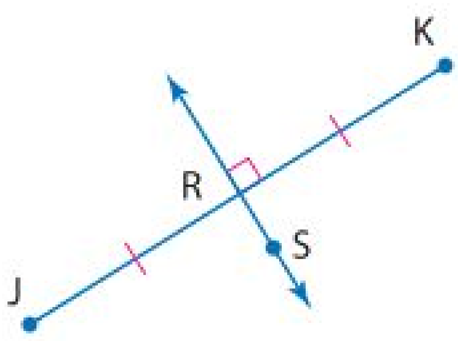
لماذا؟

إن تصميم منطقة العمل على شكل مثلث كما في الصورة المجاورة يجعل إعداد الطعام أسرع؛ وذلك بتقليل عدد الخطوات التي تخطوها سيدة البيت. ولتعيين النقطة المتساوية البعد عن كلٍّ من الفرن ومصدر الماء والثلاجة، يمكنك استعمال الأعمدة المنصّفة لأضلاع المثلث.

الأعمدة المنصّفة: تعلمت سابقًا أن منصّف قطعة مستقيمة هو أي قطعة أو مستقيم أو مستوى يقطع القطعة عند نقطة منتصفها، وإذا كان المنصّف عموديًّا على القطعة سُمِّي **عمودًا منصّفًا**.



$\overleftrightarrow{PQ}$ منصّف لِـ $\overline{AB}$



$\overleftrightarrow{RS}$ عمود منصّف لِـ $\overline{JK}$

تذكّر أنّ المحل الهندسي هو مجموعة من النقاط تحقق شرطًا معينًا، فالعمود المنصّف لقطعة مستقيمة هو المحل الهندسي لمجموعة نقاطٍ في المستوى، تقع كلٌّ منها على بُعدين متساويين من طرفَي القطعة المستقيمة، وهذا يقود إلى النظريتين الآتيتين:

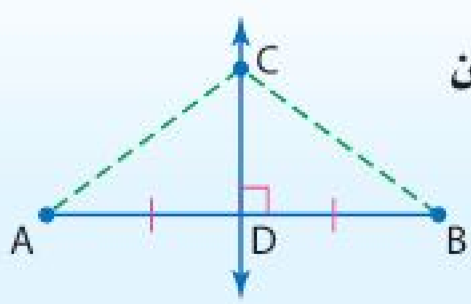
نظريتان — الأعمدة المنصّفة

أضف إلى مطويتك

4.1 نظريَة العمود المنصّف

كلّ نقطة على العمود المنصّف لقطعة مستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفَي القطعة المستقيمة.

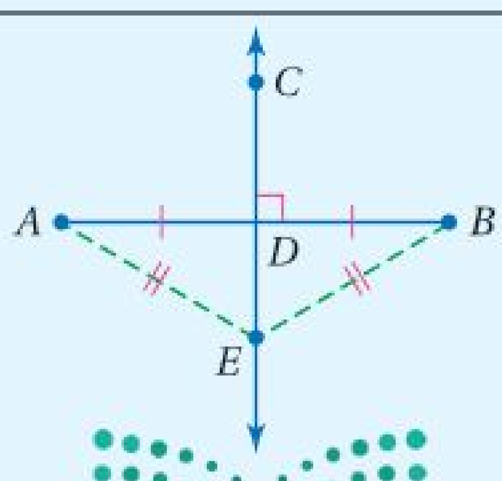
مثال: إذا كان $\overleftrightarrow{CD}$ عمودًا منصّفًا لِـ $\overline{AB}$ ،
فإن $AC = BC$.



4.2 عكس نظريَة العمود المنصّف

كل نقطة على بُعدين متساويين من طرفي قطعة مستقيمة تقع على العمود المنصّف لتلك القطعة.

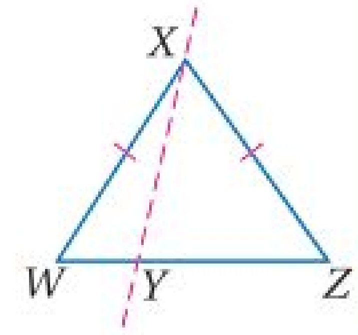
مثال: إذا كان $AE = BE$ ، و $\overleftrightarrow{CD}$ هو العمود المنصّف لِـ $\overline{AB}$،
فإن E تقع على $\overleftrightarrow{CD}$.



سوف تبرهن النظريتين 4.1, 4.2 في السؤالين 27, 29 .

إرشادات للدراسة

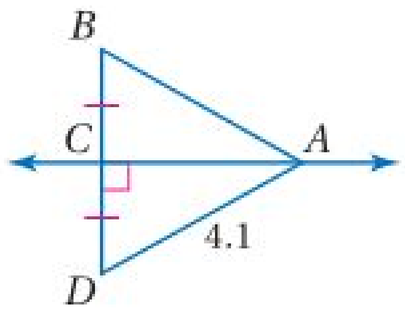
المعلومة $WX = ZX$ لوحدها لا تعدُّ كافية لاستنتاج أن $\overleftrightarrow{XY}$ عمود منصف لـ $\overline{WZ}$.



مثال 1 استعمال نظريات العمود المنصَف

أوجد كلّ قياس مما يأتي :

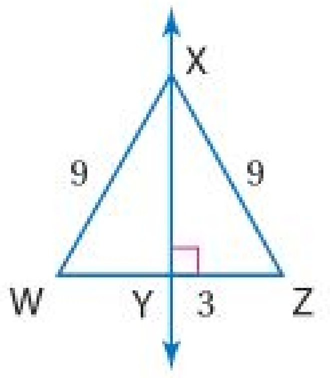
a) AB



من المعطيات في الشكل المجاور ، نعلم أن $\overleftrightarrow{CA}$ عمودٌ منصّف لِـ $\overline{BD}$

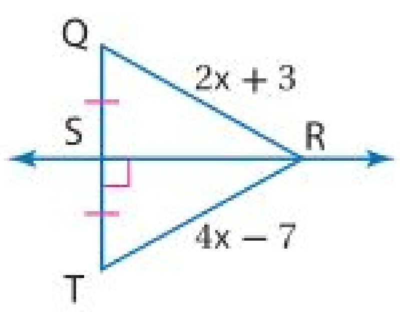
$AB = AD$	نظريّة العمود المنصَف
$AB = 4.1$	عوّض

b) WY



$WX = ZX, \overleftrightarrow{XY} \perp \overline{WZ}$	معطيات
$\overleftrightarrow{XY}$ عمود منصّف لِـ $\overline{WZ}$	عكس نظرية العمود المنصَف
$WY = YZ$	تعريف منصَف قطعة مستقيمة
$WY = 3$	عوّض

c) RT

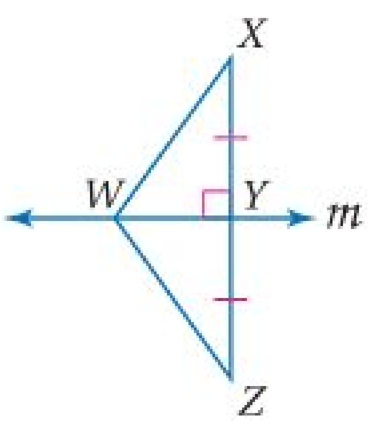


$\overleftrightarrow{SR}$ عمود منصّف $\overline{QT}$.

$RT = RQ$	نظريّة العمود المنصَف
$4x - 7 = 2x + 3$	عوّض
$2x - 7 = 3$	اطرح $2x$ من الطرفين
$2x = 10$	اجمع 7 إلى الطرفين
$x = 5$	اقسم الطرفين على 2

إذن $RT = 4(5) - 7 = 13$.

✓ تحقق من فهمك

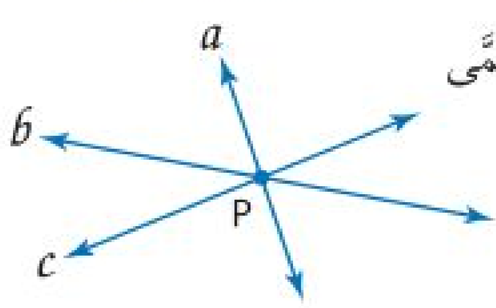


1A) إذا كان $WZ = 25.3$ ، $YZ = 22.4$ ، $WX = 25.3$ ، فأوجد طول $\overline{XY}$.

1B) إذا كان m عمودًا منصّفًا لِـ $\overline{XZ}$ ، $WZ = 14.9$، فأوجد طول $\overline{WX}$.

1C) إذا كان m عمودًا منصّفًا لِـ $\overline{XZ}$ ، $WX = 4a - 15$, $WZ = a + 12$ فأوجد طول $\overline{WX}$.

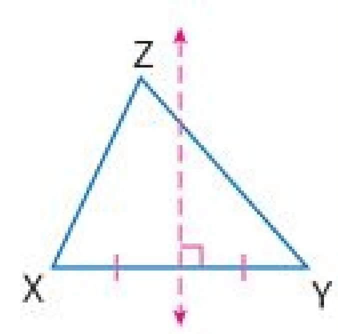
عندما تتقاطع ثلاثة مستقيمات أو أكثر في نقطة مشتركة، فإنّ هذه المستقيمات تُسمّى **مستقيمات متلاقية**. والنقطة التي تلتقي فيها المستقيمات تسمّى **نقطة التلاقي**. وبما أنّ لكل مثلث ثلاثة أضلاع، فإنّ له ثلاثة أعمدة منصّفة. وهذه الأعمدة المنصّفة هي مستقيمات متلاقية. وتسمى نقطة تلاقي الأعمدة المنصّفة **مركز الدائرة الخارجية للمثلث**.



تتلاقى المستقيمات a, b, c في النقطة P.

إرشادات للدراسة

العمود المنصَف ليس من الضروري أن يمرَّ العمود المنصَف لضلع مثلث برأس المثلث المقابل . فمثلًا في $\triangle XYZ$ أدناه العمود المنصَف لـ $\overline{XY}$ لا يمرُّ بالرأس Z.

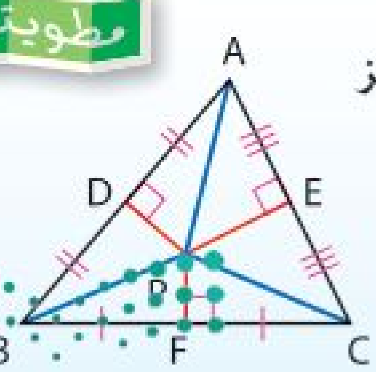


نظرية 4.3 نظرية مركز الدائرة الخارجية للمثلث.

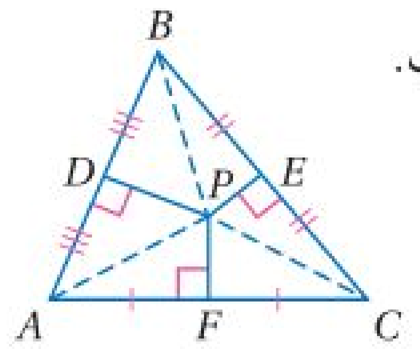
أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تلتقي الأعمدة المنصَفة لأضلاع مثلث في نقطة تُسمَى مركز الدائرة الخارجية للمثلث، وهي دائرة تمر برؤوس المثلث، وهي على أبعاد متساوية من الرؤوس.

مثال: إذا كانت P مركز الدائرة الخارجية للمثلث $\triangle ABC$ ، فإنّ $PB = PA = PC$



برهان نظرية مركز الدائرة الخارجية للمثلث



المعطيات: $\overline{PD}, \overline{PF}, \overline{PE}$ أعمدة منصّفة للأضلاع $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$ على الترتيب.

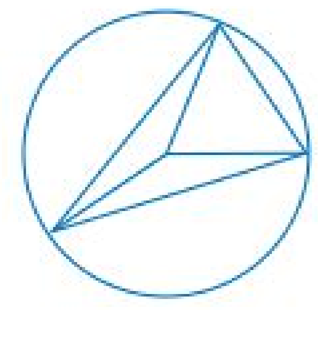
المطلوب: $AP = CP = BP$

برهان حرّ:

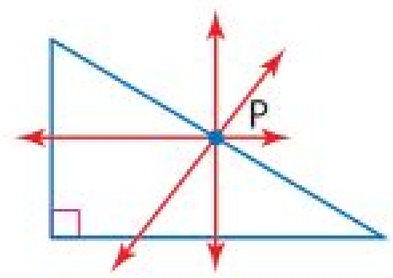
بما أنّ P تقع على العمود المنصّف لِـ $\overline{AC}$، فإنها متساوية البُعد عن A , C .
أي أن $AP = CP$. والعمود المنصّف لِـ $\overline{BC}$ يمر أيضًا بالنقطة P. لذلك يكون $CP = BP$ ، وتبعًا لخاصيّة التعدّي لعلاقة المساواة يكون $AP = BP$ ؛ إذن $AP = CP = BP$.

إرشادات للدراسة

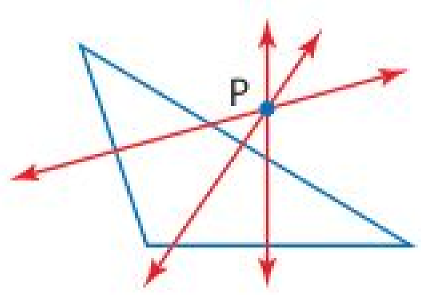
مركز الدائرة الخارجية للمثلث: هو مركز الدائرة التي تمر برؤوس هذا المثلث.



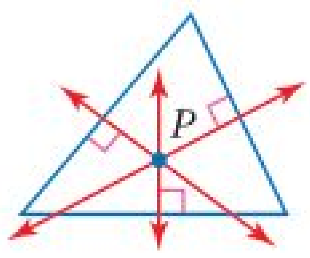
يمكن أن يقع مركز الدائرة الخارجية للمثلث داخل المثلث أو خارجه أو على أحد أضلاعه.



مثلث قائم الزاوية



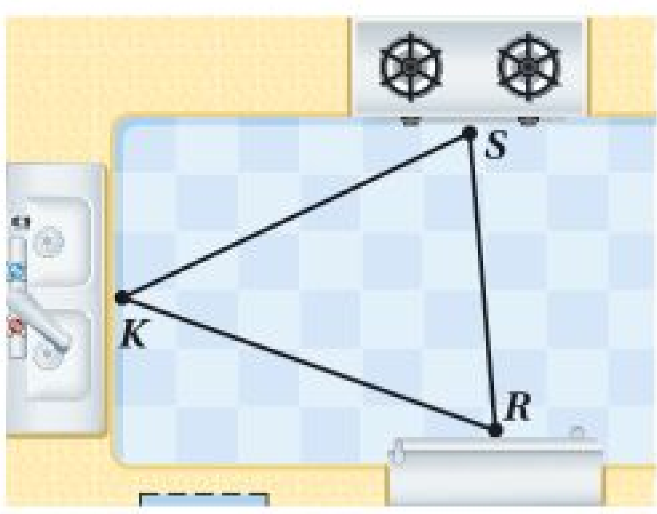
مثلث منفرج الزاوية



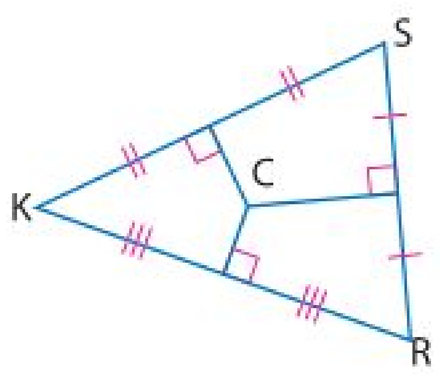
مثلث حاد الزوايا

مثال 2 من واقع الحياة استعمال نظريّة مركز الدائرة الخارجية للمثلث

تصميم داخلي: تطبيقًا للفكرة التي وردت في فقرة (لماذا؟)، إذا وُضع فرن الطبخ S ومصدر الماء K والثلاجة R في مطبخ كما في الشكل المجاور. أوجد النقطة التي تكون على أبعاد متساوية من النقاط S, K, R .



بحسب نظرية مركز الدائرة الخارجية للمثلث، يمكن تعيين النقطة التي تكون على أبعاد متساوية من النقاط الثلاث باستعمال الأعمدة المنصّفة لأضلاع المثلث المتكون من هذه النقاط.



انسخ $\triangle SKR$ واستعمل المسطرة والمنقلة لرسم الأعمدة المنصفة لأضلاعه، فتكون النقطة C مركز الدائرة الخارجية للمثلث SKR . وهي النقطة المطلوبة.

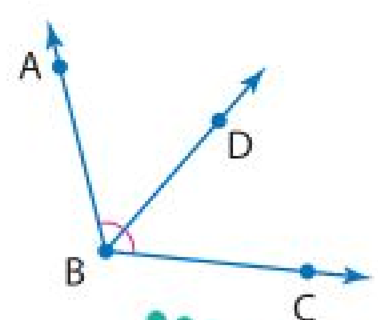
الربط مع الحياة

يتركز معظم النشاط داخل المطبخ حول ثلاث مناطق عمل أساسية هي: مصدر الماء، الثلاجة، فرن الطبخ، ويجب ألَّا يزيد مجموع أطوال الأضلاع الثلاثة لمثلث منطقة العمل على سبعة أمتار.

تحقق من فهمك

2) يريد عليّ أن يضع مرشَّة الماء على أبعاد متساوية من رؤوس حديقته المثلثة الشكل . فأين يتعين عليه وضع المرشّة؟

منصفات الزوايا: تعلم أنّ منصّف الزاوية يقسمها إلى زاويتين متطابقتين، كما يمكن أن يوصف منصّف الزاوية بأنّه المحل الهندسي للنقاط الواقعة داخل الزاوية، وتكون على أبعاد متساوية من ضلعَيها. ويقود هذا الوصف إلى النظريتين الآتيتين:

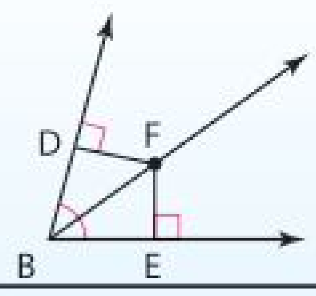


$\overrightarrow{BD}$ منصف لِـ $\angle ABC$.

نظريتان — منصّفات الزوايا

أضف إلى مطويتك

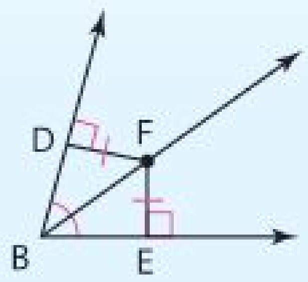
4.4 نظرية منصّف الزاوية



كل نقطة تقع على منصّف زاوية تكون على بُعدين متساويين من ضلعيها.

مثال: إذا كان $\overrightarrow{BF}$ منصّفًا لـ $\angle DBE$، وكان $\overline{FD} \perp \overrightarrow{BD}$, $\overline{FE} \perp \overrightarrow{BE}$
فإن $DF = FE$.

4.5 عكس نظرية منصّف الزاوية



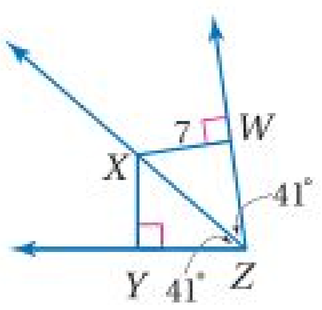
كل نقطة تقع داخل الزاوية وتكون على بُعدين متساويين من ضلعيها فإنها تكون واقعة على منصّف الزاوية.

مثال: إذا كان $\overline{FD} \perp \overrightarrow{BD}, \overline{FE} \perp \overrightarrow{BE}, DF = FE$ ،
فإن $\overrightarrow{BF}$ ينصّف $\angle DBE$

ستبرهن النظريتين 4.5 ,4.4 في السؤالين 32,30

مثال 3 استعمال نظريتَي منصّفات الزوايا

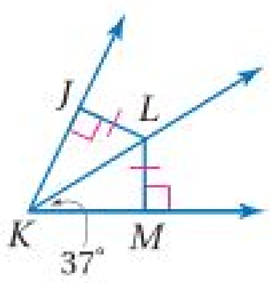
أوجد كلّ قياس مما يأتي :



a) XY

$XY = XW$ نظريّة منصّف الزاوية

$XY = 7$ عوّض



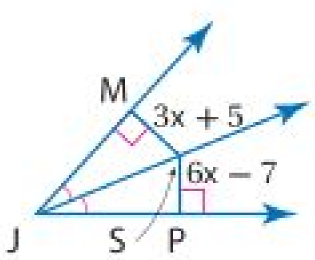
b) $m\angle JKL$

بما أن $\overline{LJ} \perp \overrightarrow{KJ}$, $\overline{LM} \perp \overrightarrow{KM}$, $LJ = LM$ ، فإن L على بعدين متساويين من ضلعي $\angle JKM$. وبحسب عكس نظرية منصّف الزاوية، فإن $\overrightarrow{KL}$ ينصّف $\angle JKM$

$\angle JKL \cong \angle LKM$ تعريف منصّف الزاوية

$m\angle JKL = m\angle LKM$ تعريف الزوايا المتطابقة

$m\angle JKL = 37°$ عوّض



c) SP

$SP = SM$ نظريّة منصّف الزاوية

$6x - 7 = 3x + 5$ عوّض

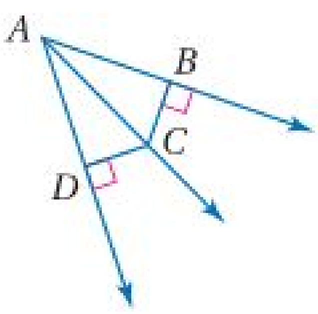
$3x - 7 = 5$ اطرح $3x$ من الطرفين

$3x = 12$ اجمع 7 إلى الطرفين

$x = 4$ اقسم الطرفين على 3

إذن $SP = 6(4) - 7 = 17$.

تحقق من فهمك



3A) إذا كان: $m\angle BAC = 38°$, $BC = 5$, $DC = 5$ ، فأوجد $m\angle DAC$

3B) إذا كان: $m\angle BAC = 40°$, $m\angle DAC = 40°$, $DC = 10$ ، فأوجد BC

3C) إذا كان $\overrightarrow{AC}$ ينصّف $\angle DAB$ ، و $BC = 4x + 8$, $DC = 9x - 7$
فأوجد BC

إرشادات للدراسة

منصّف الزاوية

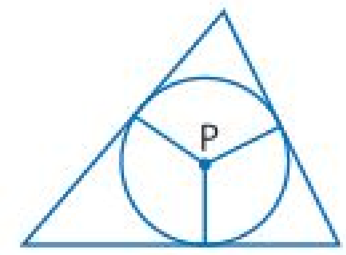
لا تعدّ المعلومة $JL = LM$ في الفرع b لوحدها كافية لاستنتاج أن $\overrightarrow{KL}$ ينصّف $\angle JKM$.

وكما هو الحال في الأعمدة المنصّفة، بما أن للمثلث ثلاث زوايا، فإنّ له ثلاثة منصّفات للزوايا تتلاقى في نقطة تُسمّى **مركز الدائرة الداخلية للمثلث**.

قراءة الرياضيات

مركز الدائرة الداخلية للمثلث

هو مركز الدائرة التي تقطع (تتماس مع) كل ضلع من أضلاع المثلث في نقطة واحدة. ولهذا السبب فإن مركز هذه الدائرة يقع داخل المثلث دائمًا.



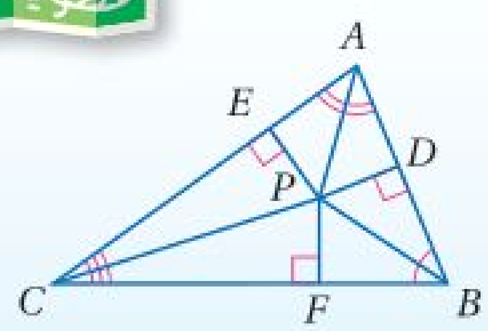
نظريّة 4.6 نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تتقاطع منصّفات زوايا أي مثلث عند نقطة تُسمّى مركز الدائرة الداخلية للمثلث، وهي على أبعاد متساوية من أضلاعه.

مثال: إذا كانت P مركز الدائرة الداخلية للمثلث ABC ،

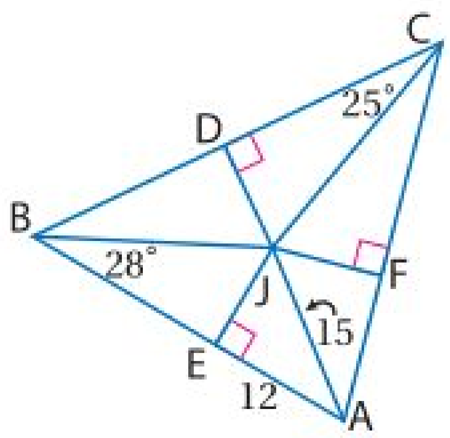
فإنّ $PD = PE = PF$



ستبرهن النظرية 4.6 في السؤال 28

مثال 4 استعمال نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث

أوجد كلًّا من القياسين الآتيين، إذا كانت J مركز الدائرة الداخلية لِـ $\triangle ABC$.



a) JF

بما أن J على أبعادٍ متساوية من أضلاع $\triangle ABC$، بحسب نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث، فإن $JF = JE$ ؛ لذا أوجد JE باستعمال نظريّة فيثاغورس.

$a^2 + b^2 = c^2$	نظرية فيثاغورس
$JE^2 + 12^2 = 15^2$	عوّض
$JE^2 + 144 = 225$	$12^2 = 144, 15^2 = 225$
$JE^2 = 81$	اطرح 144 من الطرفين
$JE = \pm 9$	خذ الجذر التربيعي للطرفين

وبما أن الطول لا يمكن أن يكون سالبًا؛ إذن نأخذ الجذر التربيعي الموجب فقط.
وبما أن $JE = JF$ فإنّ $JF = 9$

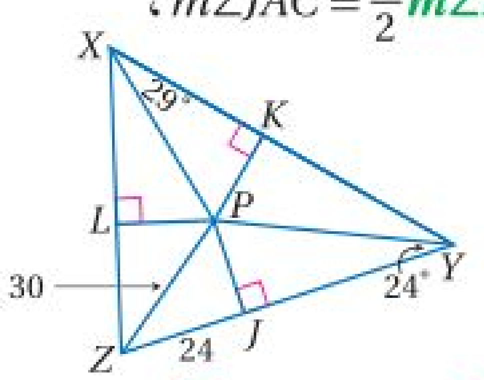
b) $m\angle JAC$

بما أنّ $\overrightarrow{BJ}$ ينصّف $\angle CBE$ ، فإنّ $m\angle CBE = 2m\angle JBE$ ؛ إذن $m\angle CBE = 2(28°) = 56°$.
وبالمثل؛ $m\angle DCF = 2m\angle DCJ$ ؛ إذن $m\angle DCF = 2(25°) = 50°$.

$m\angle CBE + m\angle DCF + m\angle FAE = 180°$	نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث
$56° + 50° + m\angle FAE = 180°$	$m\angle CBE = 56°; m\angle DCF = 50°$
$106° + m\angle FAE = 180°$	بسّط.
$m\angle FAE = 74°$	اطرح 106° من الطرفين.

وبما أنّ $\overline{AJ}$ ينصّف $\angle FAE$، فإنّ $2m\angle JAC = m\angle FAE$. وهذا يعني أن $m\angle JAC = \frac{1}{2} m\angle FAE$ ،
إذن $m\angle JAC = \frac{1}{2}(74°) = 37°$.

تحقق من فهمك



إذا كانت P مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle XYZ$، فأوجد القياسين الآتيين:

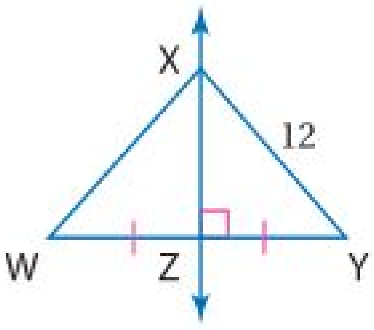
4A) PK

4B) $\angle LZP$

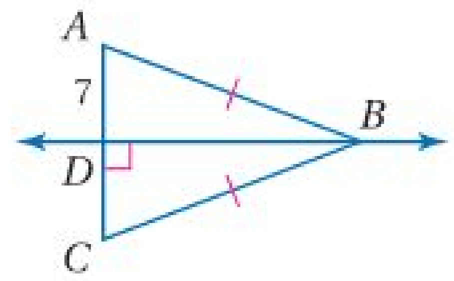
تأكـد

المثال 1 أوجد كلَّ قياسٍ مما يأتي:

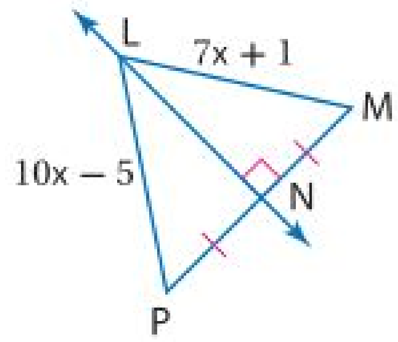
1) XW



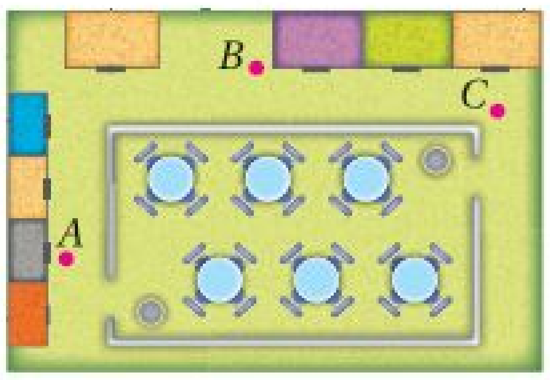
2) AC



3) LP

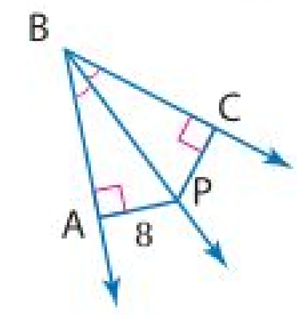


المثال 2 **4)** **إعلانات:** يقوم أربعة أصدقاء بتوزيع إعلانات على الناس في ساحة سوق تجاري. فحمل ثلاثة منهم ما يستطيعون من الإعلانات وأخذوا مواقعهم كما في الصورة المجاورة. أمّا الرابع فكان يزوّدهم بالإعلانات. انسخ المواقع A, B, C في دفترك، ثم عيّن مكان الصديق الرابع D على أن يكون على أبعادٍ متساوية من أصدقائه الثلاثة.

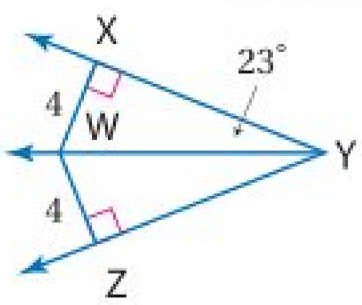


المثال 3 أوجد كلَّ قياسٍ مما يأتي:

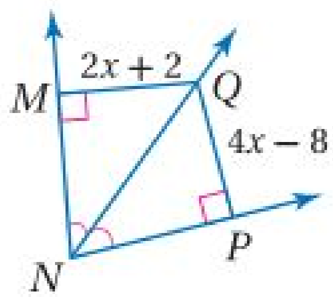
5) CP



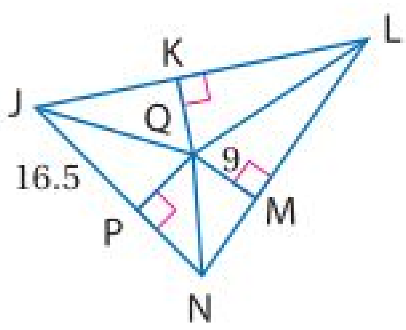
6) $\angle WYZ$



7) QM



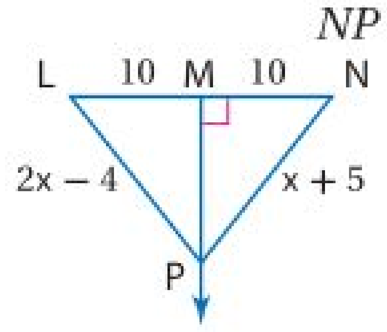
المثال 4 **8)** إذا كانت Q مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle JLN$، فأوجد طول $\overline{JQ}$.



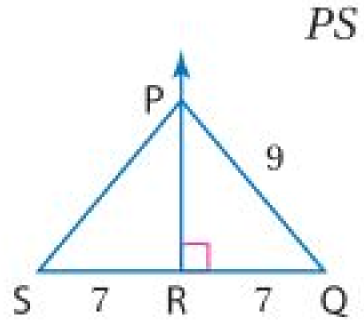
تدرب وحل المسائل

المثال 1 أوجد كلَّ قياسٍ مما يأتي:

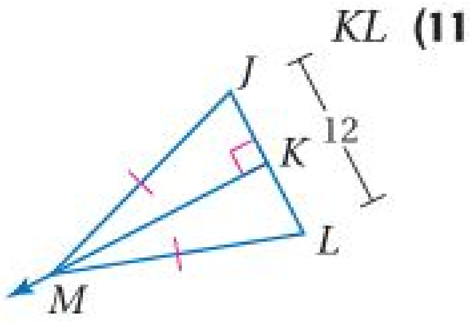
9) NP



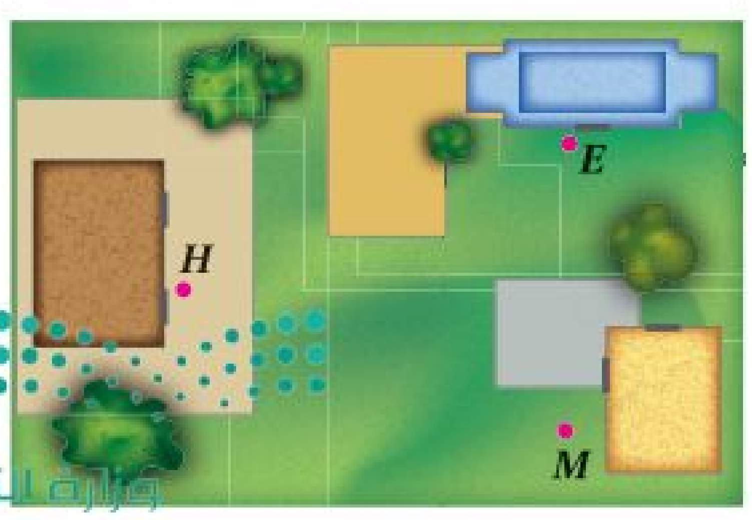
10) PS



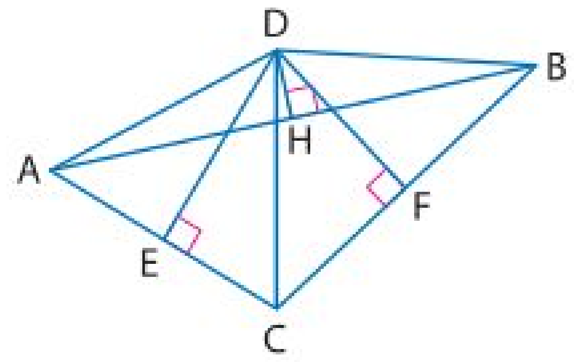
11) KL



المثال 2 **12)** **مدرسة:** يتكون مجمّع مدارس من مدرسة ابتدائية E ومدرسة متوسطة M ومدرسة ثانوية H في المواقع المبيّنة في الصورة المجاورة. انسخ مواقع النقاط E, M, H في دفترك، ثم عيّن موقع موقف الحافلات، على أن يكون على أبعاد متساوية من المدارس الثلاث.



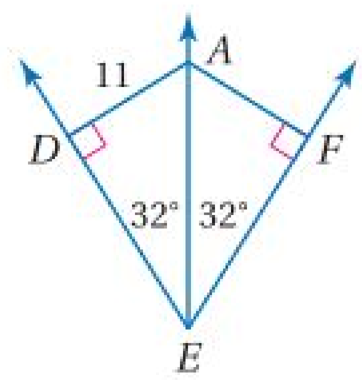
النقطة D مركز الدائرة التي تمرُّ برؤوس $\triangle ABC$. اكتب القطع المستقيمة التي تطابق القطعة المعطاة في كل سؤال مما يأتي:

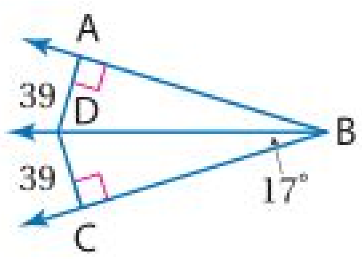


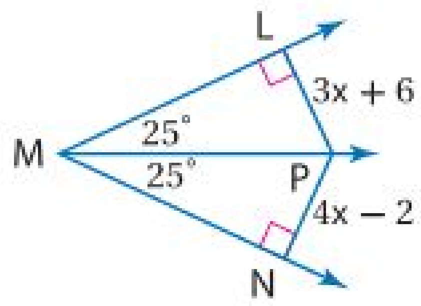
13) $\overline{AD}$ 14) $\overline{AH}$

المثال 3 أوجد قياس كلٍّ ممَّا يأتي :

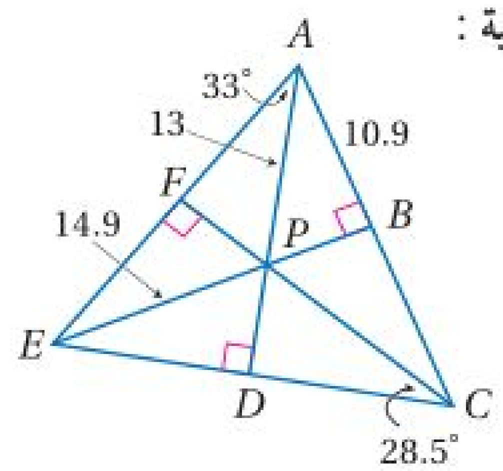
15) AF 16) $\angle DBA$ 17) PN







المثال 4 إذا كانت النقطة P مركز الدائرة الداخلية لِـ $\triangle AEC$ ، فأوجد كلًّا من القياسات الآتية :



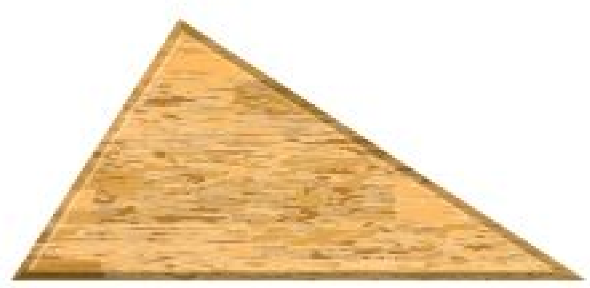
18) PB

19) DE

20) $\angle DAC$

21) $\angle DEP$

22) **تصميم داخلي:** توضع زهرية فضيّة عند مركز سطح الطاولة المبينة في الشكل أدناه، بحيث تكون على أبعاد متساوية من حوافه. انسخ الرسم المجاور في دفترك، وبيّن أين ستضع الزهرية. وضح إجابتك.



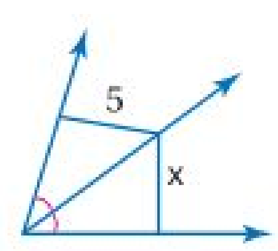
الربط مع الحياة

مهندس التصميم الداخلي

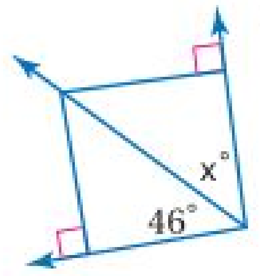
يزيّن مهندس الديكور المكان؛ بحيث يجعله بهيج المنظر ومريحًا للإقامة أو العمل فيه. ويجب على مهندسي الديكور أن يكونوا على معرفة بالألوان وتصاميم الإنارة وتخطيط المكان.

حدّد ما إذا كانت المعطيات في كل شكل مما يأتي كافية لإيجاد قيمة x. وضِّح إجابتك.

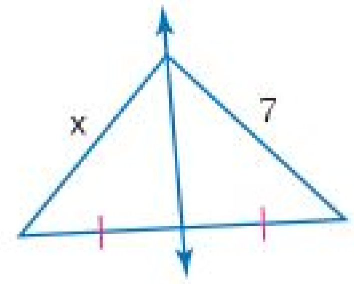
23)



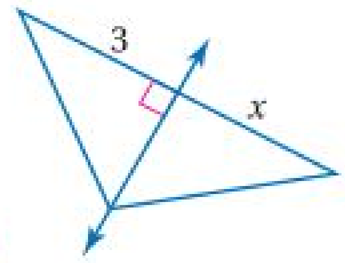
24)



25)



26)

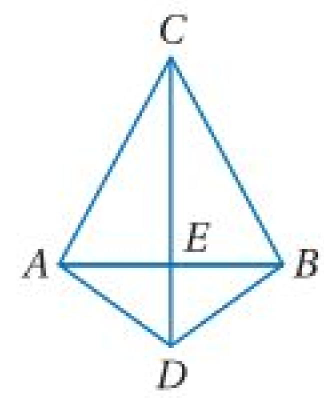


برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لكلٍّ من النظريتين الآتيتين:

27) النظرية 4.2

المعطيات: $\overline{CA} \cong \overline{CB}, \overline{AD} \cong \overline{BD}$

المطلوب: النقطتان C, D تقعان على العمود المنصّف لـ $\overline{AB}$



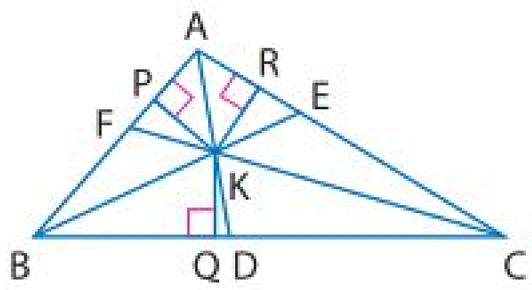
28) النظرية 4.6

المعطيات: $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ منصّفات لزوايا $\triangle ABC$،

$\overline{KP} \perp \overline{AB}, \overline{KQ} \perp \overline{BC}$

$\overline{KR} \perp \overline{AC}$

المطلوب: $KP = KQ = KR$



برهان: اكتب برهانًا حرًّا لكلٍّ من النظريتين الآتيتين:

29) النظرية 4.1

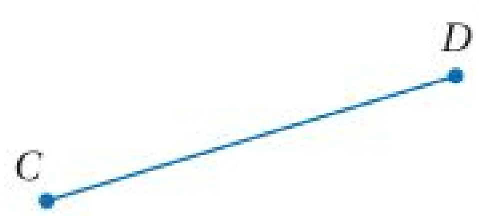
30) النظرية 4.5

31) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة العمود المنصِّف للقطعة المستقيمة التي إحداثيًا نقطتَي طرفَيها هما $A(-3, 1)$, $B(4, 3)$. ووضِّح إجابتك.

32) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 4.4.

33) **هندسة إحداثيّة:** أوجد إحداثيَّي مركز الدائرة الخارجية للمثلث الذي إحداثيات رؤوسه هي $A(0, 0), B(0, 6), C(10, 0)$. وضح إجابتك.

34) **المحل الهندسي:** انظر إلى القطعة المستقيمة $\overline{CD}$، وصِف مجموعة النقاط في الفضاء التي يبعد كلٌّ منها بُعدين متساويين عن C, D



مراجعة المفردات

المحل الهندسي
مجموعة من النقاط تحقق شرطًا معينًا.

مسائل مهارات التفكير العليا

35) **مسألة مفتوحة:** ارسم مثلثًا، على أن يقع مركز الدائرة الداخلية له داخله، و يقع مركز الدائرة التي تمر برؤوسه خارجه. برّر صحّة رسمك باستعمال مسطرة غير مدرجة وفرجار لإيجاد نقطتَي التلاقي.

تبرير: حدّد ما إذا كانت كل عبارة من العبارتين الآتيتين صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا أو ليست صحيحة أبدًا. وبرّر إجابتك.

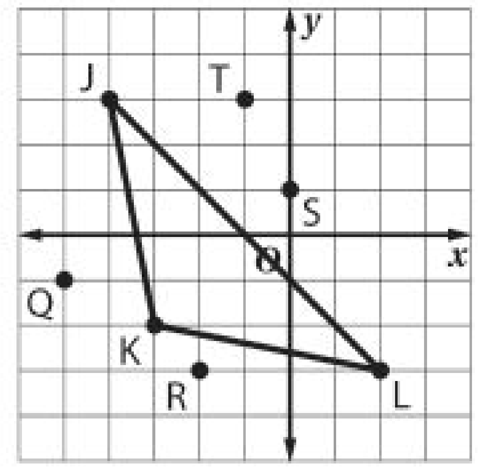
36) تتقاطع منصّفات زوايا المثلث عند نقطة تكون على أبعاد متساوية من رؤوسه.

37) في المثلث المتطابق الضلعين، يكون العمود المنصّف للقاعدة منصّفًا لزاوية الرأس المقابلة للقاعدة.

38) **اكتب:** قارن بين الأعمدة المنصّفة لأضلاع المثلث ومنصّفات زواياه مبيّنًا أوجه الشبه وأوجه الاختلاف وقارن بين نقطتَي التلاقي.

تدريب على اختبار

39) بأيّ نقطتين يمر العمود المنصّف للضلع $\overline{JL}$ في $\triangle JKL$؟



A T, K

B L, Q

C J, R

D S, K

40) إذا كانت $x \neq -3$ ، فإن $\frac{3x+9}{x+3}$ يساوي:

A $x+9$

B $x+3$

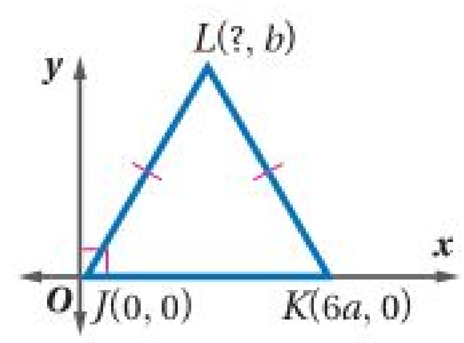
C x

D 3

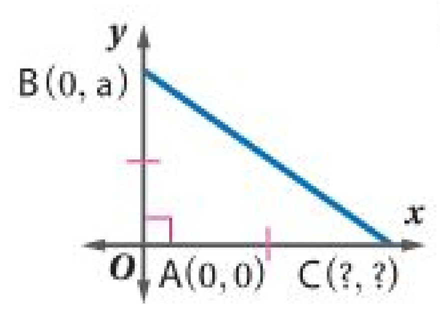
مراجعة تراكمية

عيّن الإحداثي المجهول في كلٍّ من المثلثات الآتية : (الدرس 7-3)

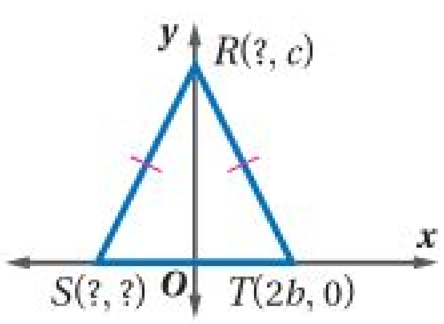
41)



42)



43)



أوجد البعد بين المستقيم والنقطة المعطاة في كلٍّ مما يأتي : (مهارة سابقة)

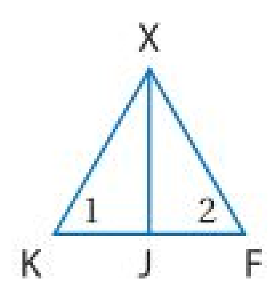
44) $y = 5, (-2, 4)$

45) $y = 2x + 2, (-1, -5)$

46) $2x - 3y = -9, (2, 0)$

استعد للدرس اللاحق

47) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين:



المعطيات: $\triangle XKF$ متطابق الأضلاع.

$\overline{XJ}$ تنصّف $\angle X$.

المطلوب: J نقطة منتصف $\overline{KF}$.

استكشاف **4-2** معمل الهندسة:

إنشاء القطع المتوسطة والارتفاعات
Constructing Medians and Altitudes

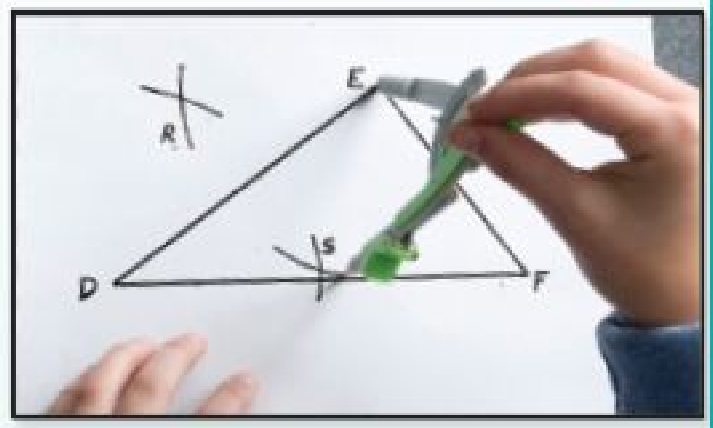
رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

القطعة المتوسطة في مثلث هي قطعة مستقيمة، طرفاها أحد رؤوس المثلث ونقطة منتصف الضلع المقابل لذلك الرأس.

ويمكنك استعمال طريقة تعيين نقطة المنتصف لقطعة مستقيمة لإنشاء قطعة متوسطة.

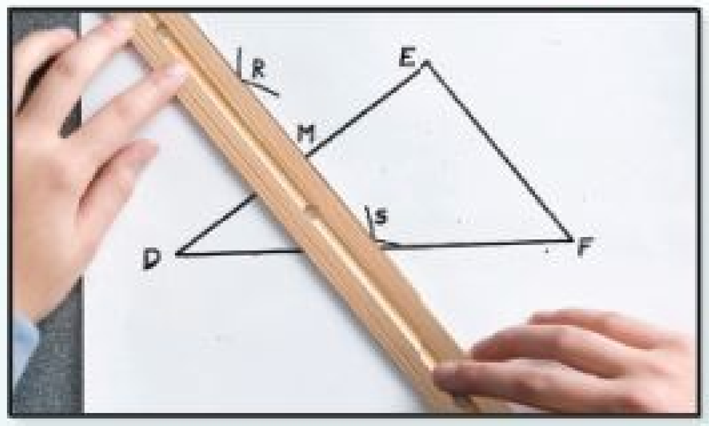
إنشاء هندسي 1 قطعة متوسطة لمثلث

الخطوة 1:



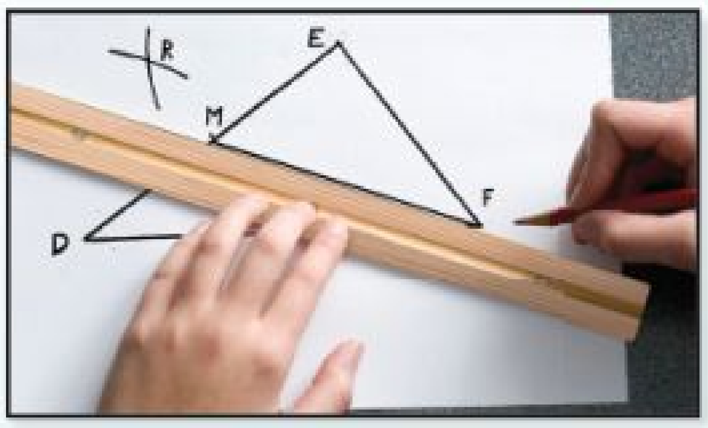
ثبت الفرجار عند الرأس D ثم عند الرأس E؛ لترسم أقواسًا متقاطعة فوق $\overline{DE}$ وتحتها، وسمّ نقطتَي التقاطع R, S.

الخطوة 2:



استعمل مسطرة لإيجاد نقطة تقاطع $\overline{RS}, \overline{DE}$ وسمّ نقطة المنتصف M.

الخطوة 3:

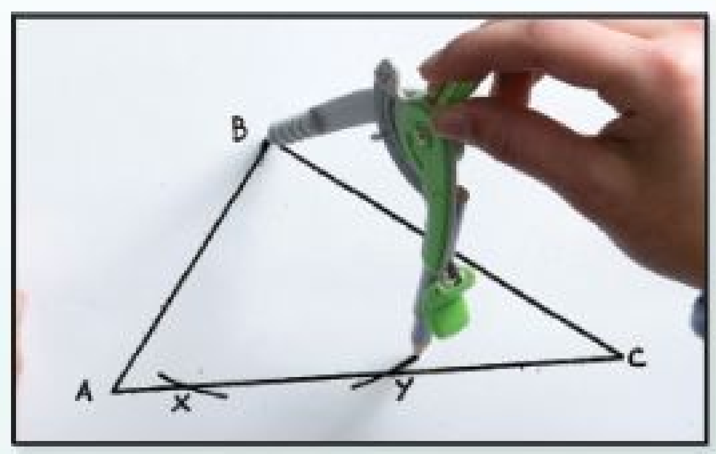


ارسم مستقيمًا يمّر بالنقطتين F, M، فتكون $\overline{FM}$ قطعة متوسطة لـ $\triangle DEF$.

ارتفاع المثلث هو قطعة مستقيمة من أحد رؤوس المثلث إلى المستقيم الذي يحوي الضلع المقابل، وتكون عموديّةً عليه.

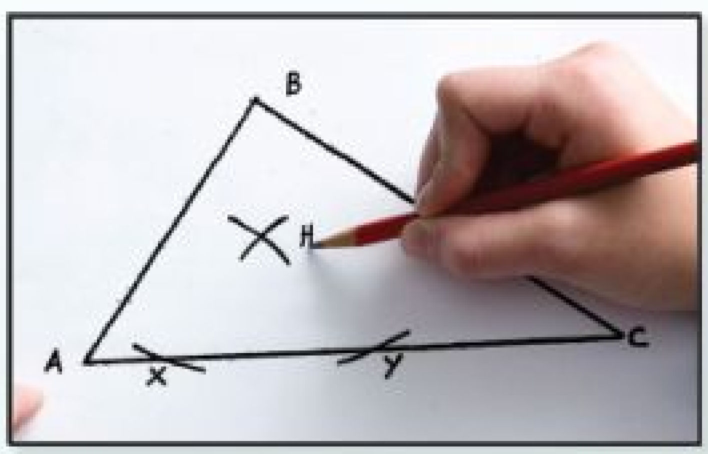
إنشاء هندسي 2 ارتفاع المثلث

الخطوة 1:



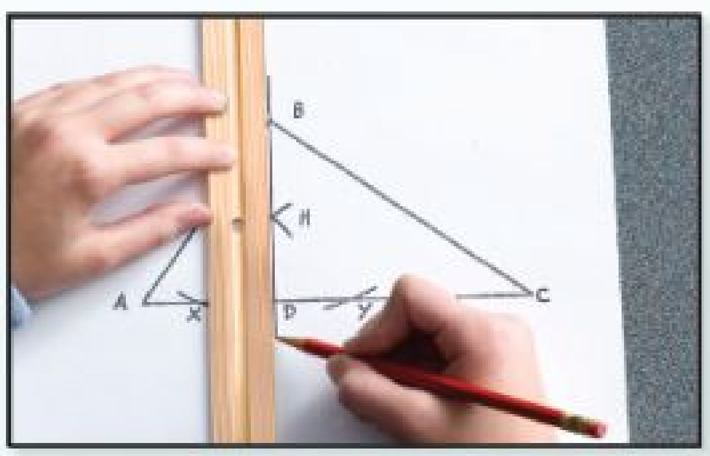
ثبّت الفرجار عند الرأس B، وارسم قوسين يقطعان $\overline{AC}$ في النقطتين X, Y.

الخطوة 2:



عدّل فتحة الفرجار على أن تكون أكبر من $\frac{1}{2}XY$ وثبّته عند X، وارسم قوسًا فوق $\overline{AC}$، ثم استعمل الفتحة نفسها وارسم قوسًا آخر من Y، وسمّ نقطة تقاطع القوسين H.

الخطوة 3:



استعمل مسطرة غير مدرّجة لرسم $\overleftrightarrow{BH}$، وسمّ نقطة تقاطع $\overline{AC}$، $\overleftrightarrow{BH}$ بالحرف D، فتكون $\overline{BD}$ ارتفاعًا لـ $\triangle ABC$ وهي عموديّة على $\overline{AC}$.

التمثيل والتحليل:

1) أنشئ القطعتين المتوسطتين على الضلعين الآخرين في $\triangle DEF$، ماذا تلاحظ بالنسبة للقطع المتوسطة للمثلث؟
2) أنشئ الارتفاعين الآخرين على الضلعين الآخرين في $\triangle ABC$. ماذا تلاحظ؟

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

4-2 القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث
Medians and Altitudes of Triangle

فيما سبق:

درستُ الأعمدة المنصِّفة ومنصفات الزوايا في المثلث واستعمالها.

والآن:

- أتعرَّف القطع المتوسطة في المثلث وأستعملها.
- أتعرَّف الارتفاعات في المثلث وأستعملها.

المفردات:

القطعة المتوسطة
median

مركز المثلث
centroid

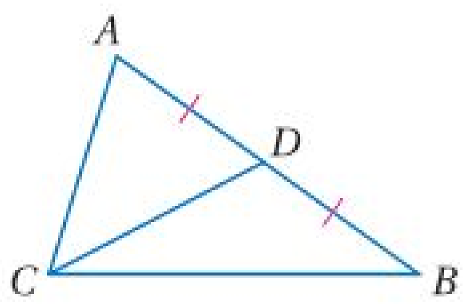
الارتفاع
altitude

ملتقى ارتفاعات المثلث
orthocenter

لماذا؟

صمّم مهندس طاولة خاصة لأحد الزبائن، يتكون سطحها من لوح زجاجي مثلث الشكل يرتكز على دعامة واحدة، ولتحقيق ذلك فهو في حاجة إلى إيجاد النقطة التي يضع عندها الدعامة لكي يحافظ على اتزانها، ويمكن إيجاد هذه النقطة برسم القطع المتوسطة، وتعيين نقطة تقاطعها.

القطع المتوسطة : **القطعة المتوسطة** لمثلث قطعة مستقيمة طرفاها أحد رؤوس المثلث ونقطة منتصف الضلع المقابل لذلك الرأس.



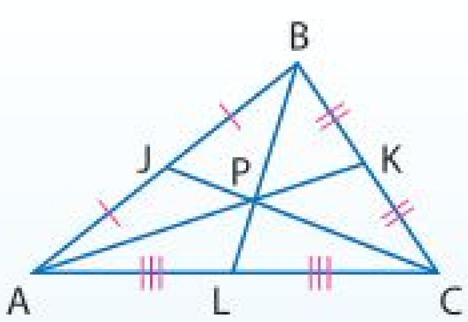
$\overline{CD}$ قطعة متوسطة في $\triangle ABC$.

ولكل مثلث ثلاث قطع متوسطة تتلاقَى في نقطة تُسمّى **مركز المثلث**، وتقع داخله دائمًا.

نظرية 4.7 نظرية مركز المثلث

أضف إلى مطويتك

يبعد مركز المثلث عن كل رأس من رؤوس المثلث ثُلُثَي طول القطعة المستقيمة الواصلة بين ذلك الرأس ومنتصف الضلع المقابل له.

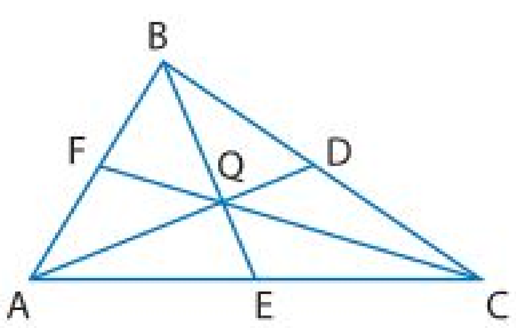


مثال: إذا كانت P مركز $\triangle ABC$ ، فإنّ

$$AP = \frac{2}{3}AK,\ BP = \frac{2}{3}BL,\ CP = \frac{2}{3}CJ$$

مثال 1 استعمال نظرية مركز المثلث

إذا كانت النقطة Q مركز $\triangle ABC$، $BE = 9$.
فأوجد كلًّا من QE , BQ .



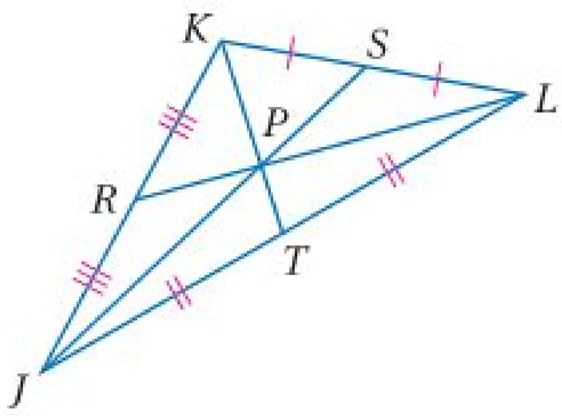
$BQ = \frac{2}{3}\ BE$	نظرية مركز المثلث
$= \frac{2}{3}(9) = 6$	$BE = 9$
$BQ + QE = 9$	جمع أطوال القطع المستقيمة
$6 + QE = 9$	$BQ = 6$
$QE = 3$	اطرح 6 من الطرفين

تحقق من فهمك

في $\triangle ABC$ أعلاه، إذا كان $FC = 15$ ، فأوجد طولَي القطعتين الآتيتين :

(1A FQ **(1B** QC

مثال 2 استعمال نظرية مركز المثلث



في $\triangle JKL$، إذا كان $PT = 2$، فأوجد KP.

بما أنّ $\overline{JR} \cong \overline{RK}$، فإن R نقطة منتصف $\overline{JK}$، وتكون $\overline{LR}$ قطعة متوسطة في $\triangle JKL$، وبالمثل نستنتج أن S, T هما نقطتا منتصفَي $\overline{KL}, \overline{LJ}$ على الترتيب؛ لذا فإن $\overline{KT}, \overline{JS}$ قطعتان متوسطتان في $\triangle JKL$، لذلك فالنقطة P هي مركز $\triangle JKL$.

$KP = \frac{2}{3}KT$	نظرية مركز المثلث
$KP = \frac{2}{3}(KP + PT)$	جمع القطع المستقيمة والتعويض
$KP = \frac{2}{3}(KP + 2)$	$PT = 2$
$KP = \frac{2}{3}KP + \frac{4}{3}$	خاصيّة التوزيع
$\frac{1}{3}KP = \frac{4}{3}$	اطرح $\frac{2}{3}KP$ من الطرفين
$KP = 4$	اضرب الطرفين في 3

تحقق من فهمك

في $\triangle JKL$ أعلاه، إذا كان $RP = 3.5, JP = 9$، فأوجد طولَي القطعتين الآتيتين:

2A) PL **2B)** PS

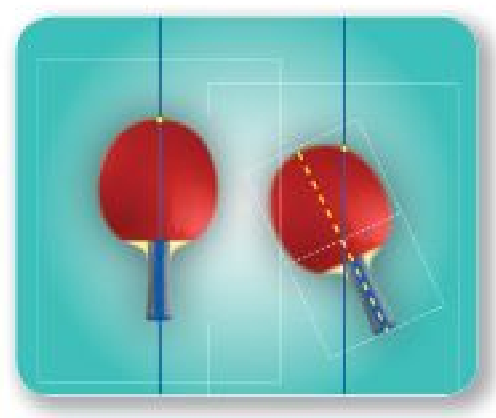
إرشادات للدراسة

استعمال الحسّ العددي

في المثال 2، يمكنك أيضًا استعمال الحسّ العددي لإيجاد KP. بما أن $KP = \frac{2}{3}KT$، فإن $PT = \frac{1}{3}KT$ وكذلك $KP = 2PT$؛ لذا إذا كان $PT = 2$ فإن $KP = 2(2) = 4$.

جميع المضلعات لها نقطة اتزان، وهذه النقطة تعتبر مركز ثقل الجسم، وهي النقطة التي يظهر فيها الجسم متوازنًا تحت تأثير الجاذبية الأرضية.

مثال 3 من واقع الحياة إيجاد المركز في المستوى الإحداثي



الربط مع الحياة

نقطة الاتزان (التعليق)

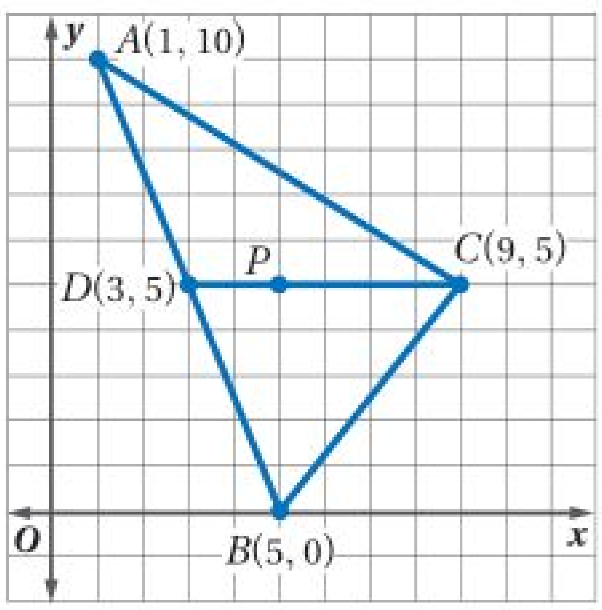
يمكن أن تحدد نقطة الاتزان لأي جسم، سواءً أكان على شكل مثلث أو غيره كما يأتي:

علق الجسم من أي نقطة، وعندما يتوقف عن التأرجح، ارسم مستقيمًا رأسيًّا من نقطة التعليق، ثم علقه مرة أخرى من نقطة ثانية وارسم مستقيمًا رأسيًّا منها، فتكون نقطة تقاطع المستقيمين هي نقطة الاتزان.

فن الأداء: في مهرجان رياضي يُخطط عبدالعزيز لاتزان قطع مثلثية من المعدن كما في الشكل المجاور، وعندما وُضع مثلث على مستوى إحداثي كانت رؤوسه عند النقاط $(1, 10), (5, 0), (9, 5)$. ما إحداثيات النقطة التي يجب على عبدالعزيز أن يثبّت المثلث عندها حتى يحفظه متوازنًا؟ وضح إجابتك.

افهم: تحتاج إلى إيجاد مركز المثلث من خلال الإحداثيات المعطاة، وستكون هذه هي النقطة التي سيتزن عندها المثلث.

خطّط: ارسم المثلث الذي رؤوسه $A(1, 10), B(5, 0), C(9, 5)$، وبما أن مركز المثلث هو النقطة التي تتلاقَى عندها القطع المتوسطة للمثلث؛ إذن استعمل نظرية نقطة المنتصف لإيجاد نقطة منتصف أحد أضلاع المثلث، فيكون مركز المثلث واقعًا على القطعة المتوسطة وعلى بُعدٍ من الرأس يساوي ثُلُثَي طول القطعة المتوسطة.



حل: مثّل $\triangle ABC$ بيانيًّا .

أوجد نقطة المنتصف D للضلع $\overline{AB}$ الذي طرفاه $A(1, 10)$, $B(5, 0)$.

$$D\left(\frac{1+5}{2}, \frac{10+0}{2}\right) = D(3, 5)$$

عيّن النقطة D ، ولاحظ أن $\overline{DC}$ أفقيّة، والمسافة من $D(3, 5)$ إلى $C(9, 5)$ تساوي $9 - 3$ ، أيْ 6 وحداتٍ.

فإذا كانت P مركز $\triangle ABC$ ، فإنّ $PC = \frac{2}{3}DC$ ؛ ولذا يقع المركز على بُعد $\frac{2}{3}(6)$ ، أو 4 وحدات إلى اليسار من C، وتكون إحداثيات P هي $(9 - 4, 5)$ أو $(5, 5)$.

إذن يتوازن المثلث عند النقطة $(5, 5)$.

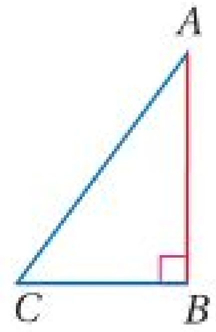
تحقق: استعمل قطعة متوسطة أخرى للتحقق من صحّة إجابتك. بما أنّ نقطة منتصف الضلع $\overline{AC}$ هي $F\left(\frac{1+9}{2}, \frac{10+5}{2}\right)$ أو $F(5, 7.5)$ ، وأن $\overline{BF}$ رأسيّة فإن المسافة من B إلى F تساوي $7.5 - 0$ ؛ أيْ 7.5 وحداتٍ، وعلى ذلك يكون $\overline{PB}$ يساوي $\frac{2}{3}(7.5)$ أيْ 5 ، إذن P تقع على بعد 5 وحداتٍ إلى أعلى من B.

وتكون إحداثيات P هي $(5, 0+5)$ أي $(5, 5)$. ✓

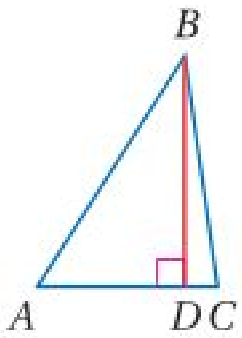
تحقق من فهمك

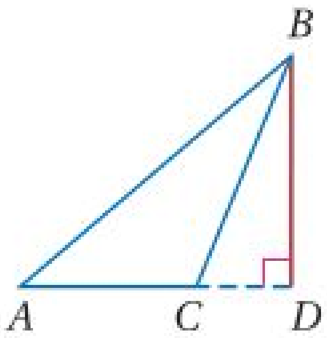
3) تقع رؤوس مثلث آخر عند النقاط $(0, 4)$, $(6, 11.5)$, $(12, 1)$، فما إحداثيات النقطة التي يتزن عندها هذا المثلث؟ وضّح إجابتك.

ارتفاعات المثلث: **ارتفاع المثلث** هو القطعة المستقيمة العمودية النازلة من أحد الرؤوس إلى المستقيم الذي يحوي الضلع المقابل لذلك الرأس، ويمكن أن يقع الارتفاع داخل المثلث أو خارجه أو على أحد أضلاعه.



$\overline{AB}$ هو الارتفاع إلى $\overline{CB}$.





$\overline{BD}$ هو الارتفاع من B إلى $\overline{AC}$.

قراءة الرياضيات

ارتفاع المثلث

يطلق اسم الارتفاع على القطعة وعلى طولها، ويفهم المقصود من سياق المسألة. ويستعمل الارتفاع لحساب مساحة المثلث.

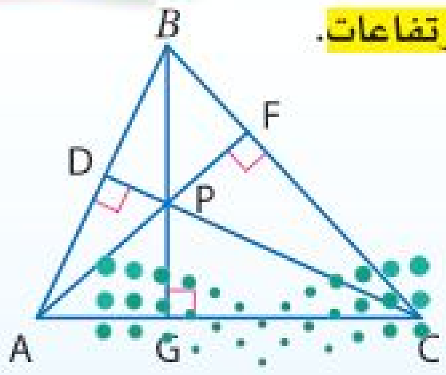
ولكل مثلث ثلاثة ارتفاعات، تتلاقى المستقيمات التي تحويها في نقطة مشتركة.

مفهوم أساسي — ملتقى الارتفاعات

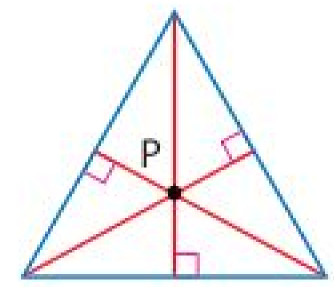
أضف إلى مطويتك

تتقاطع المستقيمات التي تحوي ارتفاعات أيّ مثلث في نقطة تُسمّى **ملتقى الارتفاعات**.

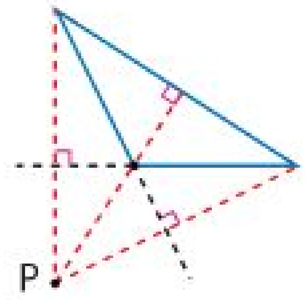
مثال: تتقاطع المستقيمات التي تحوي الارتفاعات $\overline{AF}, \overline{CD}, \overline{BG}$ عند النقطة P ، وهي ملتقى الارتفاعات للمثلث ABC .



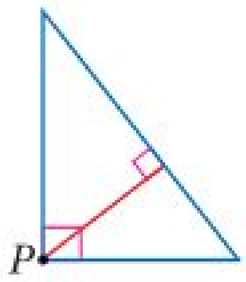
يمكن أن تلتقي الارتفاعات في مثلث داخله أو خارجه أو على أحد أضلاعه.



مثلث حاد الزوايا



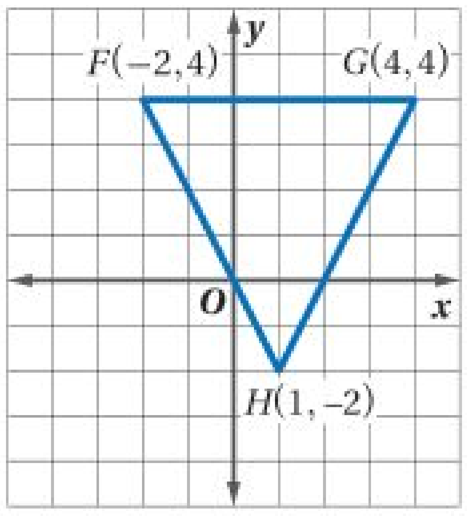
مثلث منفرج الزاوية



مثلث قائم الزاوية

مثال 4 إيجاد ملتقى الارتفاعات في المستوى الإحداثي

هندسة إحداثيّة: **إذا كانت رؤوس $\triangle FGH$ هي $F(-2, 4)$, $G(4, 4)$, $H(1, -2)$، فأوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعاته.**



الخطوة 1: مثّل $\triangle FGH$ بيانيًّا. ولإيجاد ملتقى الارتفاعات، أوجد نقطة تقاطع ارتفاعين من الارتفاعات الثلاثة.

الخطوة 2: أوجد معادلة الارتفاع من F إلى $\overline{GH}$

بما أن ميل $\overline{GH}$ يساوي $2 = \frac{4-(-2)}{4-1}$

فإنّ ميل الارتفاع العمودي على $\overline{GH}$ يساوي $-\frac{1}{2}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ صيغة النقطة والميل

$y - 4 = -\frac{1}{2}[x - (-2)]$ $(x_1, y_1) = F(-2, 4)$, $m = -\frac{1}{2}$

$y - 4 = -\frac{1}{2}(x + 2)$ بسّط

$y - 4 = -\frac{1}{2}x - 1$ خاصية التوزيع

$y = -\frac{1}{2}x + 3$ اجمع 4 إلى الطرفين

ثم أوجد معادلة الارتفاع من G إلى $\overline{FH}$.

بما أن ميل $\overline{FH}$ يساوي $-2 = \frac{-2-4}{1-(-2)}$، فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{FH}$ يساوي $\frac{1}{2}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ صيغة النقطة والميل

$y - 4 = \frac{1}{2}(x - 4)$ $(x_1, y_1) = G(4, 4)$, $m = \frac{1}{2}$

$y - 4 = \frac{1}{2}x - 2$ خاصية التوزيع

$y = \frac{1}{2}x + 2$ اجمع 4 إلى الطرفين

الخطوة 3: حل نظام المعادلتين الناتج $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 3 \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$ لإيجاد نقطة تقاطع الارتفاعات.

اجمع المعادلتين لتحذف x، فينتج أن $2y = 5$، ومن ثم فإن $y = \frac{5}{2}$

$y = \frac{1}{2}x + 2$ معادلة الارتفاع من G

$\frac{5}{2} = \frac{1}{2}x + 2$ $y = \frac{5}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}x$ اطرح $\frac{4}{2}$، أو 2 من الطرفين

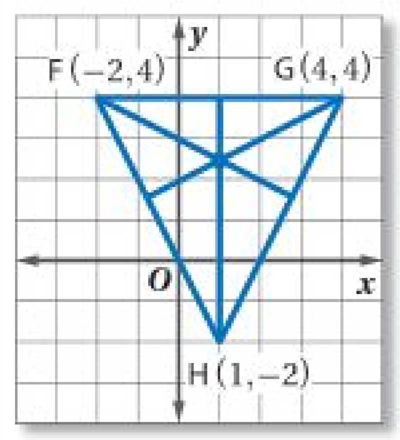
$1 = x$ اضرب الطرفين في 2

إذن إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle FGH$ هي $\left(1, \frac{5}{2}\right)$ أو $\left(1, 2\frac{1}{2}\right)$

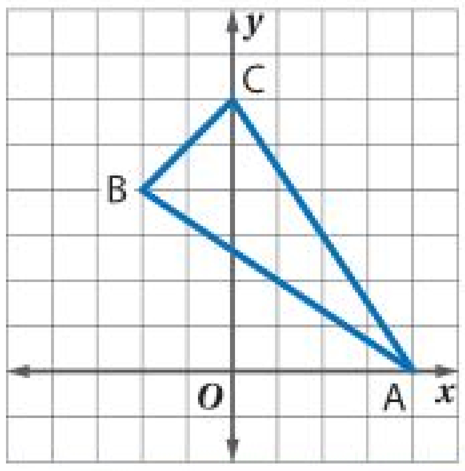
إرشادات للدراسة

التحقق من المعقولية

استعمل ركن ورقة لرسم ارتفاعات المثلث.



نقطة التقاطع تقع تقريبًا عند $\left(1, 2\frac{1}{2}\right)$؛ لذا فالجواب معقول.



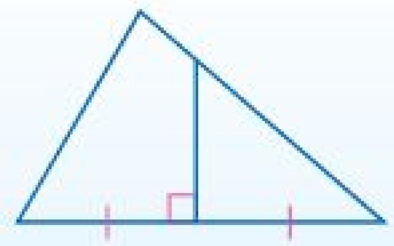
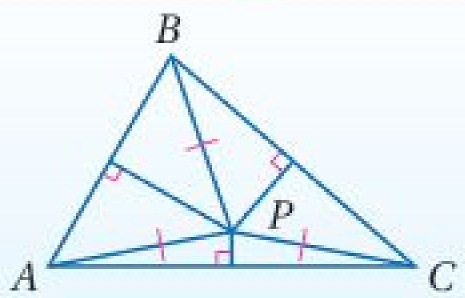
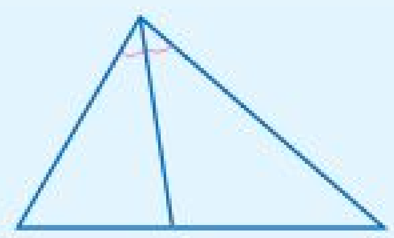
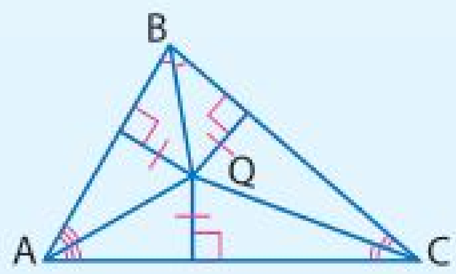
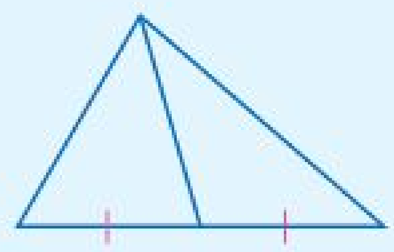
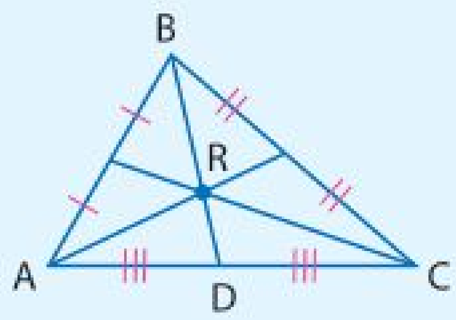
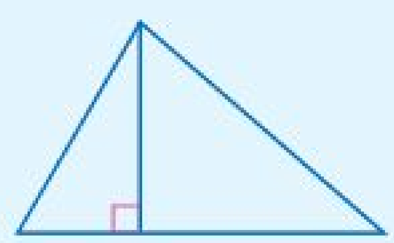
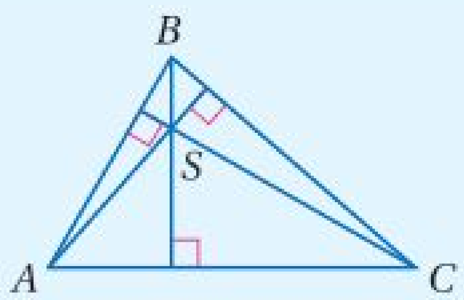
تحقق من فهمك

4) أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle ABC$ في الشكل المجاور.

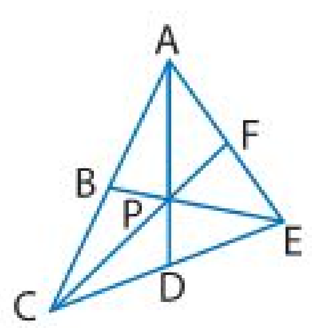
ملخص المفاهيم

أضف إلى مطويتك

قطع مستقيمة ونقاط خاصّة في المثلث

المفهوم	مثال	نقطة التلاقي	الخاصّية	مثال
العمود المنصِّف		مركز الدائرة الخارجية للمثلث	P مركز الدائرة الخارجية لـ $\triangle ABC$ ، وتقع على أبعاد متساوية من رؤوس المثلث.	
منصِّف الزاوية		مركز الدائرة الداخلية للمثلث	Q مركز الدائرة الداخلية في $\triangle ABC$ ، وتقع على أبعاد متساوية من أضلاع المثلث.	
القطعة المتوسطة		مركز المثلث	R مركز $\triangle ABC$ ،وتبعد عن كل رأس ثُلُثَي طول القطعة الواصلة بين ذلك الرأس ومنتصف الضلع المقابل له.	
الارتفاع		ملتقى الارتفاعات	تلتقي المستقيمات التي تحوي ارتفاعات $\triangle ABC$ عند النقطة S ، وتسمى ملتقى الارتفاعات.	

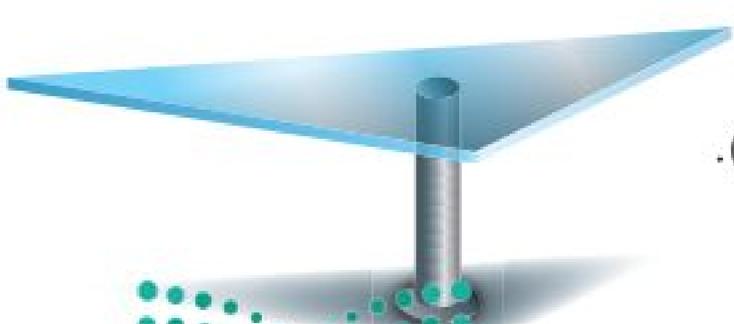
تأكـد



المثالان 2 ,1 إذا كانت النقطة P مركز $\triangle ACE$ ، $AD = 15$ ، $PF = 6$.
فأوجد كلّ طول مما يأتي:

1) PC

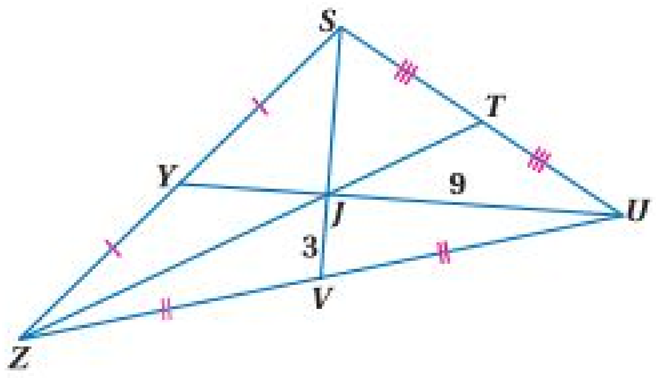
2) AP



المثال 3 **3)** **تصميم داخلي:** بالعودة إلى فقرة "لماذا؟"، إذا كانت إحداثيات رؤوس المثلث عند النقاط $(3, 6)$, $(5, 2)$, $(7, 10)$. فعند أيّ نقطة ستوضع الدعامة؟

المثال 4 **4)** **هندسة إحداثيّة:** أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle ABC$ الذي رؤوسه:
$A(-3, 3), B(-1, 7), C(3, 3)$

تدرب وحل المسائل



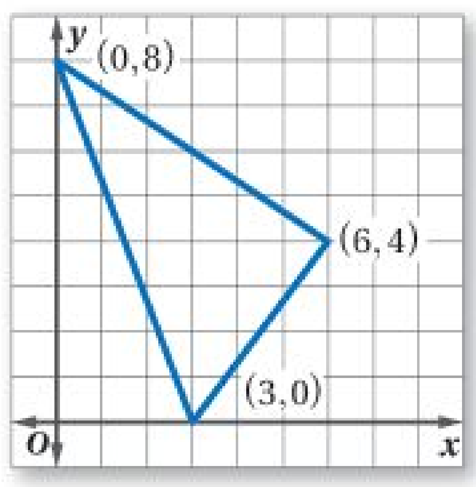
المثالان 2 ,1 في $\triangle SZU$ ، إذا كان $ZT = 18$ ، فأوجد كلّ طول مما يأتي:

5) YJ **6)** SJ

7) YU **8)** SV

9) JT **10)** ZJ

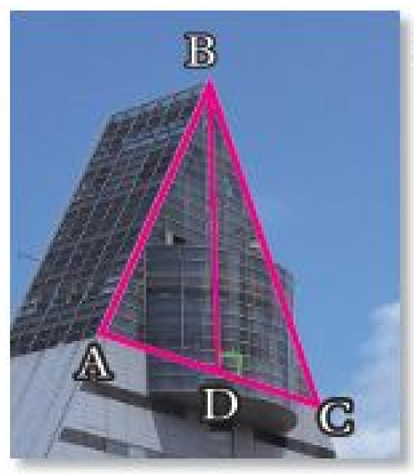
المثال 3 **11)** **تصميم داخلي:** صنعت كوثر لوحةً مثلثة الشكل كما في الشكل أدناه لتضع عليها صور معالم مشهورة. وأرادت أن تعلقها في سقف حجرتها على أن تكون موازية له. فعند أي نقطة يجب أن تُثبّت الخيط؟



المثال 4 **12)** **هندسة إحداثية:** أوجد إحداثيات ملتقى الارتفاعات للمثلث الذي رؤوسه:
$J(3, -2), K(5, 6), L(9, -2)$

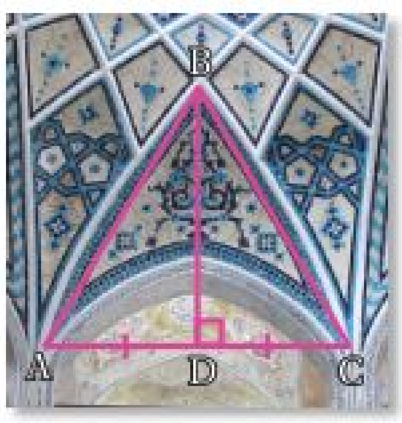
صنّف $\overline{BD}$ في كلٍّ من الأسئلة الآتية إلى ارتفاع، أو قطعة متوسطة، أو عمود منصّف:

13

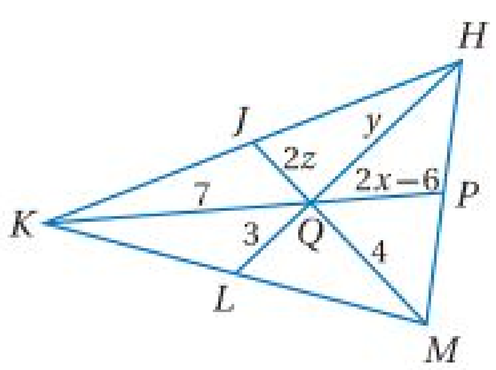


14

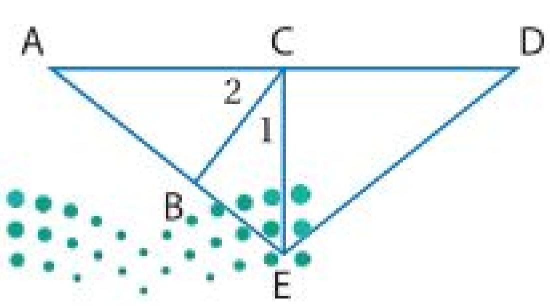
15



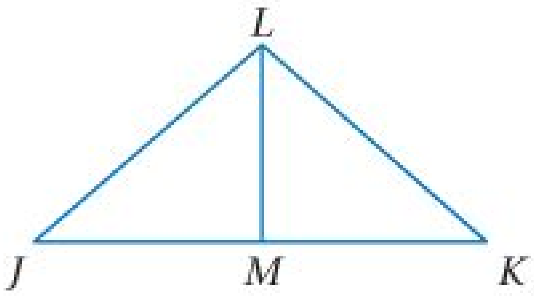
16) **جبر:** في الشكل المجاور، إذا كانت J, P, L نقاط منتصفات $\overline{KH}$ ، $\overline{HM}$ ، $\overline{MK}$ على الترتيب، فأوجد قيمة كلٍّ من x, y, z .



17) **جبر:** في الشكل المجاور، إذا كانت $\overline{EC}$ ارتفاعًا لـ $\triangle AED$ ، $m\angle 1 = (2x + 7)^\circ$ ، $m\angle 2 = (3x + 13)^\circ$ ، فأوجد كلًّا من $m\angle 1, m\angle 2$.



في الشكل المجاور، حدّد ما إذا كانت $\overline{LM}$ عمودًا منصّفًا، أو قطعة متوسطة، أو ارتفاعًا لِـ $\triangle JKL$ في كل حالة مما يأتي:



18) $\overline{LM} \perp \overline{JK}$

19) $\triangle JLM \cong \triangle KLM$

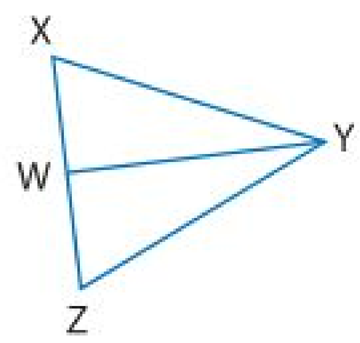
20) $\overline{JM} \cong \overline{KM}$

21) $\overline{LM} \perp \overline{JK}\ ,\ \overline{JL} \cong \overline{KL}$

22) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا.

المعطيات: $\triangle XYZ$ متطابق الضلعين، فيه $\overline{XY} \cong \overline{ZY}$ ، $\angle Y$ تنصّف $\overline{WY}$

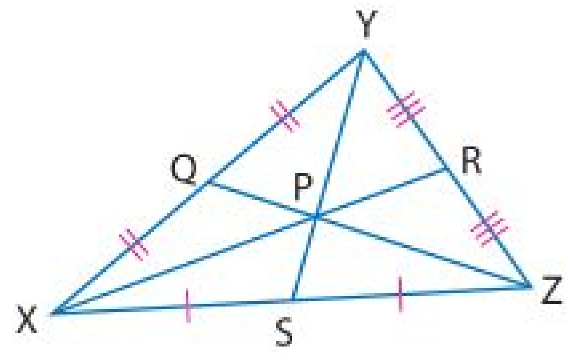
المطلوب: $\overline{WY}$ قطعة متوسطة.



23) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{XR}, \overline{YS}, \overline{ZQ}$ قطع متوسطة لِـ $\triangle XYZ$

المطلوب: $\frac{XP}{PR} = 2$



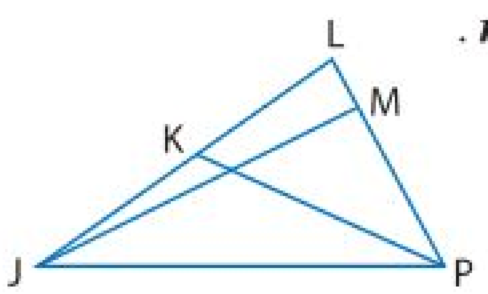
24) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، ستكتشف مواقع نقاط التلاقي لأي مثلث متطابق الأضلاع.

a) **عمليًّا:** أنشئ ثلاثة مثلثات متطابقة الأضلاع ومختلفةً بعضها عن بعضٍ على ورق سهل الطي، ثم قصّها. واطوِ كل مثلث لتحدّد موقع مركز الدائرة الخارجية للمثلث، ومركز الدائرة الداخلية للمثلث، ومركز المثلث، وملتقى الارتفاعات.

b) **لفظيًّا:** خمّن العلاقات بين نقاط التلاقي الأربع لأي مثلث متطابق الأضلاع.

c) **بيانيًّا:** ارسم مثلثًا متطابق الأضلاع في مستوى إحداثي، وعيّن مركز الدائرة الخارجية للمثلث، ومركز الدائرة الداخلية، ومركز المثلث، وملتقى الارتفاعات. وحدّد إحداثيات كل نقطةٍ منها.

جبر: في $\triangle JLP$ ، $m\angle JMP = (3x - 6)^\circ, JK = 3y - 2, LK = 5y - 8$.

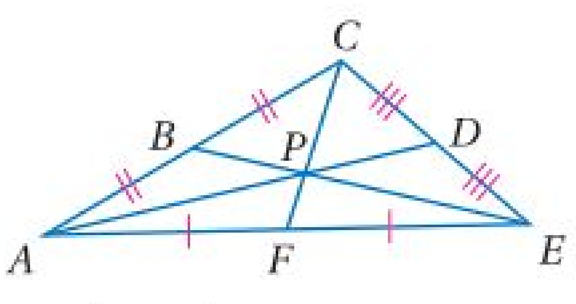


25) إذا كانت $\overline{JM}$ ارتفاعًا لِـ $\triangle JLP$ ، فأوجد x .

26) إذا كانت $\overline{PK}$ قطعة متوسطة، فأوجد LK .

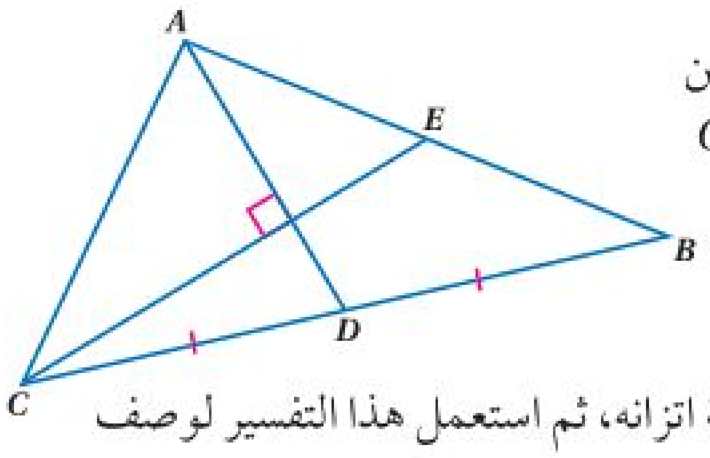
مسائل مهارات التفكير العليا

27) **اكتشف الخطأ:** قال صفوان: إن $\frac{2}{3}AP = AD$ في الشكل المجاور. ولكن عبد الكريم لم يوافقه في ذلك، فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ وضّح إجابتك.



28) **تبرير:** هل العبارة التالية صحيحة أم خطأ؟ وضح إجابتك إذا كانت صحيحة، وإلا فأعطِ مثالًا مضادًّا.

"ملتقى ارتفاعات المثلث القائم الزاوية تقع عند رأس الزاوية القائمة".

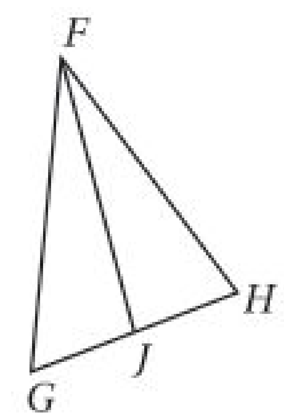


29) **تحدٍّ:** في الشكل المجاور، إذا كانت $\overline{AD}$, $\overline{CE}$ قطعتين متوسطتين في $\triangle ACB$ ، وكانت $CE = 9$, $AB = 10$, $\overline{AD} \perp \overline{CE}$ ، فأوجد CA

30) **اكتب:** استعمل المساحة لتفسر لماذا يكون مركز المثلث هو نقطة اتزانه، ثم استعمل هذا التفسير لوصف موقع نقطة اتزان المستطيل.

تدريب على اختبار

31) في الشكل المجاور، إذا كان $\overline{GJ} \cong \overline{HJ}$ ، فأي عبارة مما يأتي صحيحة؟



A $\overline{FJ}$ ارتفاع لـ $\triangle FGH$

B $\overline{FJ}$ منصّف زاوية في $\triangle FGH$

C $\overline{FJ}$ قطعة متوسطة في $\triangle FGH$

D $\overline{FJ}$ عمود منصّف في $\triangle FGH$

32) ما المقطع x للمستقيم $4x - 6y = 12$ ؟

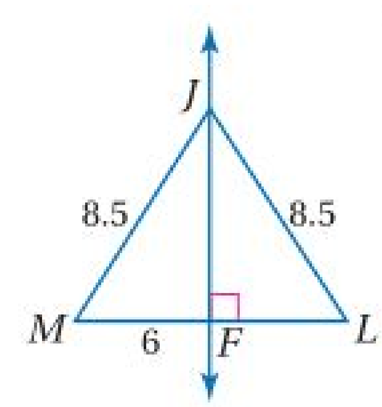
A 3   **C** -3

B 2   **D** -2

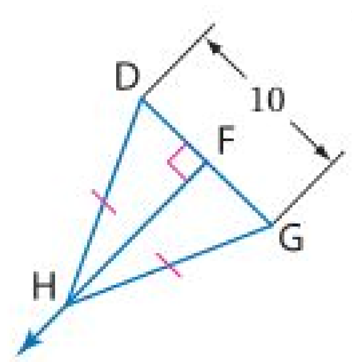
مراجعة تراكمية

أوجد كلَّ قياس ممّا يأتي : (الدرس 1-4)

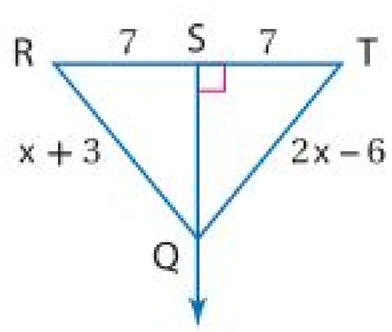
33) LM



34) DF



35) TQ



36) ارسم المثلث المتطابق الضلعين QRT في المستوى الإحداثي الذي طول قاعدته $\overline{QR}$ يساوي b وحدة، وحدِّد إحداثيات رؤوسه. (الدرس 7-3)

37) بيّن ما إذا كان $\overleftrightarrow{RS}$, $\overleftrightarrow{JK}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك، حيث $K(2, 8)$, $J(-6, 1)$, $S(9, 8)$, $R(1, 1)$ ، وارسم كل مستقيم لتتحقق من إجابتك. (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

اكتب < أو > داخل ◯ لتحصل على عبارة صحيحة.

38) $\frac{19}{27}$ ◯ $-\frac{18}{25}$

39) $\frac{5}{16}$ ◯ $\frac{3}{8}$

40) $\frac{3}{5}$ ◯ 2.7

41) $-\frac{19}{4}$ ◯ -4.25

3-4 المتباينات في المثلث
Inequalities in One Triangle

فيما سبق:

درستُ العلاقة بين قياسات زوايا المثلث.

والآن:

- أتعرف خصائص المتباينات، وأطبّقها على قياسات زوايا المثلث.
- أطبّق خصائص المتباينات على العلاقة بين زوايا مثلث وأضلاعه.

لماذا؟

يستعمل المصمِّمون طريقة تُسمىّ التثليث؛ لإعطاء الغرفة مظهرًا يُوحي بالاتساع، ومن الأمثلة على هذه الطريقة وضع طاولة صغيرة عند كل طرف من طرفَي أريكة مع وضع لوحة فوقها. على أن يكون قياس كل زاوية من زاويتَي قاعدة المثلث أقل من قياس الزاوية الثالثة.

متباينات الزوايا: تعلمت في الجبر المتباينة بوصفها علاقة بين عددين حقيقيين، وتُستعمل هذه العلاقة عادة في البراهين.

مفهوم أساسي — **تعريف المتباينة** — أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي	لأي عددين حقيقيين مثل a, b يكون $a > b$ ، إذا وفقط إذا وُجِدَ عدد حقيقي موجب c على أن يكون $a = b + c$
مثال	إذا كان $5 = 2 + 3$ ، فإنّ $5 > 2$

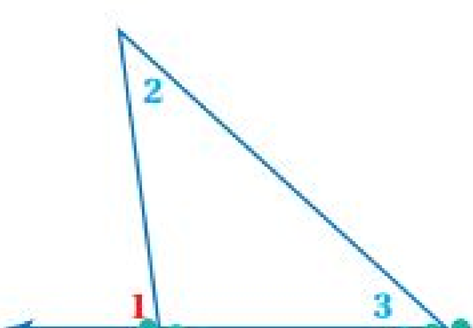
وفي الجدول أدناه قائمة ببعض خصائص المتباينات التي درستها.

مفهوم أساسي — **خصائص المتباينة على الأعداد الحقيقية** — أضف إلى مطويتك

الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاثة أعداد حقيقية a , b , c

خاصيّة المقارنة	$a < b$ أو $a = b$ أو $a > b$.
خاصيّة التعدّي	1) إذا كان $a < b, b < c$ ، فإن $a < c$. 2) إذا كان $a > b, b > c$ ، فإن $a > c$.
خاصية الجمع	1) إذا كان $a > b$ ، فإن $a + c > b + c$. 2) إذا كان $a < b$ ، فإن $a + c < b + c$.
خاصيّة الطرح	1) إذا كان $a > b$ ، فإن $a - c > b - c$. 2) إذا كان $a < b$ ، فإن $a - c < b - c$.

يمكن أن يطبق تعريف المتباينة وخصائصها على قياسات الزوايا وأطوال القطع المستقيمة؛ لأنها أعداد حقيقية.



تأمّل $\angle 1 , \angle 2 , \angle 3$ في الشكل المجاور.

من نظرية الزاوية الخارجيّة، تعلم أنّ $m\angle 1 = m\angle 2 + m\angle 3$

وبما أنّ قياسات الزوايا أعداد موجبة، إذن نستنتج أن:

$m\angle 1 > m\angle 3$ وَ $m\angle 1 > m\angle 2$

وهذه النتيجة تقود إلى النظرية الآتية:

مراجعة المفردات

الزاويتان الداخليتان البعيدتان

لكل زاوية خارجيَة لمثلث زاويتان داخليتان بعيدتان وهما الزاويتان غير المجاورتين لها.

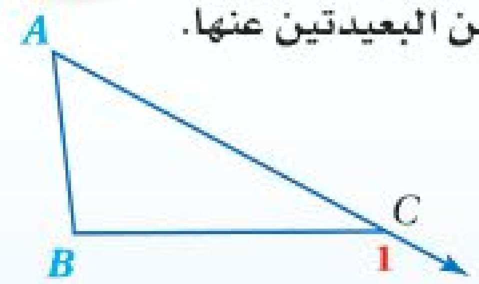
نظرية 4.8 متباينة الزاوية الخارجيّة

أضف إلى مطويتك

قياس الزاوية الخارجية لمثلث أكبر من قياس أيِّ من الزاويتين الداخليتين البعيدتين عنها.

مثال: $m\angle 1 > m\angle A$

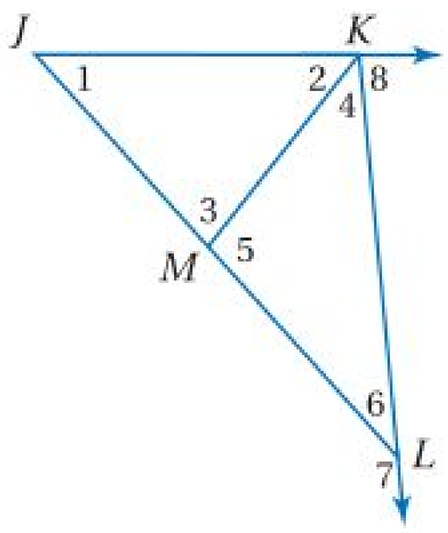
$m\angle 1 > m\angle B$



ستبرهن هذه النظرية في الدرس 4-4

مثال 1 استعمال نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة

استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة؛ لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقق الشرط المُعطى في كلٍّ مما يأتي:



a) قياساتها أقل من $m\angle 7$

$\angle 7$ زاوية خارجيّة لِـ $\triangle KML$، والزاويتان $\angle 5$,$\angle 4$ هما الزاويتان الداخليتان البعيدتان عنها، وبناءً على نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة يكون:

$m\angle 7 > m\angle 4 \;,\; m\angle 7 > m\angle 5$.

وكذلك $\angle 7$ زاوية خارجيّة لِـ $\triangle JKL$، والزاويتان $\angle JKL$,$\angle 1$ هما الزاويتان الداخليتان البعيدتان عنها؛ لذا فإن $m\angle 7 > m\angle 1$ و $m\angle 7 > m\angle JKL$. وبما أنّ $m\angle JKL = m\angle 2 + m\angle 4$، وبالتعويض يكون $m\angle 7 > m\angle 2 + m\angle 4$؛ إذن $m\angle 7 > m\angle 2$.

لذا فالزوايا التي قياساتها أقل من $m\angle 7$ هي $\angle 5$,$\angle 4$,$\angle 2$,$\angle 1$.

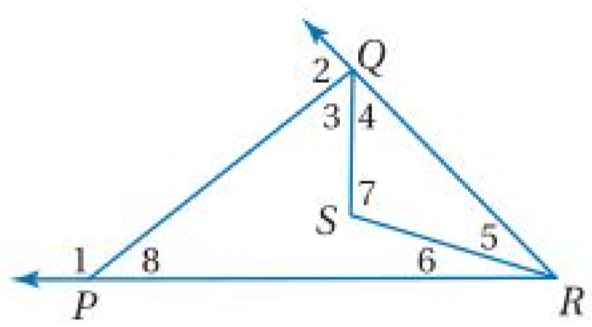
b) قياساتها أكبر من $m\angle 6$

$\angle 3$ زاوية خارجيّة لِـ $\triangle KLM$. وبناءً على نظرية متباينة الزاوية الخارجية يكون $m\angle 3 > m\angle 6$. وبما أن $\angle 8$ زاوية خارجيّة لِـ $\triangle JKL$، فإن $m\angle 8 > m\angle 6$؛ لذا فقياس كلٍّ من $\angle 8$,$\angle 3$ أكبر من $m\angle 6$.

تحقق من فهمك

1A) قياساتها أقل من $m\angle 1$

1B) قياساتها أكبر من $m\angle 8$

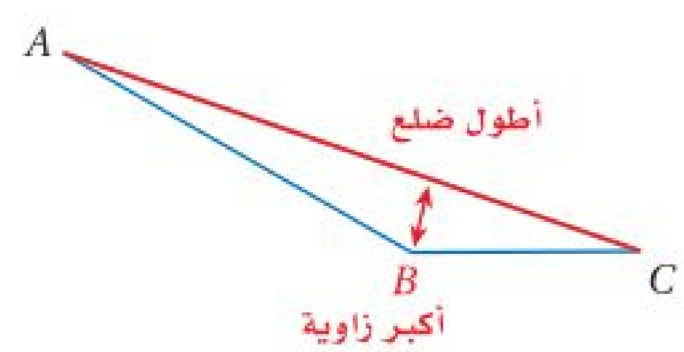


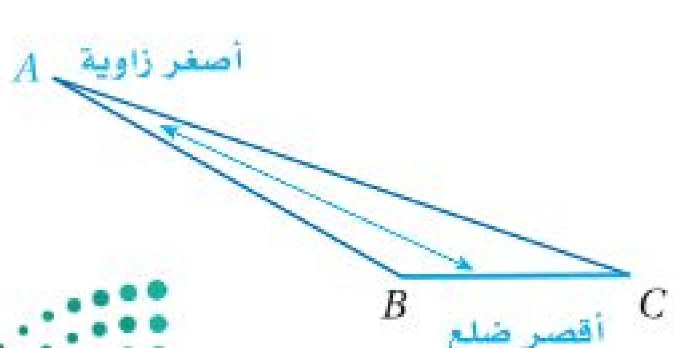
العلاقات بين زوايا المثلث وأضلاعه: في الدرس 6-3، تعلمت أنّه إذا تطابق ضلعان في مثلث، فإن الزاويتين المقابلتين لهذين الضلعين متطابقتان. ولكن كيف تكون العلاقة إذا كان الضلعان غير متطابقين. وللإجابة عن هذا السؤال، افحص أطول الأضلاع وأقصرها وأصغر الزوايا وأكبرها لمثلث منفرج الزاوية ومختلف الأضلاع.

تنبيه!

تحديد الضلع المقابل

انتبه عند تحديد الضلع المقابل لزاوية بصورة صحيحة، فالضلعان اللذان يشكّلان الزاوية لا يمكن أن يكون أحدهما مقابلًا لها.





لاحظ أنّ أطول ضلع في $\triangle ABC$ يقابل أكبر زاوية، وبالمثل فإن أقصر ضلع يقابل أصغر زاوية أيضًا.

إن العلاقات بين الزوايا والأضلاع في المثلث المنفرج الزاوية والمختلف الأضلاع تكون صحيحة لجميع المثلثات، ويمكن صياغتها باستعمال المتباينات في النظريتين الآتيتين:

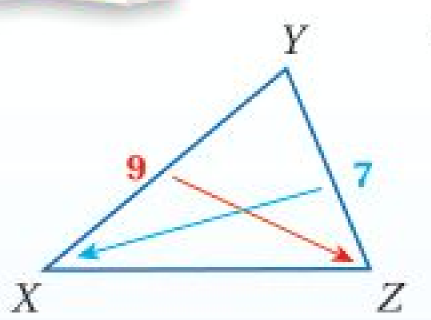
نظريتان

أضف إلى مطويتك

العلاقات بين زوايا المثلث وأضلاعه

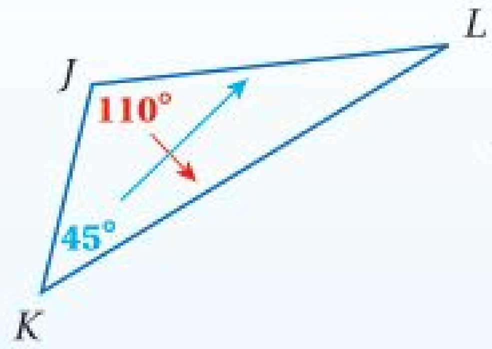
4.9 **متباينة ضلع-زاوية:** إذا كان أحد أضلاع مثلث أطول من ضلع آخر، فإنّ قياس الزاوية المقابلة للضلع الأطول يكون أكبر من قياس الزاوية المقابلة للضلع الأقصر.

مثال بما أنّ $XY > YZ$ ، فإن $m\angle Z > m\angle X$.



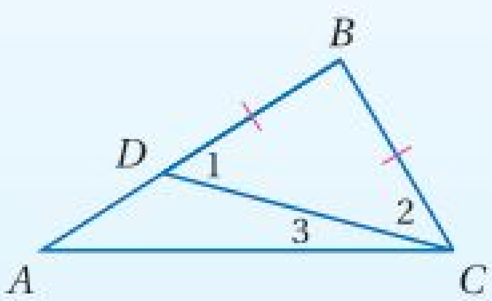
4.10 **متباينة زاوية-ضلع:** إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث أكبر من قياس زاوية أخرى، فإنّ الضلع المقابل للزاوية الكبرى يكون أطول من الضلع المقابل للزاوية الصغرى.

مثال بما أنّ $m\angle J > m\angle K$ ، فإن $KL > JL$.



برهان

النظرية 4.9



المعطيات: $\triangle ABC$ ، فيه $AB > BC$.

المطلوب: $m\angle BCA > m\angle A$.

البرهان:

بما أنّ $AB > BC$ في $\triangle ABC$ ، فإنّه توجد نقطة D على $\overline{AB}$ بحيث $BD = BC$ ؛ لذا ارسم $\overline{CD}$ لتشكّل $\triangle BCD$ المتطابق الضلعين، وبناءً على نظرية المثلث المتطابق الضلعين تكون $\angle 2 \cong \angle 1$ ، واستنادًا إلى تعريف تطابق الزوايا يكون $m\angle 1 = m\angle 2$.

واعتمادًا على مسلمة جمع قياسات الزوايا يكون $m\angle BCA = m\angle 2 + m\angle 3$ ، إذن $m\angle BCA > m\angle 2$ بحسب تعريف المتباينة. وبالتعويض ينتج أن $m\angle BCA > m\angle 1$.

وبناءً على نظريّة متباينة الزاوية الخارجيّة يكون $m\angle 1 > m\angle A$. وبما أن $m\angle BCA > m\angle 1 , m\angle 1 > m\angle A$ ، فإن $m\angle BCA > m\angle A$ بحسب خاصية التعدّي للمتباينة.

ستبرهن النظرية 4.10 في الدرس 4-4

تنبيه!

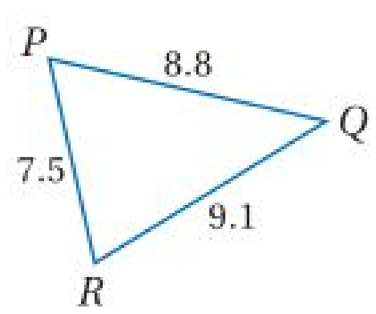
رمزا الزاوية والمتباينة

يبدو رمز الزاوية ($\angle$) مشابهًا لرمز أقل من ($<$)، وخاصّة عند الكتابة باليد؛ لذا كن دقيقًا في كتابة الرموز بصورة صحيحة عندما يُستعمل الرمزان معًا.

مثال 2

ترتيب زوايا المثلث وفقًا لقياساتها

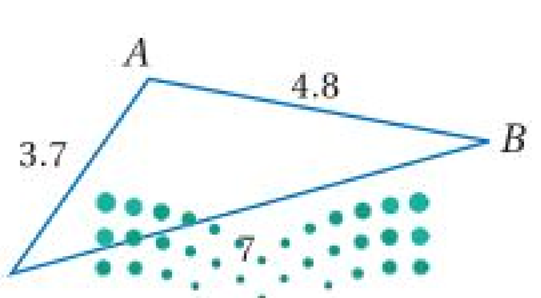
اكتب زوايا $\triangle PQR$ مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر.



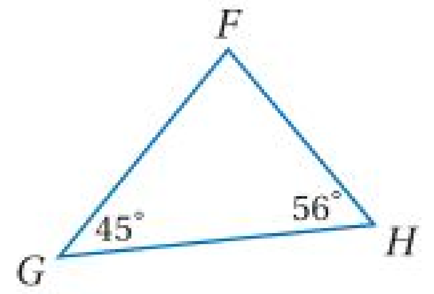
الأضلاع مرتّبة من الأقصر إلى الأطول هي: $\overline{PR}$, $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$. والزوايا المقابلة لهذه الأضلاع هي: $\angle Q$, $\angle R$, $\angle P$ على الترتيب؛ لذا فالزوايا مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر تكون على النحو الآتي: $\angle Q$, $\angle R$, $\angle P$

تحقق من فهمك

2) اكتب زوايا $\triangle ABC$ مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر.



مثال 3 ترتيب أضلاع المثلث وفقًا لأطوالها



اكتب أضلاع $\triangle FGH$ مرتّبةً من الأقصر إلى الأطول.

أوجد قياس الزاوية المجهولة باستعمال نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث.

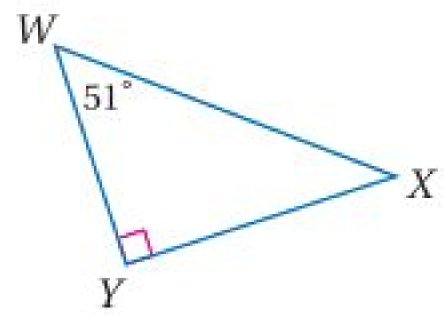
$$m\angle F = 180 - (45^\circ + 56^\circ) = 79^\circ$$

لذا فالزوايا مرتّبة من الأصغر إلى الأكبر هي: $\angle G, \angle H, \angle F$.

والأضلاع المقابلة لهذه الزوايا هي: $\overline{FH}, \overline{FG}, \overline{GH}$ على الترتيب.

إذن فالأضلاع مرتبةً من الأقصر إلى الأطول تكون على النحو التالي: $\overline{FH}, \overline{FG}, \overline{GH}$.

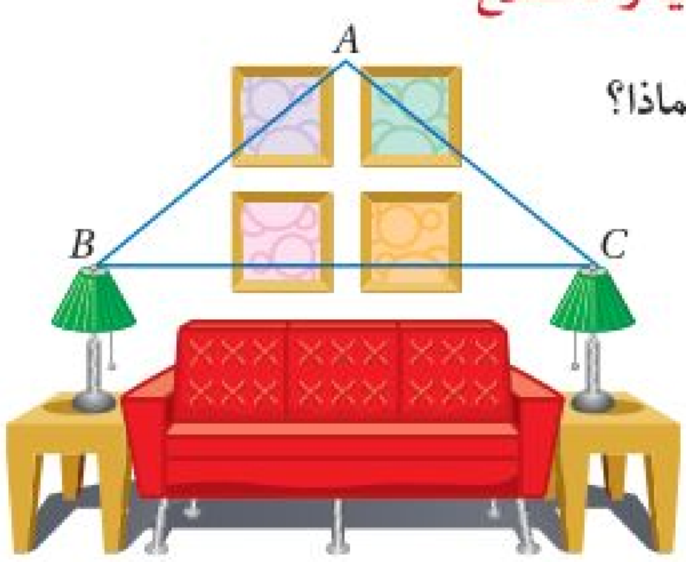
تحقق من فهمك



3) اكتب زوايا $\triangle WXY$ وأضلاعه، مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر.

ويمكنك استعمال العلاقات بين الزوايا والأضلاع في المثلثات لحل مسائل من واقع الحياة.

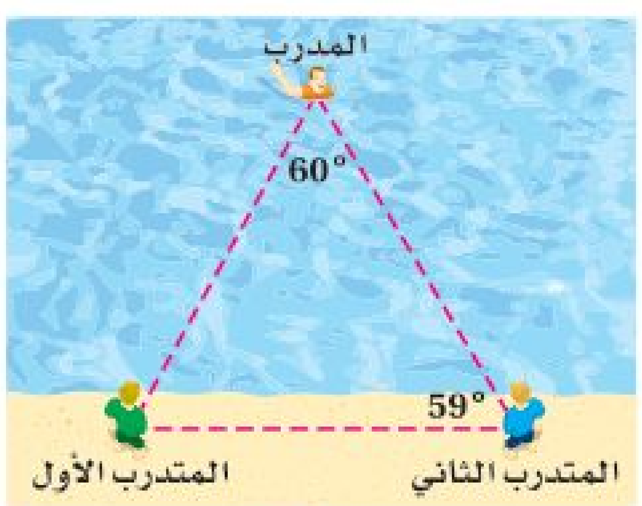
مثال 4 من واقع الحياة العلاقات بين الزوايا والأضلاع



تصميم داخلي: **يستعمل مصمّمٌ فكرة التثليث الواردة في فقرة لماذا؟ لترتيب غرفة الاستقبال.**
فإذا أراد المصمّم أن يكون $m\angle B$ أقلّ من $m\angle A$، فأي مسافة يجب أن تكون أطول: المسافة بين المصباحين أم المسافة بين النقطتين A, C؟ فسِّر إجابتك.

بحسب نظرية «متباينة زاوية- ضلع»، لكي يكون $m\angle B < m\angle A$، يجب أن يكون طول الضلع المقابل لِـ $\angle B$ أقصر من طول الضلع المقابل لِـ $\angle A$. وبما أن $\overline{AC}$ يقابل $\angle B$، و $\overline{BC}$ يقابل $\angle A$، فإنّ $AC < BC$؛ لذا فالمسافة BC بين المصباحين ستكون أكبرَ من المسافة بين النقطتين A, C.

تحقق من فهمك



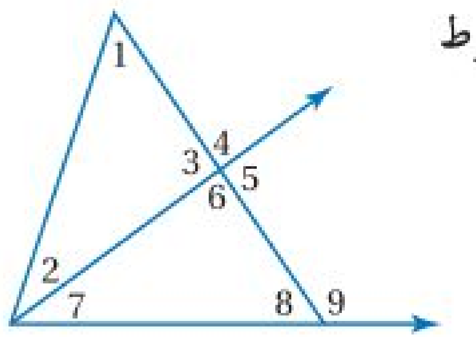
4) **سبّاحو الإنقاذ:** في أثناء التدريب يُمثّل المدرّب دور شخصٍ في خطر ليتمكّن المتدرِّبان من تطبيق مهارات الإنقاذ. إذا كان المدرّب والمتدرِّبان الأول والثاني في المواقع المبيّنة في الشكل، فأيُّ المتدربَين أقرب إلى المدرّب؟

الربط مع الحياة

برامج إعداد المنقذين في السباحة تتضمن تدريبًا على المراقبة والإنقاذ والإسعافات الأولية، وتتراوح مدّة البرنامج عادة ما بين 30 إلى 37 ساعةً، تبعًا لطبيعة الوسط المائي مثل البرك أو شواطئ البحار.

تأكـد

المثال 1 **استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة، لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقق الشرط المعطى في كلٍّ مما يأتي :**



1) قياساتها أقل من $m\angle 4$.

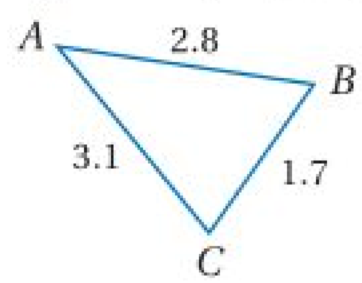
2) قياساتها أكبر من $m\angle 7$.

3) قياساتها أكبر من $m\angle 2$.

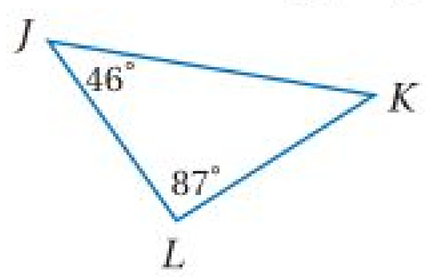
4) قياساتها أقل من $m\angle 9$.

المثالان 3 ,2 **اكتب زوايا كل مثلث مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر في السؤالين الآتيين :**

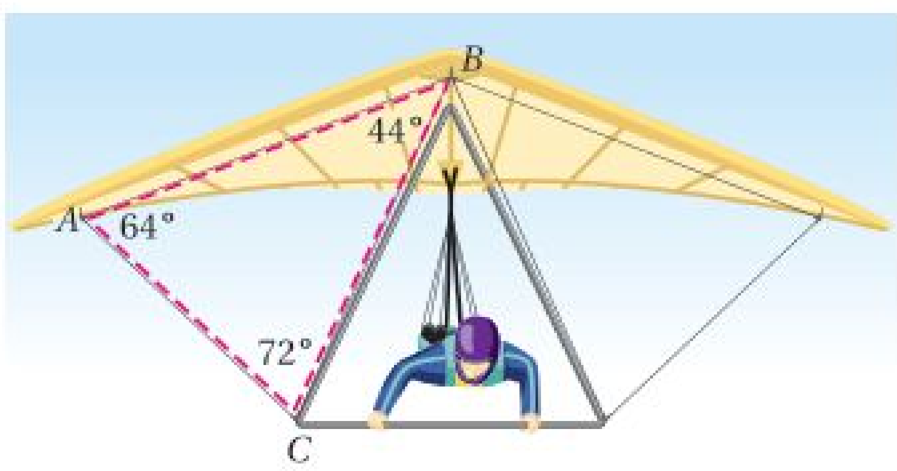
5)



6)

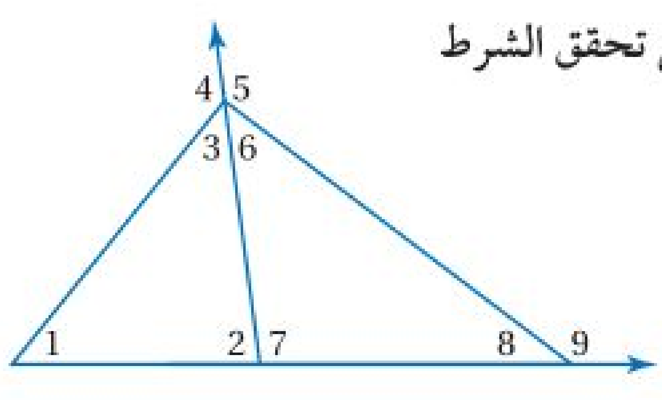


المثال 4 **7)** **طيران شراعي:** تشكّل دعائم الطائرة الشراعية مثلثات كالمثلث الظاهر في الصورة . فأي دعامة تكون أطول: $\overline{AC}$ أم $\overline{BC}$ ؟ وضّح إجابتك.



تدرب وحل المسائل

المثال 1 **استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجية؛ لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقق الشرط المُعطَى في كلٍّ مما يأتي:**



8) قياساتها أكبر من $m\angle 2$.

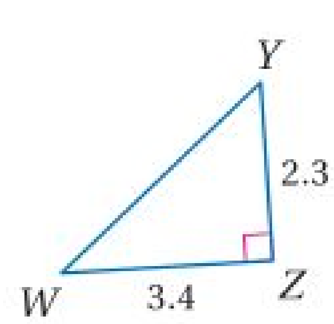
9) قياساتها أقل من $m\angle 4$.

10) قياساتها أقل من $m\angle 9$.

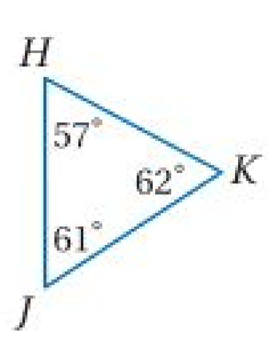
11) قياساتها أكبر من $m\angle 8$.

المثالان 3 ,2 **اكتب زوايا كل مثلث مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر في كلٍّ مما يأتي:**

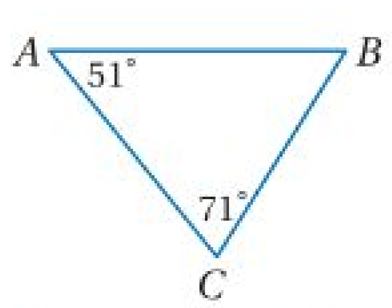
12)



13)



14)



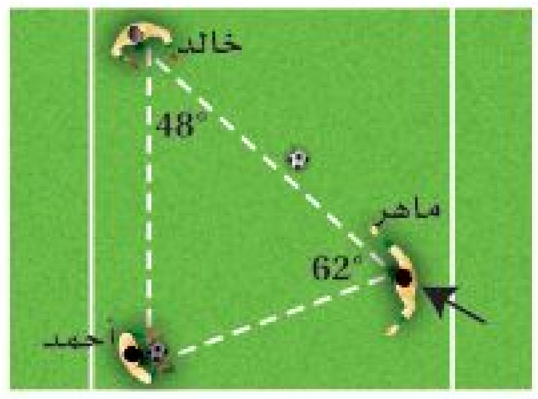
المثال 4

الربط مع الحياة

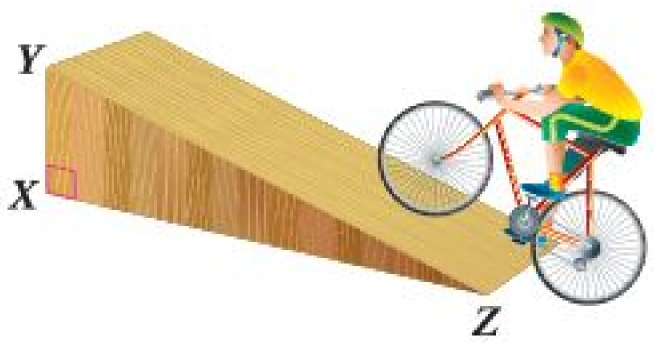
بينت إحدى الدراسات أن فريق كرة القدم يصبح في حالة الهجوم ما بين 65–45 مرةً في المباراة الواحدة.

والفريق المتميز هو الذي يتميز بقدرته على تنفيذ الهجمات بشكل جيد، وفي الوقت نفسه يستطيع الاحتفاظ بدفاع متماسك.

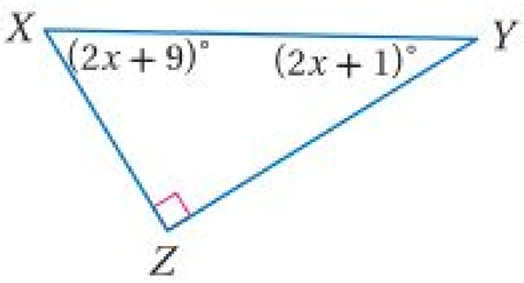
15) **كرة قدم:** يقف أحمد وخالد وماهر في ملعب كرة قدم كما في الشكل أدناه، ويريد ماهر أن يمرِّر الكرة إلى أحد زميلَيه، على أن تكون مسافة التمرير أقصر. أيهما يختار: خالدًا أم أحمد؟ برّر إجابتك.



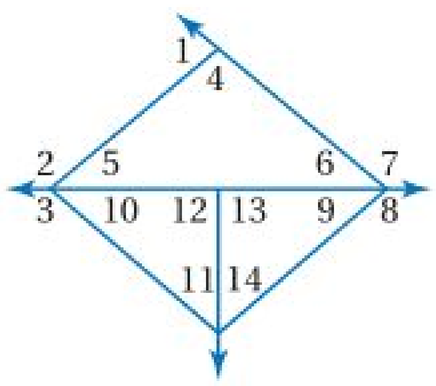
16) **منحدرات:** يمثّل المنحدر طريقًا للدراجات الهوائية. فأيّهما أطول؛ طول المنحدر $\overline{XZ}$ أم طول السطح العلوي للمنحدر $\overline{YZ}$؟ وضّح إجابتك باستعمال النظرية 4.9.



17) اكتب زوايا المثلث المجاور مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر:



استعمل الشكل المجاور؛ لتحدّد الزاوية ذات القياس الأكبر في كل مجموعة مما يأتي:

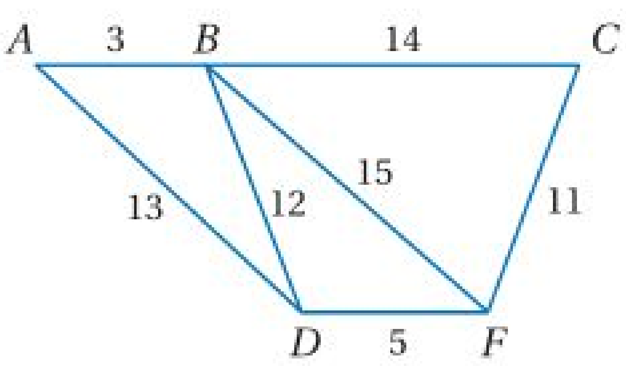


18) $\angle 1, \angle 5, \angle 6$ **19)** $\angle 2, \angle 4, \angle 6$

20) $\angle 7, \angle 4, \angle 5$ **21)** $\angle 3, \angle 11, \angle 12$

22) $\angle 3, \angle 9, \angle 14$ **23)** $\angle 8, \angle 10, \angle 11$

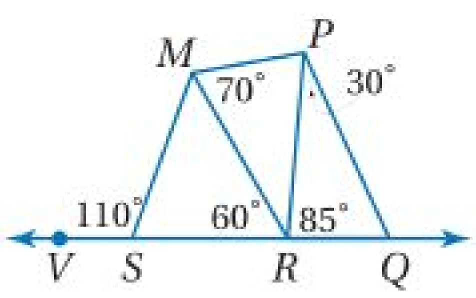
استعمل الشكل المجاور؛ لتحدد العلاقة بين قياسات الزوايا المعطاة في كلٍّ من الأسئلة الآتية:



24) $\angle ABD, \angle BDA$ **25)** $\angle BCF, \angle CFB$

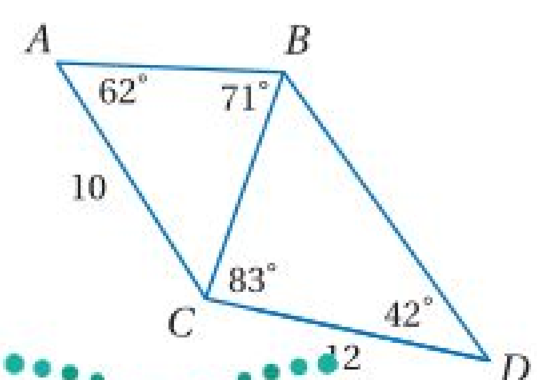
26) $\angle BFD, \angle BDF$ **27)** $\angle DBF, \angle BFD$

استعمل الشكل المجاور؛ لتحدد العلاقة بين أطوال الأضلاع المعطاة في كلٍّ من الأسئلة الآتية:



28) $\overline{SM}, \overline{MR}$ **29)** $\overline{RP}, \overline{MP}$ **30)** $\overline{RQ}, \overline{PQ}$

31) اكتب أضلاع كل مثلث في الشكل المجاور مرتّبةً من الأقصر إلى الأطول. ووضّح إجابتك.



32) **تمثيلات متعدّدة:** ستكتشف في هذه المسألة العلاقة بين أطوال أضلاع المثلث.

المثلث	AB	BC	$AB+BC$	CA
الحاد الزوايا				
المنفرج الزاوية				
القائم الزاوية				

a) **هندسيًّا:** ارسم ثلاثة مثلثات: الأول حادّ الزوايا، والثاني منفرج الزاوية، والثالث قائم الزاوية، وسمّ رؤوس كل مثلث A, B, C.

b) **جدوليًّا:** استعمل المسطرة لقياس أطوال أضلاع كل مثلث، ثم انسخ الجدول في دفترك وأكمله.

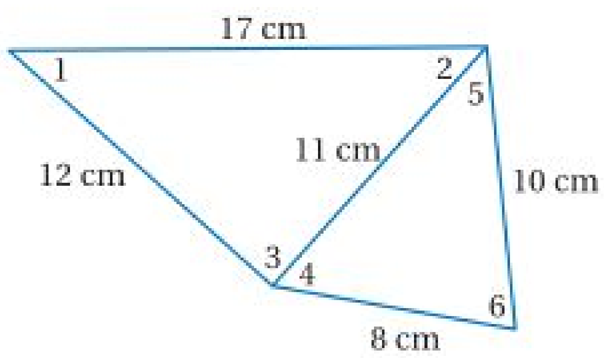
c) **جدوليًّا:** نظّم جدولين آخرين كالجدول أعلاه، وأوجد مجموع BC, CA في أحدهما، ومجموع AB, CA في الجدول الآخر.

d) **جبريًّا:** اكتب متباينةً لكل جدول كوّنته تربط بين مجموع طولَي الضلعين في مثلثٍ وطول الضلع الثالث.

e) **لفظيًّا:** خمّن العلاقة بين مجموع طولَي ضلعين في المثلث وطول الضلع الثالث.

مسائل مهارات التفكير العليا

33) **تبرير:** هل تكون قاعدة المثلث المتطابق الضلعين هي الضلع الأطول في المثلث دائمًا أم أحيانًا أم لا تكون أبدًا؟ وضّح إجابتك.



34) **تحدٍّ:** استعمل أطوال الأضلاع في الشكل المجاور؛ لترتب قياسات الزوايا المرقّمة من الأصغر إلى الأكبر، إذا علمت أنّ $m\angle 2 = m\angle 5$. ووضّح إجابتك.

35) **اكتب:** وضّح لماذا يكون الوتر في المثلث القائم الزاوية هو الضلع الأطول دائمًا؟

تدريب على اختبار

36) إذا كان قياسا زاويتين في مثلث هما $45°$، $92°$، فما نوع هذا المثلث؟

A منفرج الزاوية ومختلف الأضلاع.

B حادّ الزوايا ومختلف الأضلاع.

C منفرج الزاوية ومتطابق الضلعين.

D حادّ الزوايا ومتطابق الضلعين.

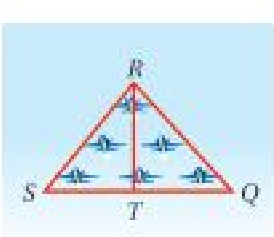
37) أيُّ عبارةٍ عدديةٍ مما يأتي لها أصغر قيمة؟

A $|45|$ **C** $|-28|$

B $|15|$ **D** $|-39|$

مراجعة تراكمية

38) **هندسة إحداثيّة:** بصيغة الميل والمقطع اكتب معادلة العمود المنصّف للقطعة المستقيمة التي إحداثيات طرفيها $D(-2, 4)$, $E(3, 5)$. (الدرس 1-4)



39) **طائرات:** يطير سربٌ من الطائرات على هيئة مثلثين بينهما ضلع مشترك. اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن: $\triangle SRT \cong \triangle QRT$، إذا كانت النقطة T منتصف $\overline{SQ}$، $\overline{SR} \cong \overline{QR}$. (الدرس 4-3)

استعد للدرس اللاحق

إذا كان $x = 8$, $y = 2$, $z = 3$، فحدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحةً أم خاطئةً:

40) $z(x-y) = 13$

41) $2x = 3yz$

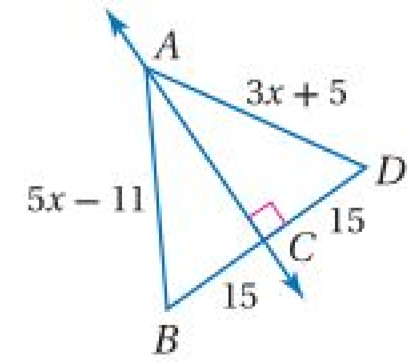
42) $x + y > z + y$

اختبار منتصف الفصل

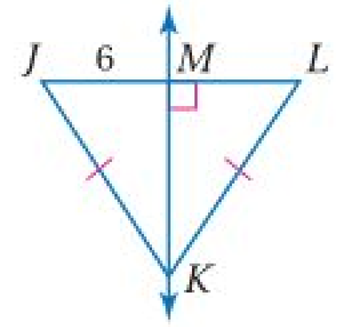
الدروس من 1-4 إلى 3-4

أوجد كلًّا من القياسين الآتيين: (الدرس 1-4)

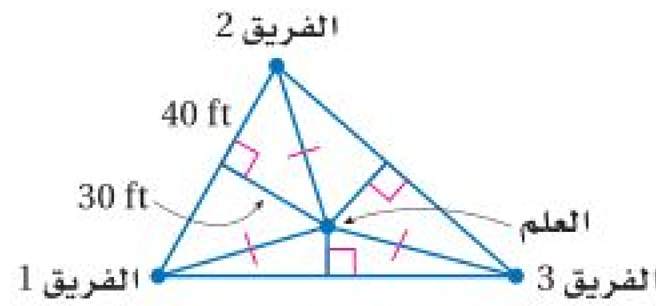
1) AB



2) JL

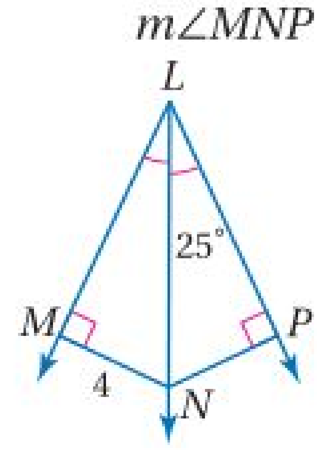


3) مخيَّم: يلعب المشاركون في مخيَّم كشفيٍّ لعبة الفوز بالعلم. إذا كانت الفِرق الثلاثة تقف في الأماكن المبيَّنة في الشكل أدناه، والعلم مثبّت عند نقطة متساوية البعد عن الفِرق الثلاثة، فما المسافة بين العلم وكل من هذه الفِرق؟ (الدرس 1-4)

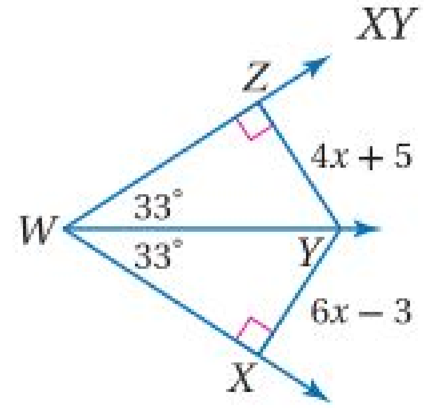


أوجد كلًّا من القياسين الآتيين: (الدرس 1-4)

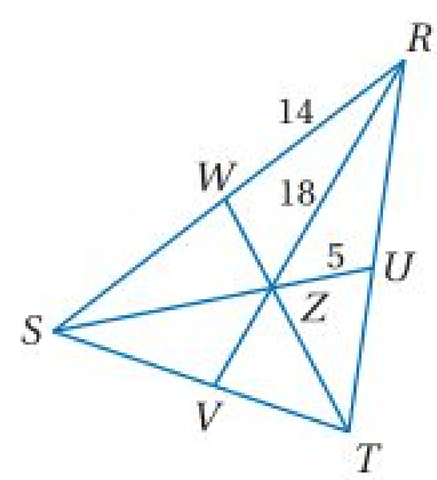
4) $m\angle MNP$



5) XY



إذا كانت Z مركز $\triangle RST$ ، $RZ = 18$.
فأوجد كلًّا من الأطوال الآتية: (الدرس 2-4)



6) ZV

7) SZ

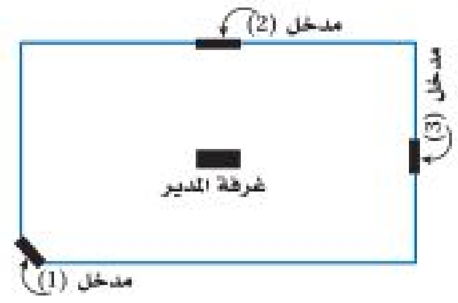
8) SR

هندسة إحداثيّة: أوجد إحداثيات مركز كل مثلث عُلمت رؤوسه في السؤالين الآتيين: (الدرس 2-4)

9) $A(1, 7), B(4, 2), C(7, 7)$

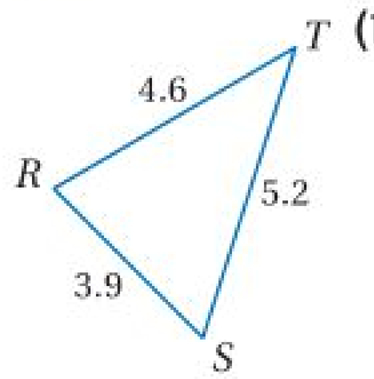
10) $J(-5, 5), K(-5, -1), L(1, 2)$

11) تصميم هندسيٌّ: في إحدى المدارس، صمَّم مهندس مبنى للإدارة، وراعى في التصميم أن تكون غرفة المدير على نفس البعد من مداخل المبنى الثلاثة. هل تقع غرفة المدير عند نقطة التقاء ارتفاعات المثلث الذي رؤوسه هي المداخل الثلاثة؟ ولماذا؟ (الدرس 2-4)

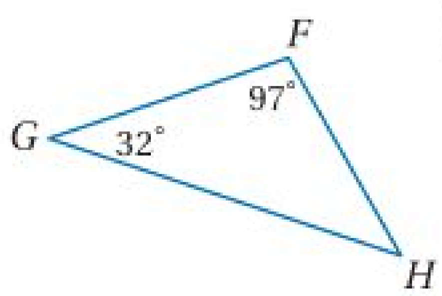


اكتب زوايا كل مثلث وأضلاعه مرتَّبةً من الأصغر إلى الأكبر في السؤالين الآتيين: (الدرس 3-4)

12)



13)

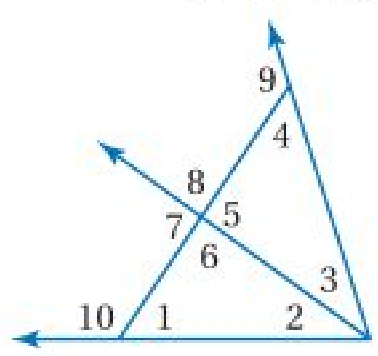


14) مسافات: في الخريطة أدناه، إذا علمت أن $m\angle C = 70°$, $m\angle A = \frac{2}{3}m\angle B$ ، فأجب عما يأتي: (الدرس 3-4)

a) أوجد قياس كلٍّ من الزاويتين A , B .

b) رتِّب أطوال أضلاع المثلث من الأقصر إلى الأطول.

استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجية؛ لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقق الشرط المُعطى في كلٍّ من الأسئلة الآتية: (الدرس 3-4)



15) قياسها أقل من $m\angle 8$.

16) قياسها أكبر من $m\angle 3$.

17) قياسها أقل من $m\angle 10$.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-4 البرهان غير المباشر
Indirect Proof

فيما سبق:

درستَ البراهين الحرّة وذات العمودين والتسلسليّة.

والآن:

- أكتُب براهين جبريّة غير مباشرة.
- أكتُب براهين هندسيّة غير مباشرة.

المفردات:

التبرير المباشر direct reasoning

البرهان المباشر direct proof

التبرير غير المباشر indirect reasoning

البرهان غير المباشر indirect proof

البرهان بالتناقض proof by contradiction

لماذا؟

أعلن محل أحذية عن تخفيض مقداره 25٪ على جميع القطع الموجودة في المحل، **فسألت هند أختها مها خلال تسوقهما في المحل قائلةً:** إذا كان ثمن القطعة 80 ريالًا بعد التخفيض، فهل كان ثمن القطعة أكثر من 100 ريال قبل التخفيض؟

فأجابت مها: نعم؛ لأنه لو كان ثمن القطعة قبل التخفيض 100 ريال أو أقل، فإن ثمنها بعد التخفيض سيكون 75 ريالًا أو أقل.

البرهان الجبري غير المباشر: البراهين التي كتبتها حتى الآن استعملت فيها **التبرير المباشر**، حيث كنت تبدأ بمعطيات صحيحة وتثبت أن النتيجة صحيحة هذه الطريقة من البرهان تعتبر **برهانًا مباشرًا**، وعندما تستعمل **التبرير غير المباشر** فإنك تفترض أن النتيجة خطأ، ثم تبيّن أنّ هذا الافتراض يؤدي إلى تناقضٍ مع المعطيات أو مع أيّ حقيقةٍ سابقةٍ كتعريف، أو مسلمة، أو نظرية. وحيث إن جميع خطوات البرهان تكون صحيحة منطقيًّا، فإنّ هذا يكون إثباتًا لخطأ الافتراض، وعلى ذلك يجب أن تكون النتيجة الأصلية صحيحةً، ويسمّى هذا النوع من البرهان **برهانًا غير مباشر** أو **برهانًا بالتناقض**. والخطوات التالية تلخص عمليّة البرهان غير المباشر.

مفهوم أساسي: خطوات كتابة البرهان غير المباشر

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1: حدّد النتيجة التي ستبرهنها. ثم افترض خطأها، وذلك بافتراض أنّ نفيها صحيح.

الخطوة 2: استعمل التبرير المنطقي لتبين أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقضٍ مع المعطيات أو مع حقيقةٍ أخرى، مثل تعريف أو مسلمة أو نظريّة.

الخطوة 3: بما أن الافتراض الذي بدأت به أدّى إلى تناقض، فبيّن أن النتيجة الأصلية المطلوب إثباتها يجب أن تكون صحيحة.

مثال 1 صياغة افتراض للبدء في برهان غير مباشر

اكتب الافتراض الضروري الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي:

a) $\angle ABC \ncong \angle XYZ$

الافتراض هو: $\angle ABC \cong \angle XYZ$

b) **إذا كان العدد 6 عاملًا للعدد n، فإن 2 عامل للعدد n.**

نتيجة هذه العبارة الشرطية هي 2 عامل للعدد n، ونفي هذه النتيجة هو 2 ليس عاملًا للعدد n؛ لذا فالافتراض هو: العدد 2 ليس عاملًا للعدد n.

c) **$\angle 3$ زاوية منفرجة.**

الافتراض هو: $\angle 3$ ليست زاويةً منفرجةً.

تحقق من فهمك

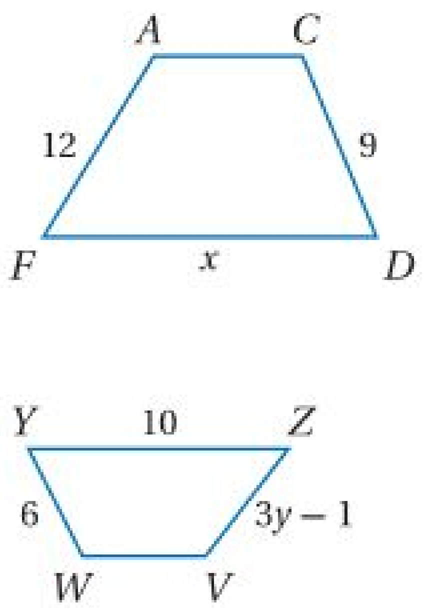
1A) $x > 5$

1B) النقاط J, K, L تقع على استقامة واحدة.

1C) $\triangle XYZ$ متطابق الأضلاع.

استعمال الأشكال المتشابهة: يمكنك استعمال معاملات التشابه والتناسبات، لحل مسائل تتضمن أشكالًا متشابهة.

مثال 3 استعمال الأشكال المتشابهة لإيجاد القيم المجهولة



في الشكل المجاور، $ACDF \sim VWYZ$.

a) أوجد قيمة x.

استعمل أطوال الأضلاع المتناظرة لكتابة تناسب

$\frac{CD}{WY} = \frac{DF}{YZ}$ الأضلاع المتناظرة متناسبة

$\frac{9}{6} = \frac{x}{10}$ $CD = 9, WY = 6, DF = x, YZ = 10$

$9(10) = 6(x)$ خاصيّة الضرب التبادلي

$90 = 6x$ بالضرب

$15 = x$ بقسمة كلا الطرفين على 6

b) أوجد قيمة y.

$\frac{CD}{WY} = \frac{FA}{ZV}$ الأضلاع المتناظرة متناسبة

$\frac{9}{6} = \frac{12}{3y-1}$ $CD = 9, WY = 6, FA = 12, ZV = 3y - 1$

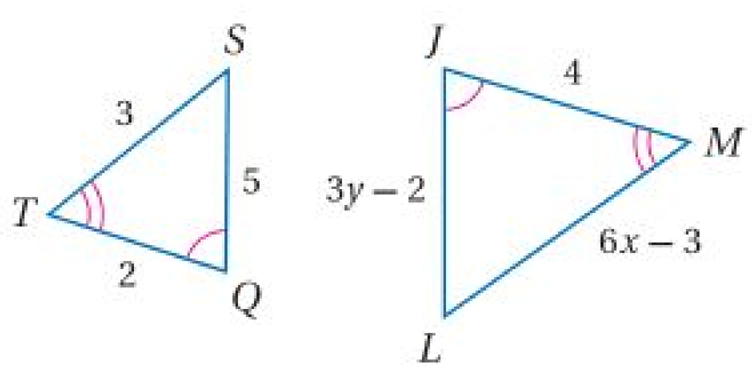
$9(3y-1) = 6(12)$ خاصية الضرب التبادلي

$27y - 9 = 72$ بالضرب

$27y = 81$ بإضافة 9 لكلا الطرفين

$y = 3$ بقسمة كلا الطرفين على 27

تحقق من فهمك



إذا كان $\triangle JLM \sim \triangle QST$، فأوجد قيمة المتغير في كلٍّ مما يأتي:

3A) x

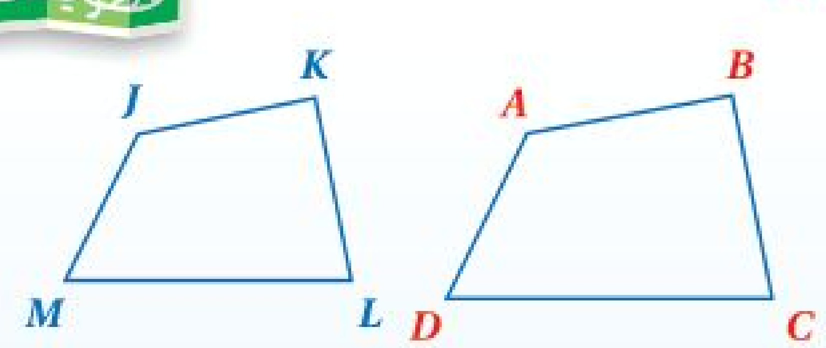
3B) y

النسبة بين أيِّ طولين متناظرين في المضلعين المتشابهين تساوي معامل التشابه بينهما. ويؤدي هذا إلى النظرية الآتية حول محيطي المضلعين المتشابهين.

نظرية 6.1 محيطا المضلعين المتشابهين

أضف إلى مطويتك

إذا تشابه مضلعان، فإنَّ النسبة بين محيطيهما تساوي معامل التشابه بينهما.



مثال: إذا كان $ABCD \sim JKLM$، فإنَّ:

$$\frac{AB}{JK} = \frac{BC}{KL} = \frac{CD}{LM} = \frac{DA}{MJ} = \frac{AB + BC + CD + DA}{JK + KL + LM + MJ}$$

ستبرهن النظريّة 6.1 الخاصة بحالة المثلثات في السؤال 34

إرشادات للدراسة

التشابه والتطابق: إذا كان المضلعان متطابقين فإنهما متشابهان أيضًا. وتكون جميع الزوايا المتناظرة متطابقة، وأطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة، والنسبة بين طولَي كل ضلعين متناظرين هي 1:1 .

إرشادات للدراسة

تحديد المثلثات المتشابهة: عندما تُعطى زوجين من الزوايا المتناظرة المتطابقة في مثلثين، تذكر أنّه يمكنك استعمال نظرية الزاوية الثالثة؛ لإثبات أن الزاويتين المتناظرتين الباقيتين متطابقتان أيضًا.

تُستعمل البراهين غير المباشرة عادة لإثبات مفاهيم في نظرية الأعداد، ويكون من المفيد في هذه البراهين تذكّر أنّه يمكنك تمثيل العدد الزوجي على الصورة $2k$ ، والعدد الفردي على الصورة $2k + 1$ حيث k، عدد صحيح.

إرشادات للدراسة

نظرية الأعداد

هي فرع من فروع الرياضيات تختص بدراسة الأعداد وخصائصها والعمليات عليها وتصنيفها إلى: زوجي، فردي، أولي، غير أولي،... وتثبت النظريات والحقائق لهذه الأعداد.

مثال 4 براهين غير مباشرة في نظرية الأعداد

اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أنه إذا كان $x + 2$ عددًا زوجيًّا، فإنّ x عدد زوجي.

المعطيات: $x + 2$ عدد زوجي.

المطلوب: x عدد زوجي.

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أنّ x عدد فردي ، وهذا يعني أن $x = 2k + 1$ ، حيث k عدد صحيح.

الخطوة 2:

$x + 2 = (2k + 1) + 2$ عوّض

$= (2k + 2) + 1$ خاصيّة الإبدال

$= 2(k + 1) + 1$ خاصية التوزيع

والآن حدّد ما إذا كان $2(k + 1) + 1$ عددًا زوجيًّا أو فرديًّا. بما أن k عدد صحيح، فإنّ $k + 1$ عدد صحيح أيضًا. افترض أن m تساوي $k + 1$ ، فيكون:

$2(k + 1) + 1 = 2m + 1$ عوّض

إذن $x + 2$ يمكن أن يُمثَّل بـ $2m + 1$ ، حيث m عدد صحيح، ولكن هذا التمثيل يعني أنّ $x + 2$ عدد فردي. وهذا يتناقض مع العبارة المعطاة $x + 2$ عدد زوجي.

الخطوة 3: بما أنّ افتراض x عدد فردي أدّى إلى تناقضٍ مع العبارة المعطاة، فإنّ النتيجة الأصليّة x عدد زوجي يجب أن تكون صحيحةً.

تحقق من فهمك

4) اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أنه "إذا كان مربع عدد صحيح فرديًّا، فإنّ العدد الصحيح فرديٌّ".

البرهان غير المباشر في الهندسة: يمكن أن يستعمل التبرير غير المباشر لإثبات صحة عبارات في الهندسة، مثل نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة.

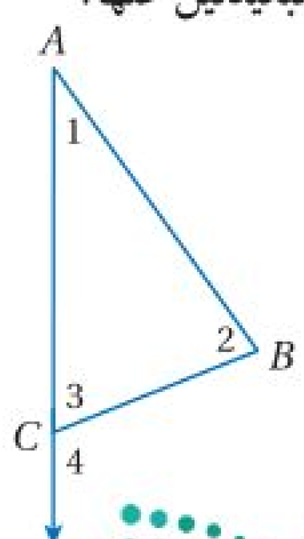
تنبيه!

البرهان بالتناقض مقابل المثال المضاد

البرهان بالتناقض وإعطاء مثال مضاد أمران مختلفان؛ إذ يُستعمل المثال المضاد لإثبات خطأ تخمين أو افتراض، ولا يمكن استعماله لإثبات صحة التخمين أو الافتراض.

مثال 5 برهان هندسي

أثبت أنّ قياس الزاوية الخارجيّة لمثلث يكون أكبر من قياس كلٍّ من الزاويتين الداخليتين البعيدتين عنها.



ارسم شكلًا توضيحيًّا، ثم عيّن عليه المعطيات والمطلوب.

المعطيات: $\angle 4$ زاوية خارجية لـ $\triangle ABC$.

المطلوب: إثبات أن $m\angle 4 > m\angle 2$ ، وأن $m\angle 4 > m\angle 1$.

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أن $m\angle 4 \ngtr m\angle 1$، أو $m\angle 4 \ngtr m\angle 2$.

أيْ أنّ $m\angle 4 \leq m\angle 1$، أو $m\angle 4 \leq m\angle 2$.

الخطوة 2: تحتاج فقط إلى بيان أن الافتراض $m\angle 1 \leq m\angle 4$ يؤدي إلى تناقضٍ، وبالمثل سيؤدي الافتراض $m\angle 2 \leq m\angle 4$ إلى تناقضٍ أيضًا .

الافتراض $m\angle 1 \leq m\angle 4$ يعني أن: $m\angle 1 = m\angle 4$ أو $m\angle 1 > m\angle 4$.

الحالة 1: $m\angle 1 = m\angle 4$

$m\angle 4 = m\angle 1 + m\angle 2$ نظريه الزاوية الخارجيّة

$m\angle 4 = m\angle 4 + m\angle 2$ عوّض

$0 = m\angle 2$ اطرح $m\angle 4$ من كلا الطرفين.

وهذا يناقض حقيقة أن قياس الزاوية أكبر من 0 ؛ لذا فإن $m\angle 1 \neq m\angle 4$.

الحالة 2: $m\angle 1 > m\angle 4$

$m\angle 4 = m\angle 1 + m\angle 2$ نظرية الزاوية الخارجيّة

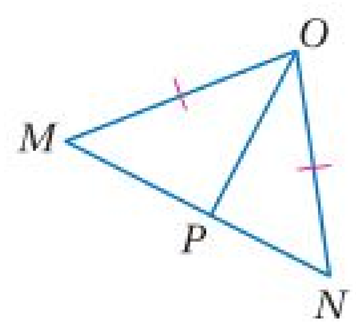
$m\angle 4 > m\angle 1$ قياسات الزوايا موجبة

هذا يناقض الفرض بأن $m\angle 1 > m\angle 4$

الخطوة 3: في الحالتين يؤدي الافتراض إلى تناقض مع نظرية أو تعريف؛ لذا فالنتيجة الأصليّة بأنّ $m\angle 4 > m\angle 1$ وأن $m\angle 4 > m\angle 2$ يجب أن تكون صحيحة.

تحقق من فهمك

5) اكتب برهانًا غير مباشر.



المعطيات: $\overline{MO} \cong \overline{ON}$, $\overline{MP} \not\cong \overline{NP}$

المطلوب: $\angle MOP \not\cong \angle NOP$

إرشادات للدراسة

تعرّف التناقضات

تذكّر أن التناقض في البرهان غير المباشر لا يكون دائمًا مع المعطيات أو الفرض الذي تبدأ به، بل يمكن أن يكون مع حقيقة معلومة أو تعريف كما ورد في الحالة 1 من المثال 5 ، حيث إن قياس أي زاوية في مثلث يجب أن يكون أكبر من 0.

تأكـد

المثال 1 اكتب الافتراض الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي :

1) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

2) $\triangle XYZ$ مختلف الأضلاع.

3) إذا كان $4x < 24$ ، فإنّ $x < 6$

4) $\angle A$ليست زاوية قائمة.

المثال 2 اكتب برهانًا غير مباشر لكل عبارة من العبارتين الآتيتين :

5) إذا كان $2x + 3 < 7$ ، فإنّ $x < 2$

6) إذا كان $3x - 4 > 8$ ، فإنّ $x > 4$

المثال 3 7) **كرة قدم:** سجّل فهد 13 هدفًا لصالح فريقه المدرسي في المباريات الست الأخيرة. أثبت أنّ متوسط عدد الأهداف التي سجلها في كل مباراة كان أقل من 3

المثال 4 8) اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أنّه إذا كان $5x - 2$ عددًا فرديًّا، فإن x عدد فردي.

المثال 5 اكتب برهانًا غير مباشر لكل عبارة من العبارتين الآتيتين:

9) وتر المثلث القائم الزاوية هو أطول أضلاعه.

10) إذا كانت الزاويتان متكاملتين، فإنّه لا يمكن أن تكونا منفرجتين معًا.

تدرب وحل المسائل

المثال 1 **اكتب الافتراض الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي:**

11) إذا كان $2x > 16$ ، فإنّ $x > 8$.

12) $\angle 1, \angle 2$ زاويتان غير متكاملتين.

13) إذا تساوى ميلا مستقيمين، فإنّ المستقيمين متوازيان.

14) العدد الفردي لا يقبل القسمة على 2 .

المثال 2 **اكتب برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي:**

15) إذا كان $-3x + 4 < 7$ ، فإنّ $x > -1$.

16) إذا كان $-2x - 6 > 12$ ، فإنّ $x < -9$.

المثال 3

17) **ألعاب حاسوب:** اشترى منصور لعبتي حاسوب بأكثر من 400 ريال، وبعد أسابيع قليلة سأله صديقه كم تكلفة اللعبة الواحدة. فلم يتذكر منصور ذلك. استعمل التبرير غير المباشر؛ لتبين أن إحدى اللعبتين على الأقلّ كلّفت أكثر من 200 ريال.

18) **جمع التبرّعات:** أقامت جمعيّة خيرية حفلة لجمع التبرعات لمساعدة الفقراء والمحتاجين، وكان سعر تذكرة الدخول للكبار 30 ريالًا، وللأطفال 12.5 ريالًا. إذا بيعت 375 تذكرة، وكان ريعها أكثر من 7300 ريال، فأثبت أنه تم بيع 150 تذكرة على الأقل للكبار.

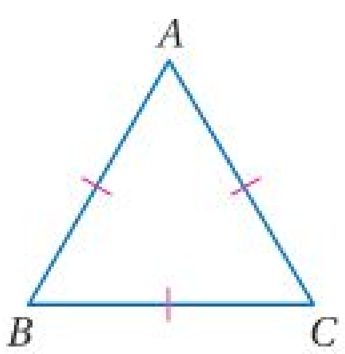
المثالان 4, 5 **اكتب برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي:**

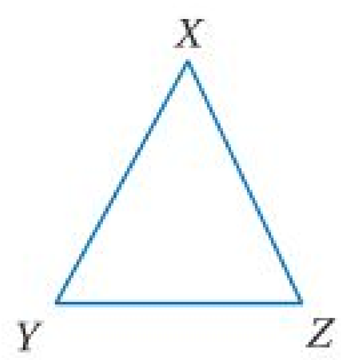
19) **المعطيات:** xy عدد صحيح فردي.
المطلوب: كلًّا من x, y عدد صحيح فردي

20) **المعطيات:** n^2 عدد زوجي.
المطلوب: n عدد زوجي.

21) **المعطيات:** $XZ > YZ$
المطلوب: $\angle X \not\cong \angle Y$

22) **المعطيات:** $\triangle ABC$ متطابق الأضلاع.
المطلوب: $\triangle ABC$ متطابق الزوايا.





23) اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أنه لا يمكن أن يكون للمثلث أكثر من زاوية قائمة.

24) اكتب برهانًا غير مباشر للنظرية 4.10.

25) اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أنّه إذا كان $\frac{1}{b} < 0$ ، فإن b عدد سالب.

26) **كرة سلّة:** عندما خرج عدنان من الملعب ليدخل زميل له قُبيل نهاية الشوط الأول من المباراة كان فريق مدرسته متقدّمًا بـ 28 نقطة مقابل 26 . وعندما عاد مع بداية الشوط الثاني كان الفريق المنافس متقدمًا بـ 29 نقطة مقابل 28 نقطة. استنتج أخو عدنان حين علم ذلك أنّ لاعبًا من الفريق المنافس سجَّل ثلاث نقاط من رمية واحدة. أثبت صحّة أو خطأ استنتاجه باستعمال البرهان غير المباشر ومعلومات الربط مع الحياة.

الربط مع الحياة

هناك أكثر من طريقة لتسجيل ثلاث نقاط في كرة السلة، منها التسجيل من خارج المنطقة، ومنها أن يسجّل اللاعب نقطتين ويحصل على رمية حرة نتيجة خطأ من الفريق المنافس ويسجل منها نقطة.

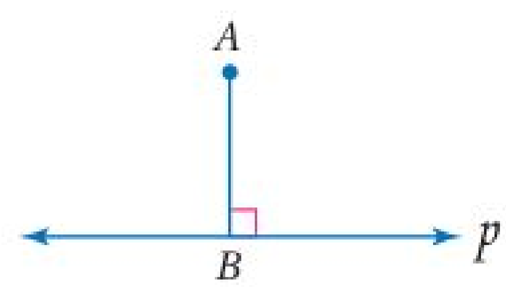
27) ألعاب إلكترونية: تتضمن لعبة حاسوبية فارسًا في رحلةٍ للبحث عن الكنز، وفي نهاية الرحلة يقترب الفارس من البابين المبيَّنين أدناه.

أخبر خادمٌ الفارس بأن أحد الإعلانين صحيح والآخر خطأ. استعمل التبرير غير المباشر لتحدد أيّ البابين سيختاره الفارس. وضح إجابتك.

حدّد ما إذا كان إثبات كل عبارة حول أقصر مسافة بين نقطة وخط مستقيم أو مستوٍ، يمكن إثباتها باستعمال البرهان المباشر أو البرهان غير المباشر، ثم اكتب برهانًا لكلٍّ منهما.

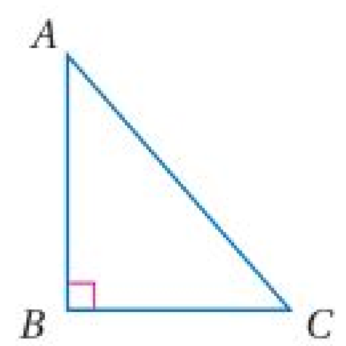
28) المعطيات: $\overline{AB}$ عمودي على المستقيم p

المطلوب: $\overline{AB}$ أقصر قطعة مستقيمة من A إلى المستقيم p.



29) المعطيات: ABC مثلث قائم الزاوية

المطلوب: الوتر $\overline{AC}$ أطول ضلع في المثلث



30) نظريّة الأعداد: في هذه المسألة ستُخمِّن علاقةً في نظرية الأعداد، وتُثبت صحة تخمينك.

a) اكتب عبارة جبرية تمثل "مجموع مكعب العدد n والعدد ثلاثة".

b) كوّن جدولًا يعطي قيم العبارة لعشر قيم زوجية وفردية مختلفة لـ n.

c) اكتب تخمينًا حول n عندما تكون قيمة العبارة زوجيّة.

d) اكتب برهانًا غير مباشر لتخمينك.

مراجعة المفردات

مجموعة الأعداد الصحيحة هي:
$\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

مسائل مهارات التفكير العليا

31) مسألة مفتوحة: اكتب عبارة يمكن إثبات صحتها باستعمال البرهان غير المباشر ثم أثبتها.

32) تحدٍّ: إذا كان x عددًا نسبيًّا، فإنه يمكن تمثيله بالصورة $\frac{a}{b}$، حيث a, b عددان صحيحان، و $b \neq 0$. ولا يمكن تمثيل العدد غير النسبي في صورة ناتج قسمة عددين صحيحين. اكتب برهانًا غير مباشر تبيّن فيه أن ناتج ضرب عدد نسبي لا يساوي الصفر في عدد غير نسبي، هو عدد غير نسبي.

33) **اكتشف الخطأ:** يحاول أسعد ورضوان أن يُثبتا العبارة التالية باستعمال البرهان غير المباشر. فهل أيٌّ منهما إجابته صحيحة؟ وضح إجابتك.

"إذا كان مجموع عددين زوجيًّا، فإنّ العددين زوجيّان".

أسعد	رضوان
العبارة صحيحة. إذا كان أحد العددين زوجيًّا والآخر صفرًا، فإن المجموع يكون عددًا زوجيًّا. وبما أنّ الافتراض صحيح حتى عندما تكون النتيجة خطأ، فإن العبارة صحيحة.	العبارة صحيحة. إذا كان العددان فرديين فإنّ مجموعهما يكون عددًا زوجيًّا. وبما أن الافتراض صحيح عندما تكون النتيجة خطأ، فإنّ العبارة صحيحة.

34) **اكتب:** اكتب المعاكس الإيجابي للعبارة الموجودة في السؤال 8، واكتب برهانًا مباشرًا للمعاكس الإيجابي. كيف يرتبط البرهان المباشر للمعاكس الإيجابي للعبارة بالبرهان غير المباشر للعبارة الأصلية؟

تدريب على اختبار

35) إذا كان طولا ضلعين في مثلث 12, 7، فأيٌّ مما يأتي **لا** يمكن أن يكون محيط المثلث؟

A 29

B 34

C 37

D 38

36) إذا كان $a < b$، فأيٌّ مما يأتي يكون صحيحًا دائمًا؟

A $-a > -b$

B $3a > b$

C $a^2 < b^2$

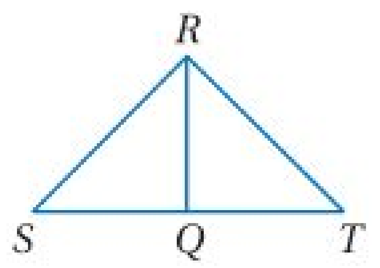
D $a^2 < ab$

مراجعة تراكمية

37) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين. (الدرس 3-4)

المعطيات: $\overline{RQ}$ تنصّف $\angle SRT$.

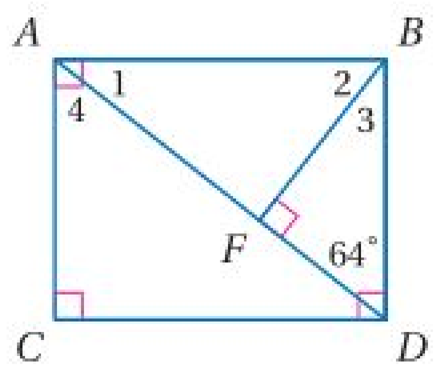
المطلوب: إثبات أنّ $m\angle SQR > m\angle SRQ$



أوجد كلًّا من القياسين الآتيين: (الدرس 2-3)

38) $m\angle 1$

39) $m\angle 4$



40) **هندسة إحداثية:** أوجد المسافة بين المستقيمين المتوازيين: (مهارة سابقة)

$$y = 2x + 2$$
$$y = 2x - 3$$

استعد للدرس اللاحق

حُلَّ كلًّا من المتباينات الآتية:

41) $4x + 7 < 180$

42) $8x - 14 < 3x + 19$

43) $3x + 54 < 90$

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

استكشاف **4-5**

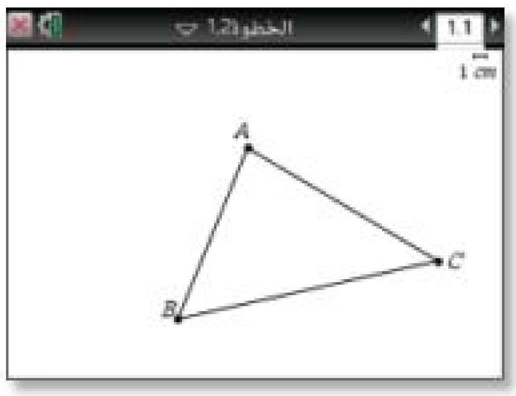
معمل الحاسبة البيانية:

متباينة المثلث
The Triangle Inequality

يمكنك استعمال تطبيق الهندسة في الحاسبة TI–nspire؛ لاستكشاف خصائص المثلث.

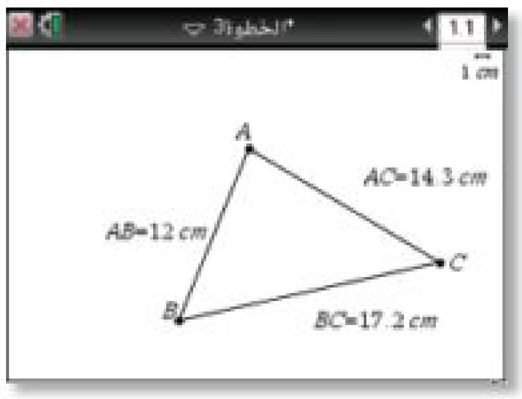
النشاط 1

أنشئ مثلثًا، ولاحظ العلاقة بين مجموع طولَي ضلعين وطول الضلع الثالث.



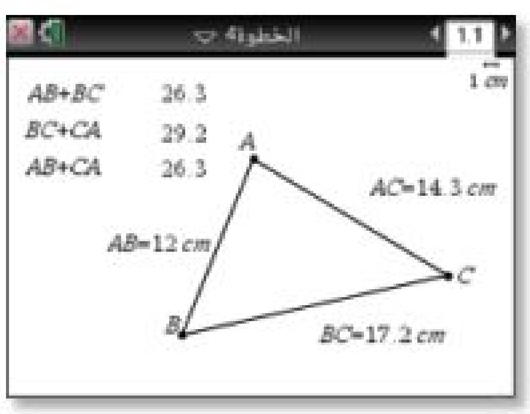
الخطوة 1: أنشئ مثلثًا بالضغط على المفاتيح (on) (menu) ثم اختر 5: الأشكال الهندسية واختر منها 2: مثلث ثم ارسم المثلث واضغط (esc)

الخطوة 2: سمِّ رؤوس المثلث، وذلك بوضع المؤشر عند كل نقطة ثم الضغط على (menu) (ctrl)، ثم اختيار 2: التسمية ، وعلى زر Shift لجعل الحروف كبيرة ثم سمِّ الرؤوس A, B, C



الخطوة 3: • حدد طول كل ضلع من أضلاع المثلث بالضغط على (menu) واختر 6: القياس واختر منها 1: الطول ، ولإيجاد طول كل ضلع: اضغط على رأسين في المثلث، ثم ضع المؤشر في مكان مناسب لظهور النتيجة ثم اضغط (enter)

• اكتب اسم الضلع بجانب الطول المقِيس بالضغط على (menu) (ctrl)، ثم اختيار 5: النص ثم اكتب اسم الضلع واضغط (enter)



الخطوة 4: ولحساب مجموع طول ضلعين في المثلث، اضغط (menu) (ctrl) واختر منها 5: النص ، واكتب اسم ضلعين مثل: $AB + BC$ ، ثم ظلِّل النص $AB + BC$ واضغط (menu) (ctrl) واختر منها 5: الأشكال الهندسية ، واضغط على الرقم الذي يمثل طول الضلع AB، ثم على الرقم الذي يمثل طول الضلع BC ، وسيظهر مجموع الضلعين، ثم ضع المؤشر في مكانٍ مناسبٍ لظهور النتيجة ثم اضغط (enter)

تحليل النتائج:

1) ضع إشارة > أو < أو = داخل ◯؛ لتحصل على عبارة صحيحة فيما يأتي:

$AB + BC \bigcirc CA$ $AB + CA \bigcirc BC$ $BC + CA \bigcirc AB$

2) خمّن العلاقة بين مجموع طولَي ضلعين في المثلث وطول الضلع الثالث.

3) ضع إشارة >أو < أو = داخل ◯؛ لتحصل على عبارةٍ صحيحةٍ فيما يأتي:

$|AB - BC| \bigcirc CA$ $|AB - CA| \bigcirc BC$ $|BC - CA| \bigcirc AB$

4) كيف يمكنك استعمال ملاحظاتك؛ لتحديد مدى طول الضلع الثالث لمثلث إذا علمْتَ طولَي الضلعين الآخرين؟

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-5 متباينة المثلث
The Triangle Inequality

فيما سبق:

درستُ خصائص المتباينات وتطبيقها على العلاقات بين زوايا المثلث وأضلاعه.

والآن:

- أستعمل نظرية متباينة المثلث لأُعيّن الأطوال التي تكوّن مثلثًا.
- أُثبت العلاقات في المثلث باستعمال نظرية متباينة المثلث.

لماذا؟

يريد أحد المصمِّمين أن يستعمل قطع الخيوط المجدُولة والمتبقية من أحد أعماله لتزيين الوسائد المثلثة الشكل أدناه. ولتقليل الإهدار، أراد المصمّم أن يستعمل القطع دون قصها، فاختار ثلاث قطع عشوائيًا وحاول أن يشكّل مثلثًا. والشكلان الآتيان يبيّنان اثنتين من هذه المحاولات.

متباينة المثلث: بما أن المثلث يتكون من ثلاث قطع مستقيمة، فيجب أن تتوافر علاقة خاصّة بين أطوال هذه القطع؛ كي تشكّل مثلثًا.

نظرية 4.11 نظرية متباينة المثلث

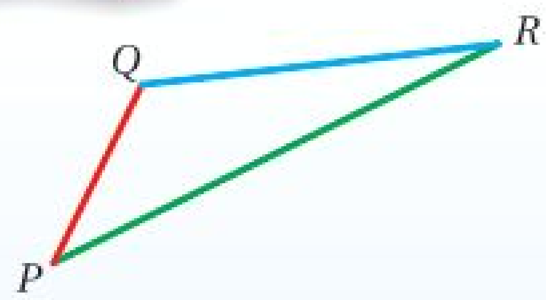
أضف إلى مطويتك

مجموع طولَي أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

أمثلة $PQ + QR > PR$

$QR + PR > PQ$

$PR + PQ > QR$



ستبرهن النظرية 4.11 في السؤال 19

ولتوضيح عدم إمكانية رسم مثلثٍ من ثلاث قطعٍ مستقيمةٍ عُلمت أطوالها، يجب بيان أن إحدى متباينات المثلث الثلاث غير صحيحة.

مثال 1 تعيين الأطوال التي تكوّن مثلثًا

حدد ما إذا كانت القياسات المعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث في كلٍّ من السؤالين الآتيين، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فوضح السبب:

a) $8\text{ in}, 15\text{ in}, 17\text{ in}$.

تحقق من صحة كل متباينة.

$8 + 15 \overset{?}{>} 17$	$8 + 17 \overset{?}{>} 15$	$15 + 17 \overset{?}{>} 8$
$23 > 17$ ✓	$25 > 15$ ✓	$32 > 8$ ✓

بما أنّ مجموع طولَي أيِّ قطعتين أكبر من طول القطعة الثالثة، فإنّ القطع المستقيمة التي أطوالها 17 , 15 , 8 تكوّن مثلثًا.

b) $6\text{ m}, 8\text{ m}, 14\text{ m}$

$6 + 8 \overset{?}{>} 14$

$14 \not> 14$ ✗

بما أن مجموع طولَي قطعتين ليس أكبر من طول القطعة الثالثة، فإن القطع المستقيمة التي أطوالها 14 , 8 , 6 لا يمكن أن تكوِّن مثلثًا.

إرشادات للدراسة

إذا كان مجموع أقصر طولين أكبر من طول الضلع الثالث، فإن الأطوال الثلاثة تمثل أطوال أضلاع مثلث.

✓ تحقق من فهمك

1A) $15\text{ cm}, 16\text{ cm}, 30\text{ cm}$

1B) $2\text{ ft}, 8\text{ ft}, 11\text{ ft}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

عندما يُعلم طولا ضلعين في مثلثٍ، يمكن تحديد مدى القيم الممكنة لطول الضلع الثالث باستعمال نظرية متباينة المثلث.

مثال 2 من الاختبار

إذا كان طولا ضلعين في مثلث هما $3\,cm$, $7\,cm$، فما أصغر عدد طبيعي يمكن أن يمثل طول الضلع الثالث؟

A $3\,cm$

B $4\,cm$

C $5\,cm$

D $10\,cm$

إرشادات للاختبار

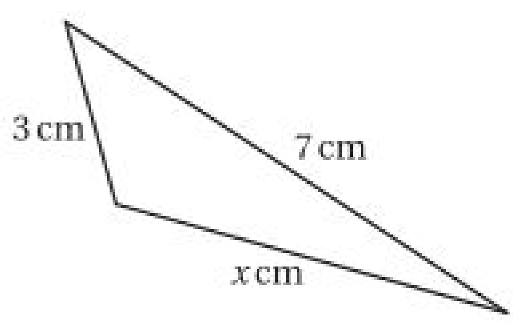
اختبار البدائل

إذا كان الوقت غير كافٍ يمكنك اختبار كل بديل لإيجاد الإجابة الصحيحة واستبعاد البدائل الأخرى.

اقرأ فقرة الاختبار

المطلوب هو تحديد أصغر قيمة ممكنة لطول الضلع الثالثِ في مثلثٍ طولا ضلعين من أضلاعه $3\,cm$, $7\,cm$

حل فقرة الاختبار



لتحديد أصغر طول ممكن من بين البدائل المعطاة، حدّد مدى القيم الممكنة لطول الضلع الثالث أولًا؛ لذا ارسم شكلًا وافترض أن طول الضلع الثالث يساوي x، ثم اكتب متباينات المثلث الثلاث، وحل كل واحدةٍ منها.

$3 + 7 > x$	$3 + x > 7$	$x + 7 > 3$
$10 > x$ أو $x < 10$	$x > 4$	$x > -4$

قراءة الرياضيات

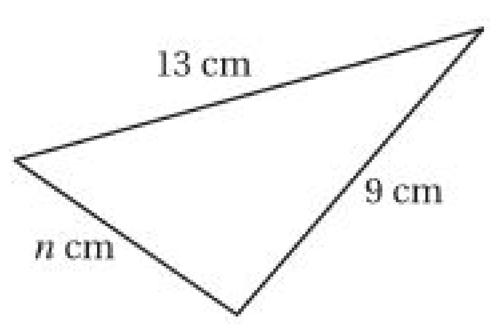
المتباينة المركبة

تقرأ المتباينة المركبة $4 < x < 10$ على النحو التالي: تقع x بين 4 وَ 10 أو x أكبر من 4 وأقل من 10

لاحظ أن $x > -4$ تكون صحيحةً دائمًا لأي قيمةٍ صحيحةٍ موجبةٍ لِـ x، وبربط المتباينتين المتبقيتين، يكون مدى القيم التي تحقق كلتا المتباينتين هو $x > 4$ وَ $x < 10$، والذي يمكن كتابته في الصورة $4 < x < 10$

وأقلّ عدد صحيح موجب بين 4 وَ 10 هو 5؛ لذا فالإجابة الصحيحة هي C .

تحقق من فهمك



2) في الشكل المجاور، أيُّ الأعداد الآتية لا يمكن أن يكون قيمة لِـ n؟

A 7   **C** 10

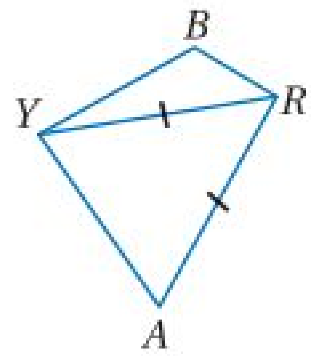
B 13   **D** 22

استعمال نظريَة متباينة المثلث في البراهين: يمكنك استعمال نظرية متباينة المثلث في البراهين المختلفة.

مثال 3 من واقع الحياة استعمال نظرية متباينة المثلث في البرهان

طيران: المسافة الجوية من الرياض إلى ينبع تساوي المسافة الجوية من الرياض إلى أبها، أثبت أن الطيران المباشر من الرياض إلى ينبع مرورًا بمدينة بريدة يقطع مسافةً أكبر من المسافة المقطوعة عند الطيران من الرياض إلى أبها دون توقّف.

ارسم شكلًا تقريبيًّا يمثل المسألة، وضع عليه رموز أسماء المدن، وارسم القطعة $\overline{YA}$ لتشكّل $\triangle YRA$.



المعطيات: $RY = RA$

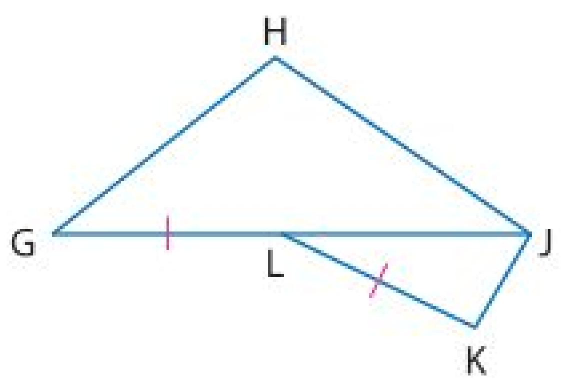
المطلوب: $RB + BY > RA$

البرهان:

العبارات	المبررات
$RY = RA$ (1	1) معطى
$RB + BY > RY$ (2	2) نظرية متباينة المثلث
$RB + BY > RA$ (3	3) بالتعويض

تحقق من فهمك

3) اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: $GL = LK$

المطلوب: $JH + GH > JK$

الربط مع الحياة

يختلف الطيران المباشر عن الطيران من دون توقف، ففي حالة الطيران المباشر لا يغيّر المسافرون الطائرة، ولكن قد تحط الطائرة في مطار واحد أو أكثر قبل وصولها لغايتها.

تأكد

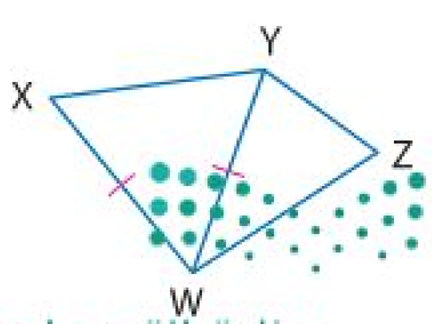
المثال 1 حدِّد ما إذا كانت القياسات المعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث في كلٍّ مما يأتي، وإن لم يكن ذلك ممكنًا فوضِّح السبب.

1) 5 cm, 7 cm, 10 cm 2) 3 in, 4 in, 8 in 3) 6 m, 14 m, 10 m

المثال 2 4) **اختيار من متعدّد:** إذا كان طولَا ضلعين في مثلث 5 m , 9 m ، فما أصغر عدد صحيح يمكن أن يمثّل طول الضلع الثالث فيه؟

A 5 m B 4 m C 14 m D 6 m

المثال 3 5) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: $\overline{XW} \cong \overline{YW}$

المطلوب: $YZ + ZW > XW$

تدرب وحل المسائل

المثال 1 حدد ما إذا كانت كلٌّ من القياسات الآتية تمثل أطوال أضلاع مثلث في كلٍّ ممّا يأتي، وإن لم يكن ذلك ممكنًا فوضح السبب.

6) 4 ft, 9 ft, 15 ft

7) 11 mm, 21 mm, 16 mm

8) 9.9 cm, 1.1 cm, 8.2 cm

9) $2\frac{1}{2}$ m, $1\frac{3}{4}$ m, $5\frac{1}{8}$ m

المثال 2 اكتب متباينةً تمثل مدى طول الضلع الثالث في مثلثٍ عُلم طولَا ضلعين من أضلاعه في كلٍّ مما يأتي:

10) 4 ft, 8 ft

11) 5 m, 11 m

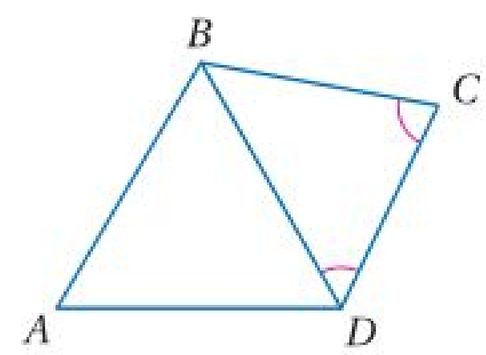
12) 2.7 cm, 4.2 cm

13) $\frac{1}{2}$ km, $3\frac{1}{4}$ km

المثال 3 **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين لكلٍّ مما يأتي:

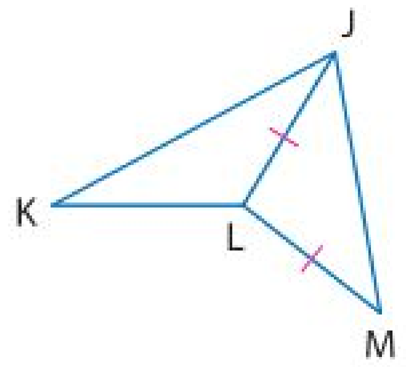
14) **المعطيات:** $\angle BCD \cong \angle CDB$

المطلوب: $AB + AD > BC$



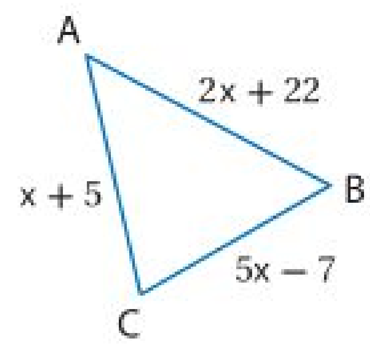
15) **المعطيات:** $\overline{JL} \cong \overline{LM}$

المطلوب: $KJ + KL > LM$

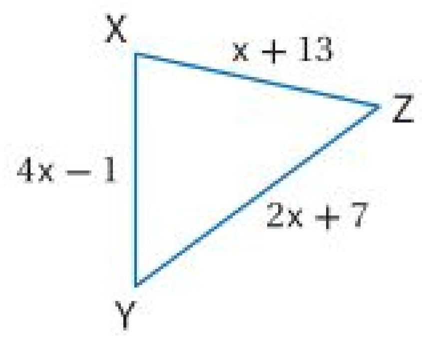


جبر: حدّد القيم الممكنة لـ x في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

16)



17)



18) **قيادة:** يُريد توفيق أن يسلك المسار الأقصر من بيته إلى المجمع الرياضي، و يمكنه أن يسلك الطريق 1 أو الطريق 2 ثم الطريق 3 .

a) أيُّ المسارين أقصر من بيت توفيق إلى المجمع الرياضي؟ وضح إجابتك.

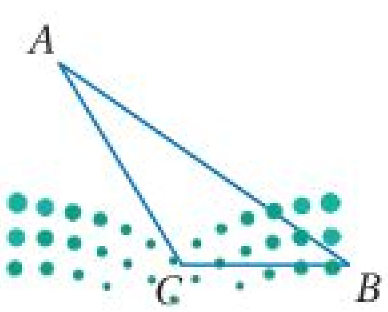
b) افترض أن توفيقًا يقود سيارته بسرعةٍ قريبةٍ جدًّا من السرعة القُصوى المسموح بها ولا تتعداها. إذا كانت السرعة القُصوى على الطريق 1 تساوي 60 km/h ، وعلى كلٍّ من الطريقين 3 , 2 تساوي 100 km/h ، فأيُّ المسارَين سيستغرق وقتًا أقل؟ وضح إجابتك.

19) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\triangle ABC$

المطلوب: $AC + BC > AB$ (نظرية متباينة المثلث)

(إرشاد: ارسم قطعة مستقيمة مساعدة $\overline{CD}$ ، على أن تكون C بين B , D ويكون $\overline{CD} \cong \overline{AC}$) .



إذا كانت كل مجموعة تمثل أطوال أضلاع مثلث، فاكتب متباينةً تمثِّل مدى القيم الممكنة لـ x في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

(20 $x, 4, 6$

(21 $8, x, 12$

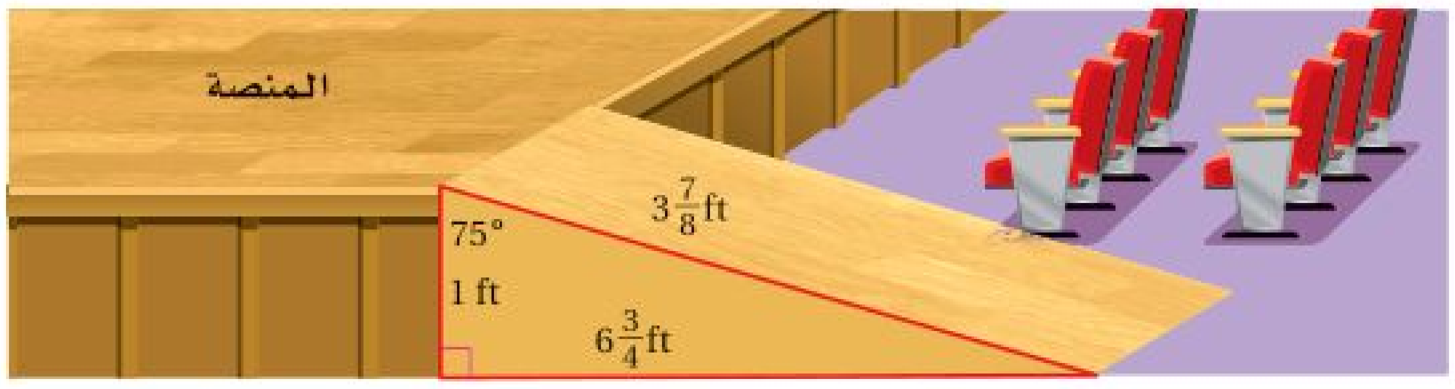
(22 $x + 1, 5, 7$

(23 $x + 2, x + 4, x + 6$

الربط مع الحياة

تصمم المسارح وفق نظام هندسي دقيق يُراعى فيه إمكانية مشاهدة جميع الحضور للمنصة، وسماع الصوت بوضوح دون صدى.

(24 **مسرحٌ:** يصمم عبد الرحمن وخليل منحدرًا للصعود إلى منصة المسرح، فخطَّط عبد الرحمن المنحدر كما في الشكل أدناه، ولكن خليلًا كان قلقًا بشأن القياسات ويريد أن يتحقق منها قبل البدء في قص الخشب، فهل يوجد ما يبرر هذا القلق؟ وضح إجابتك.



تقدير: **حدد ما إذا كانت القياسات المعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث في كلٍّ مما يأتي، وذلك دون استعمال الآلة الحاسبة. وضِّح إجابتك.**

(25 $\sqrt{8}$ ft, $\sqrt{2}$ ft, $\sqrt{35}$ ft

(26 $\sqrt{99}$ cm, $\sqrt{48}$ cm, $\sqrt{65}$ cm

(27 حدّد ما إذا كانت النقاط $X(1, -3), Y(6, 1), Z(2, 2)$ تمثل رؤوس مثلث. وضح إجابتك.

(28 **تمثيلات متعدِّدة:** في هذه المسألة ستكتشف العلاقة بين أضلاع مثلثين وزواياهما.

a) **هندسيًّا:** ارسم ثلاثة أزواج من المثلثات في كل مثلثين منها زوجان من الأضلاع المتطابقة فقط، وضع إشارات على كل ضلعين متطابقين، وسمِّ كل زوج من المثلثات ABC, DEF، حيث $\overline{AB} \cong \overline{DE}, \overline{AC} \cong \overline{DF}$.

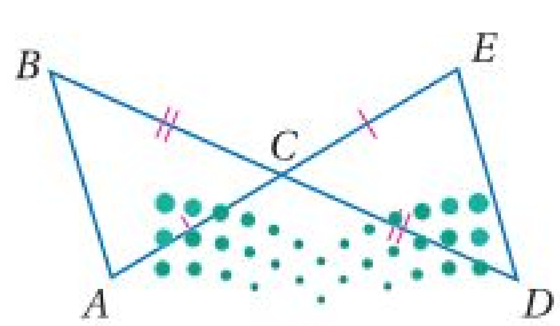
b) **جدوليًّا:** انسخ الجدول أدناه في دفترك، ثم أوجد بالقياس قيمة كلٍّ من $BC, m\angle A, EF, m\angle D$، وسجّلها في الجدول.

أزواج المثلثات	BC	$m\angle A$	EF	$m\angle D$
1				
2				
3				

c) **لفظيًّا:** خمّن العلاقة بين الزاويتين المقابلتين للضلعين غير المتطابقين في كل زوجٍ من المثلثات التي فيها زوجان من الأضلاع المتطابقة.

مسائل مهارات التفكير العليا

(29 **تحدٍّ:** ما مدى القيم الممكنة لمحيط الشكل $ABCDE$، إذا كان $AC = 7, DC = 9$؟ وضحّ إجابتك.



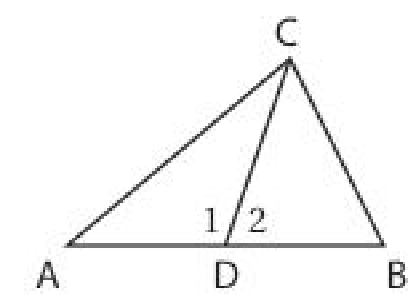
(30 **تبرير:** ما مدى طول كلٍّ من الضلعين المتطابقين في مثلثٍ طول قاعدته 6 cm؟ وضح إجابتك.

31) **مسألة مفتوحة :** طول أحد أضلاع مثلث 5 سم. ارسم مثلثًا يكون الضلع الذي طوله 5 سم أقصر أضلاعه، ومثلثًا آخر يكون الضلع الذي طوله 5 سم أطول أضلاعه. مضمِّنًا رسمَكَ أطوال أضلاع المثلث وقياسات زواياه.

32) **اكتب:** اشرح الطريقة التي تستعملها لإيجاد أصغر قيمةٍ وأكبر قيمةٍ لطول ضلع مثلثٍ إذا علمت طولَي الضلعين الآخرين.

تدريب على اختبار

33) إذا كانت $\overline{DC}$ قطعةً متوسطةً في $\triangle ABC$ وكان $m\angle 2 < m\angle 1$ ، فأي عبارة مما يأتي **غير** صحيحة؟



A $AD = BD$

B $m\angle ADC = m\angle BCD$

C $AC > BC$

D $m\angle 1 > m\angle B$

34) أيُّ معادلة مما يأتي تمثل العبارة:
"ناتج طرح 7 من $14w$ يساوي z" ؟

A $7 - 14w = z$

B $z = 14w + 7$

C $7 - z = 14w$

D $z = 14w - 7$

مراجعة تراكمية

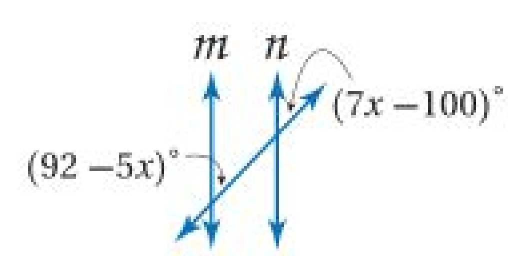
اكتب الافتراض الضروري الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي : (الدرس 4-4)

35) إذا كان $4y + 17 = 41$، فإن $y = 6$

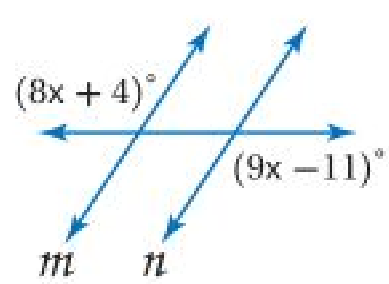
36) إذا قطع مستقيم مستقيمين آخرين، وكانت الزاويتان المتبادلتان داخليًّا متطابقتين، فإنّ المستقيمين متوازيان.

أوجد قيمة x ، على أن يكون $m \parallel n$ في كلٍّ مما يأتي، واذكر المسلّمة أو النظرية التي استعملتها : (مهارة سابقة)

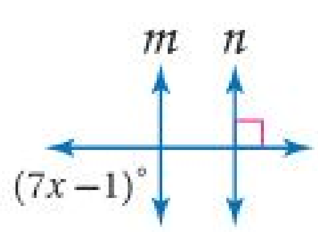
37)



38)



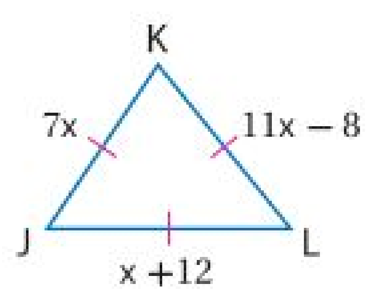
39)



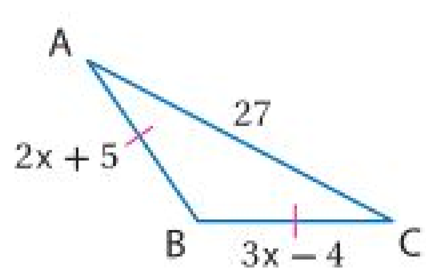
استعد للدرس اللاحق

أوجد قيمة x ، وأطوال الأضلاع المجهولة في كل مثلث مما يأتي:

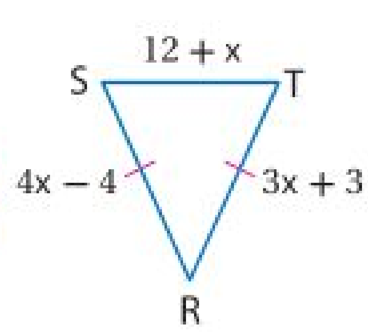
40)



41)



42)



رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-6 المتباينات في مثلثين
Inequalities in Two Triangles

فيما سبق:

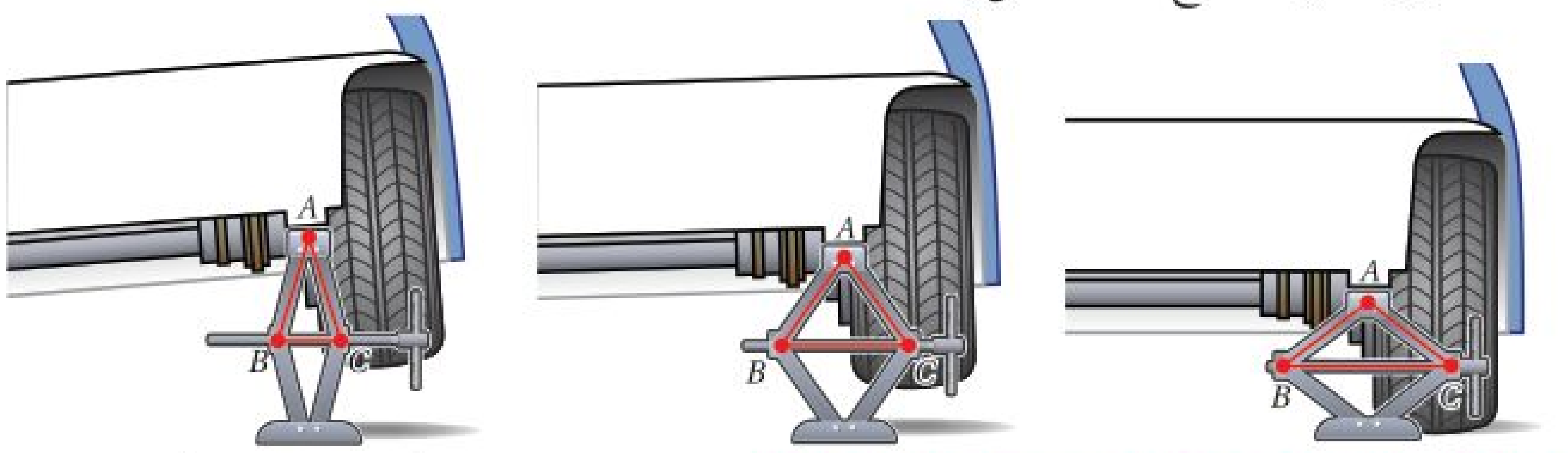
درستُ المتباينات في المثلث الواحد.

والآن:

- أطبق متباينة SAS أو عكسها؛ لإجراء مقارنات بين عناصر مثلثين.
- أثبت صحة العلاقات باستعمال متباينة SAS أو عكسها.

لماذا؟

تُستعمل الرافعة عند تغيير إطارات السيارات، والرافعة المبيّنة أدناه واحدة من الرافعات البسيطة التي ما زالت تُستعمل حتى يومنا هذا. لاحظ أنّه عندما تُنزَّلُ الرافعة فإنّ ساقَي $\triangle ABC$ يظلّان متطابقين، في حين تزداد الزاوية A اتّساعًا ويزداد طول الضلع $\overline{BC}$ المقابل لـ $\angle A$.



متباينة ضلعين والزاوية المحصورة بينهما (SAS): الملاحظة في المثال أعلاه صحيحة لأي نوعٍ من المثلثات وتوضّح النظريتين الآتيتين:

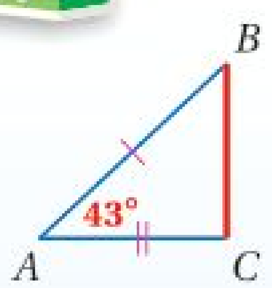
نظريتان — المتباينات في مثلثين

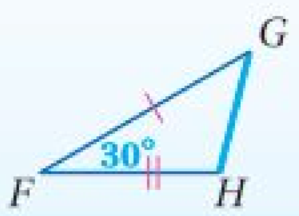
أضف إلى مطويتك

4.12 متباينة SAS

إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين مناظرين في مثلث آخر، وكان قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني، فإنَ الضلع الثالث في المثلث الأول يكون أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني.

مثال: إذا كان: $\overline{AB} \cong \overline{FG}$, $\overline{AC} \cong \overline{FH}$, $m\angle A > m\angle F$ ، فإنَ $BC > GH$.

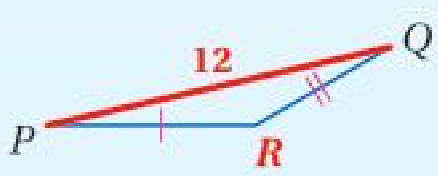


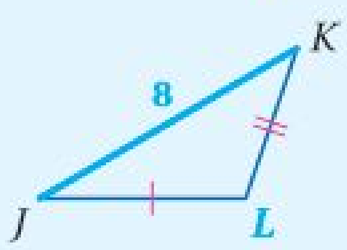


4.13 عكس متباينة SAS (SSS)

إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين مناظرين في مثلث آخر، وكان الضلع الثالث في المثلث الأول أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني، فإنَ قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول يكون أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني.

مثال: إذا كان: $\overline{PR} \cong \overline{JL}$, $\overline{QR} \cong \overline{KL}$, $PQ > JK$ ، فإن $m\angle R > m\angle L$.



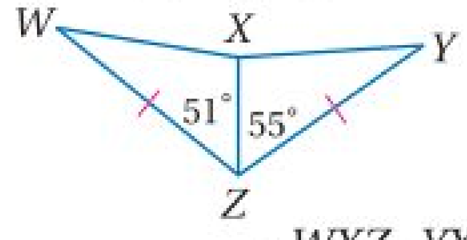


ستبرهن النظرية 4.12 في الصفحة التالية، وستبرهن النظرية 4.13 في السؤال 18

مثال 1 استعمال متباينة SAS وعكسها

قارن بين القياسين المحددين في كلٍّ من السؤالين الآتيين :

a) WX, XY

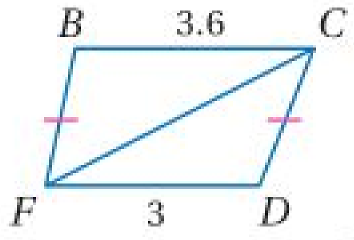


في المثلثين WXZ, YXZ ،

$\overline{WZ} \cong \overline{YZ}, \overline{XZ} \cong \overline{XZ}$, $m\angle YZX > m\angle WZX$ ،

وبحسب متباينة SAS فإن $WX < XY$

b) $m\angle FCD, m\angle BFC$



في المثلثين BCF, DFC ،

$\overline{BF} \cong \overline{DC}, \overline{FC} \cong \overline{CF}, BC > FD$ ،

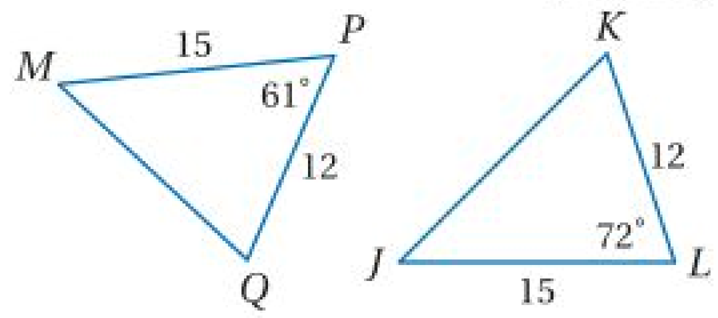
وبحسب عكس متباينة SAS فإن

$m\angle BFC > m\angle DCF$

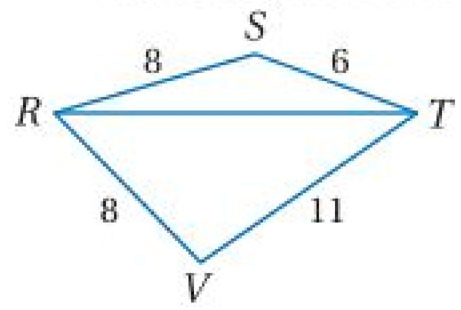
✓ تحقق من فهمك

قارن بين القياسات المعطاة في كلٍّ من السؤالين الآتيين :

1A) JK, MQ



1B) $m\angle SRT, m\angle VRT$



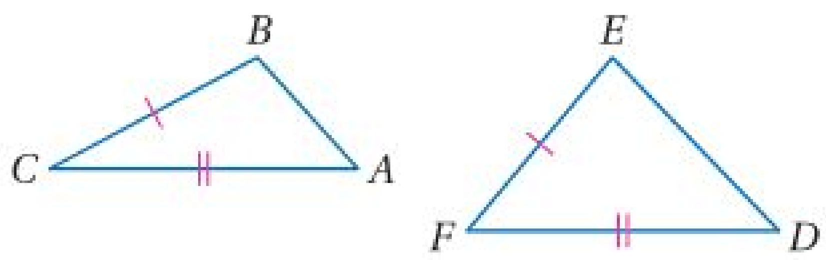
إرشادات للدراسة

متباينتا SSS, SAS
تُعرف المتباينة SAS باسم متباينة الرافعة، وعكسها يُعرف بالمتباينة SSS.

برهان متباينة SAS

المعطيات: في المثلثين ABC, DEF ،
$\overline{AC} \cong \overline{DF}, \overline{BC} \cong \overline{EF}, m\angle F > m\angle C$

المطلوب: $DE > AB$

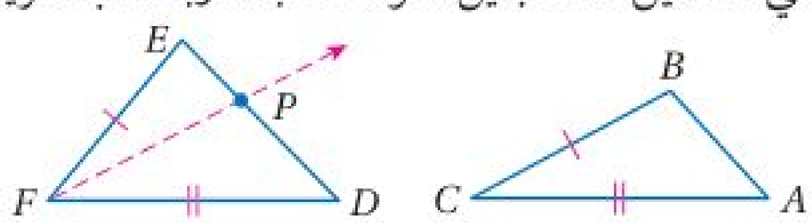


البرهان:

تعلم أنَّ: $\overline{AC} \cong \overline{DF}, \overline{BC} \cong \overline{EF}$ ، وتعلم أيضًا أن: $m\angle F > m\angle C$.

ارسم نصف المستقيم FP،على أن يكون $m\angle DFP = m\angle C, \overline{PF} \cong \overline{BC}$ ، وهذا سيقودنا إلى حالتين هما :

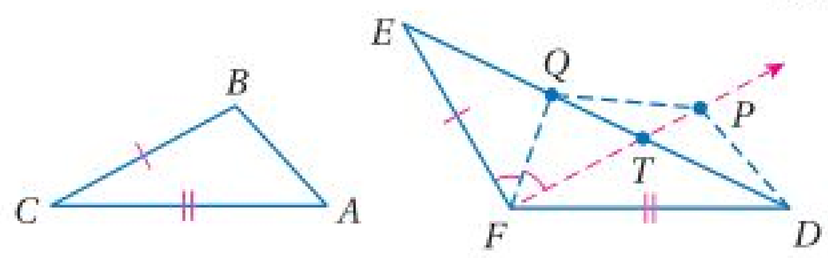
الحالة 1 P تقع على $\overline{DE}$، وعندها يكون $\triangle FPD \cong \triangle CBA$ بحسب SAS، لذا يكون $PD = BA$ ؛ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة، وبحسب تعريف تطابق القطع المستقيمة،



ومسلمة جمع قياسات القطع المستقيمة يكون $DE = EP + PD$ ؛ لذا يكون $DE > PD$ بناءً على تعريف المتباينة، وبالتعويض يكون $DE > AB$

الحالة 2 P لا تقع على $\overline{DE}$

وعندئذٍ سمِّ نقطة تقاطع $\overline{FP}, \overline{ED}$ بالحرف T، وارسم القطعة المستقيمة المساعدة $\overline{FQ}$ على أن تكون Q على $\overline{DE}$ ، وتكون $\angle EFQ \cong \angle QFP$ ، ثم ارسم القطعتين المستقيمتين المساعدتين $\overline{PD}, \overline{PQ}$.



$\overline{FP} \cong \overline{BC}, \overline{BC} \cong \overline{EF}, \overline{AC} \cong \overline{DF}$	معطى
$\overline{FP} \cong \overline{EF}$	خاصية التعدّي للتطابق
$\overline{QF} \cong \overline{QF}$	خاصية الانعكاس للتطابق
$\angle EFQ \cong \angle QFP$	شرط تحديد النقطة Q
$\triangle EFQ \cong \triangle PFQ$	مسلّمة SAS
$\overline{EQ} \cong \overline{PQ}$	تطابق العناصر المتناظرة
$EQ = PQ$	تعريف التطابق
$m\angle DFP = m\angle C$	شرط تحديد النقطة
$\triangle FPD \cong \triangle CBA$	مسلّمة SAS
$\overline{PD} \cong \overline{BA}$	تطابق العناصر المتناظرة
$PD = BA$	تعريف التطابق
$QD + PQ > PD$	متباينة المثلث
$QD + EQ > PD$	بالتعويض
$ED = QD + EQ$	مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة
$ED > PD$	بالتعويض
$ED > BA$	بالتعويض

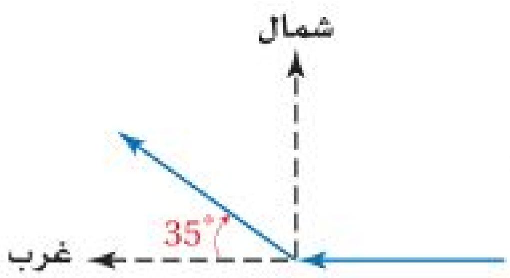
يمكنك استعمال متباينة SAS لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال 2 من واقع الحياة — استعمال متباينة SAS

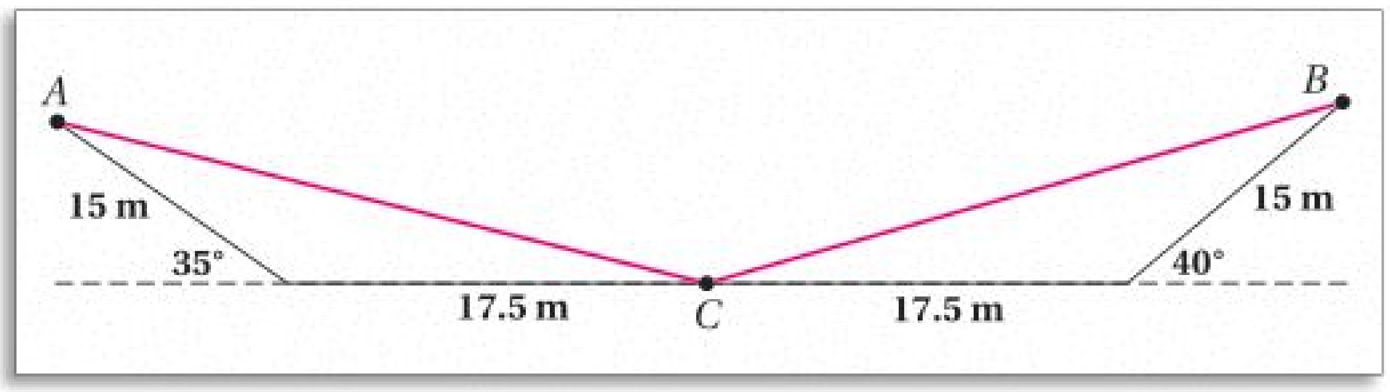
التزلُّج على الجليد: في إحدى صالات التزلُّج، انطلق اثنان من المتزلِّجين على الجليد من المكان نفسه، فقطع المتزلج A مسافة 17.5 m في اتجاه الغرب، ثم انحرف 35° في اتجاه الشمال الغربي قاطعًا 15 m ، بينما قطع المتزلِّج B مسافة 17.5 m في اتجاه الشرق، ثم انحرف 40° في اتجاه الشمال الشرقي قاطعًا 15 m ، أيُّهما كان الأبعد عن مكان الانطلاق عند هذه اللحظة؟ وضّح إجابتك.

افهم: **المعطيات:** قطع المتزلج A مسافة 17.5 m في اتجاه الغرب، ثم انحرف 35° في اتجاه الشمال الغربي قاطعًا 15 m، والمتزلج B قطع مسافة 17.5 m في اتجاه الشرق، ثم انحرف 40° في اتجاه الشمال الشرقي قاطعًا 15 m.

المطلوب: أيُّهما كان أبعد عن مكان الانطلاق.



خطط: ارسم شكلًا لهذا الوضع.



المسار الذي اتّبعه كل متزلج وبعده عن مكان الانطلاق يشكّل مثلثًا؛ إذ قطع كلُّ متزلجٍ 17.5 m ، ثم انحرف وقطع 15 m أخرى.

استعمل أزواج الزوايا المستقيمة لإيجاد قياس الزاويتين المحصورتين، ثم طبّق متباينة SAS؛ لتقارن بين بُعدي المتزلِّجين عن مكان الانطلاق.

حل: قياس الزاوية المحصورة لمسار المتزلج A يساوي $180° - 35°$ أو 145° ، وقياس الزاوية المحصورة لمسار المتزلج B يساوي $180° - 40°$ أو 140°

بما أنّ $145° > 140°$ ، إذن $AC > BC$ بحسب متباينة SAS؛ لذا فالمتزلج A أبعد عن مكان الانطلاق من المتزلج B .

تحقق: المتزلج B انحرف 5° أكثر مما فعل المتزلج A في اتجاه مكان الانطلاق؛ لذا سيكون المتزلج B أقرب إلى مكان الانطلاق من المتزلج A . ✔

الربط مع الحياة

ظهرت رياضة التزلج على الجليد في منتصف القرن التاسع عشر، ونُظّمت أولُ بطولة لها عام 1891م، وهي رياضة مشهورة في البلاد الباردة، مثل كندا والدول الاسكندنافية.

إرشادات لحل

رسم شكل توضيحي

ارسم شكلًا لمساعدتك على فهم المسألة اللفظية وتوضيحها بصورة صحيحة.

تحقق من فهمك

2) **التزلج على الجليد:** انطلقت مجموعتان من المتزلجين من المكان نفسه، فقطعت المجموعة A مسافة 4 mi في اتجاه الشرق، ثم انحرفت 70° في اتجاه الشمال الشرقي قاطعةً مسافة 3 mi، وقطعت المجموعة B مسافة 4 mi في اتجاه الغرب، ثم انحرفت 75° في اتجاه الشمال الغربي قاطعةً 3 mi، أي مجموعة كانت الأبعد عن مكان الانطلاق عند هذه اللحظة؟ وضح إجابتك.

إرشادات للدراسة

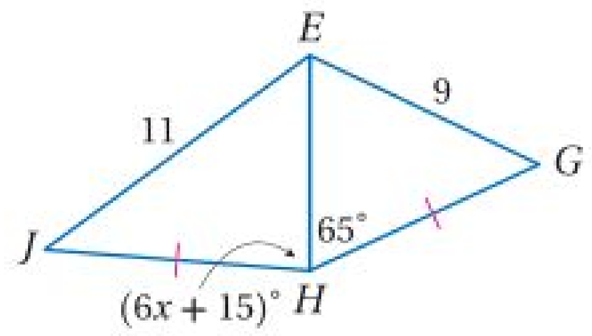
استعمال حقائق إضافية

عند إيجاد مدى القيم الممكنة للمتغير x، قد تحتاج إلى استعمال إحدى الحقائق الآتية:

- قياس أي زاوية في المثلث يكون أكبر من 0 وأقل من 180 دائمًا.
- طول أي قطعة مستقيمة يكون أكبر من 0 دائمًا.

لإثبات أن الزاوية المحصورة في مثلثٍ أكبر من الزاوية المحصورة في مثلث آخر، استعمل عكس متباينة SAS في الحل.

مثال 3 استعمال الجبر في العلاقات بين مثلثين



جبر: أوجد متباينة تمثل مدى القيم الممكنة لِـ x.

الخطوة 1: من الشكل نعلم أن:

$\overline{JH} \cong \overline{GH}, \overline{EH} \cong \overline{EH}, JE > EG$.

إذن، $m\angle JHE > m\angle EHG$ عكس متباينة SAS

$6x + 15 > 65$ عوّض

$x > 8\frac{1}{3}$ حُل بالنسبة لِـ x

الخطوة 2: استعمل حقيقة أن قياس أيّ زاوية في المثلث أقل من 180 لكتابة متباينة أخرى.

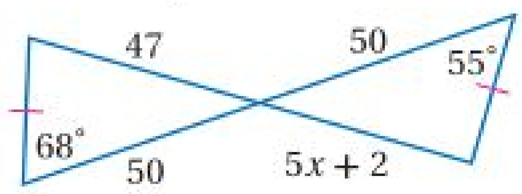
$m\angle JHE < 180°$

$6x + 15 < 180$ عوّض

$x < 27.5$ حُل بالنسبة لِـ x

الخطوة 3: اكتب المتباينتين $x < 27.5$, $x > 8\frac{1}{3}$ في صورةِ متباينةٍ مركّبةٍ بالشكل $8\frac{1}{3} < x < 27.5$

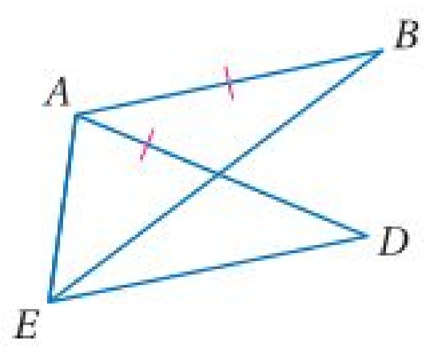
تحقق من فهمك



3) أوجد متباينة تمثل مدى القيم الممكنة لِـ x.

إثبات العلاقات في مثلثين: يمكنك استعمال متباينة SAS وعكسها لإثبات صحّة العلاقات في مثلثين.

مثال 4 إثبات علاقات المثلث باستعمال متباينة SAS



اكتب برهانًا ذا عمودين.

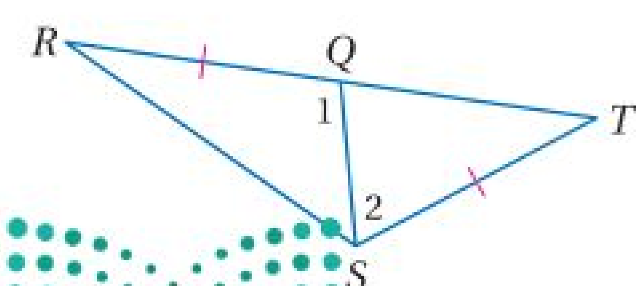
المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{AD}$

المطلوب: $EB > ED$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{AB} \cong \overline{AD}$	1) معطى
2) $\overline{AE} \cong \overline{AE}$	2) خاصية الانعكاس
3) $m\angle EAB = m\angle EAD + m\angle DAB$	3) مسلّمة جمع قياسات الزوايا
4) $m\angle EAB > m\angle EAD$	4) تعريف المتباينة
5) $EB > ED$	5) متباينة SAS

تحقق من فهمك

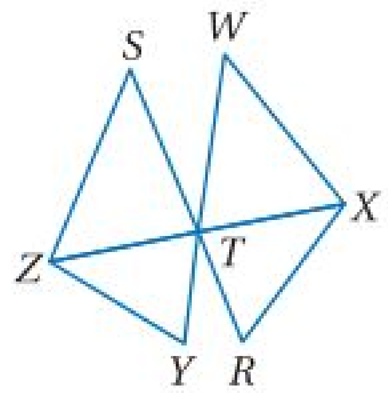


4) اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{RQ} \cong \overline{ST}$

المطلوب: $RS > TQ$

مثال 5 إثبات علاقات باستعمال عكس متباينة SAS



اكتب برهانًا تسلسليًّا.

المعطيات: T نقطة منتصف $\overline{ZX}$.

$\overline{ST} \cong \overline{WT}$

$SZ > WX$

المطلوب: $m\angle XTR > m\angle ZTY$

البرهان التسلسلي:

T نقطة منتصف $\overline{ZX}$ — معطى ← $\overline{ZT} \cong \overline{TX}$ — نظرية نقطة المنتصف

$\overline{ST} \cong \overline{WT}$ — معطى

$SZ > WX$ — معطى

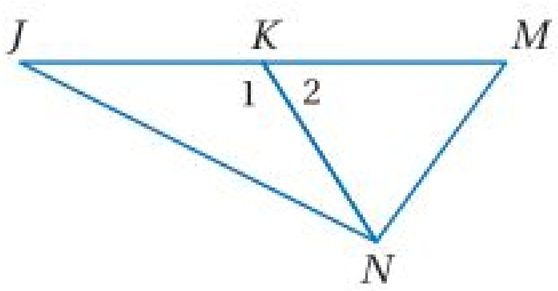
← $m\angle STZ > m\angle WTX$ — عكس نظرية الرافعة

$\angle STZ \cong \angle XTR$
$\angle WTX \cong \angle ZTY$ — الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة

← $m\angle STZ = m\angle XTR$
$m\angle WTX = m\angle ZTY$ — تعريف تطابق الزوايا

← $m\angle XTR > m\angle ZTY$ — بالتعويض

تحقق من فهمك



5) اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{NK}$ قطعة متوسطة في $\triangle JMN$.

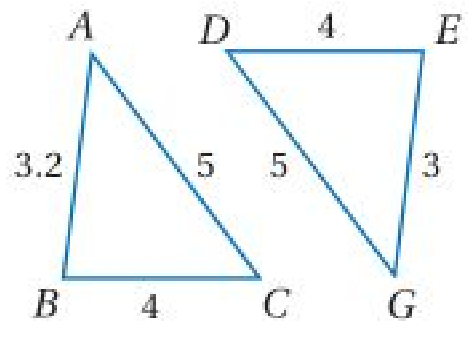
$JN > NM$

المطلوب: $m\angle 1 > m\angle 2$

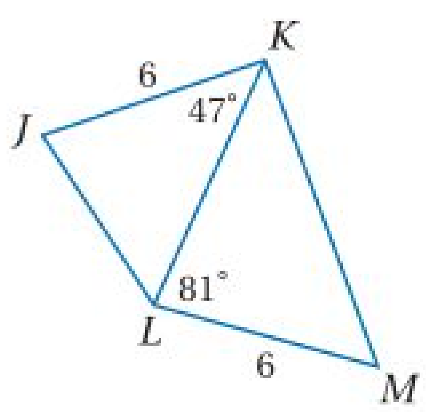
تأكـد

المثال 1 قارن بين القياسين المحددين في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

1) $m\angle ACB$, $m\angle GDE$



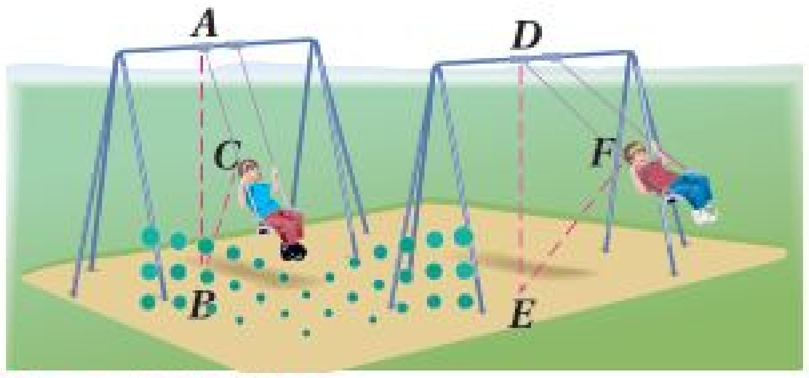
2) JL , KM



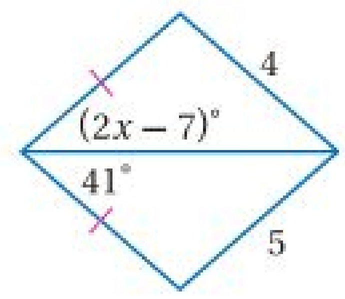
المثال 2 **3)** **أراجيح:** يتغيّر موضع الأرجوحة تبعًا لقوّة دفعها.

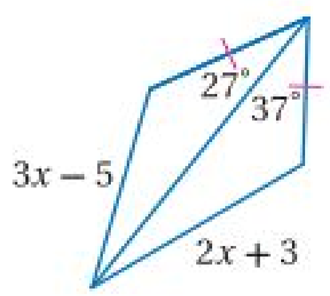
a) أي الأزواج متطابق من هذه القطع المستقيمة؟

b) أيّهما أكبر: قياس $\angle A$ أم قياس $\angle D$ ؟ وضح إجابتك.



المثال 3 اكتب متباينة تمثل مدى القيم الممكنة لِـ x في كلٍّ مما يأتي:

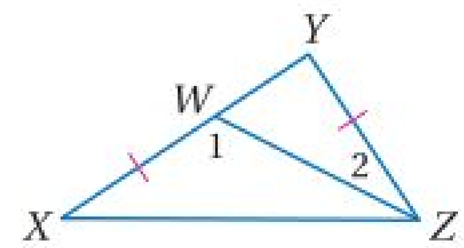
(4


(5


المثالان 4, 5 **برهان** اكتب برهانًا ذا عمودين في كلٍّ من السؤالين 6, 7:

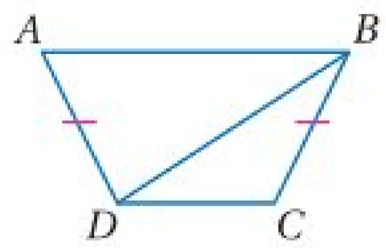
6) **المعطيات:** $\triangle YZX$
$\overline{YZ} \cong \overline{XW}$

المطلوب: $ZX > YW$



7) **المعطيات:** $\overline{AD} \cong \overline{CB}$
$DC < AB$

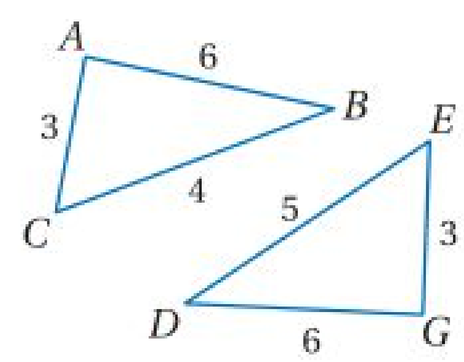
المطلوب: $m\angle CBD < m\angle ADB$



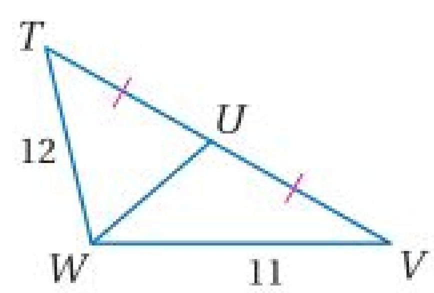
تدرب وحل المسائل

المثال 1 قارن بين القياسين المحددين في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

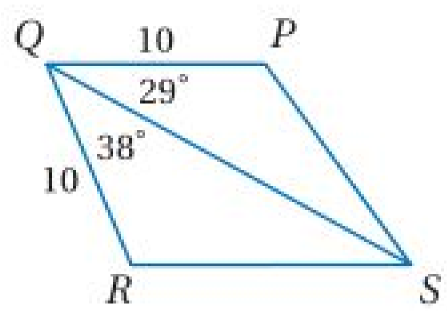
8) $\angle BAC, \angle DGE$



9) $\angle TUW, \angle VUW$



10) PS, SR

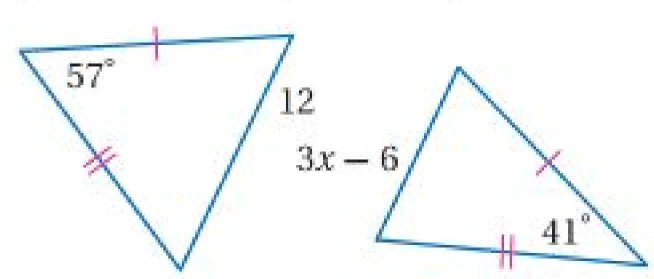


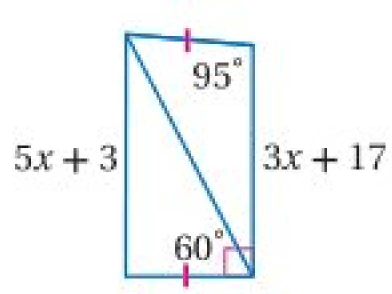
المثال 2 11) **رحلة برية :** أقام باسم وعثمان مخيّمًا في الصحراء، وقرّرا أن يقوما برحلة برية، فانطلق باسم من المخيّم وسار 5 km في اتجاه الشرق، ثم انعطف 15° جهة الجنوب الشرقي وسار 2 km أخرى، وانطلق عثمان من المخيم وسار 5 km في اتجاه الغرب، ثم انعطف 35° جهة الشمال الغربي وسار 2 km أخرى.

a) أيُّهما أقرب إلى المخيّم؟ وضّح إجابتك، وارسم شكلًا توضيحيًّا.

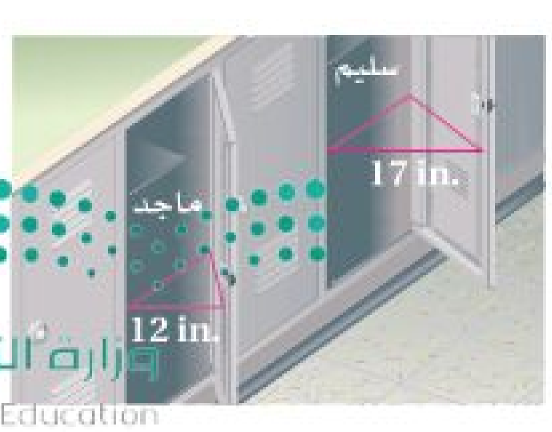
b) افترض أنّ عثمان انعطف 10° في اتجاه الجنوب الغربي بدلًا من 35° في اتجاه الشمال الغربي، فأيهما يكون أبعد عن المخيم؟ وضح إجابتك، وارسم شكلًا توضيحيًّا.

المثال 3 اكتب متباينةً تمثل مدى القيم الممكنة لِـ x في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

(12


(13


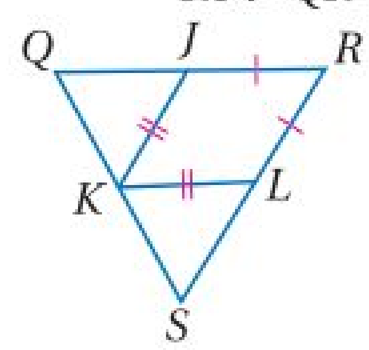
14) **خزائن:** خزانتا سليم وماجد مفتوحتان، كما في الشكل المجاور. أيُّ بابَيْ الخزانتين يشكّل زاويةً قياسها أكبر؟ وضّح إجابتك.



المثالان 5 ,4 **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

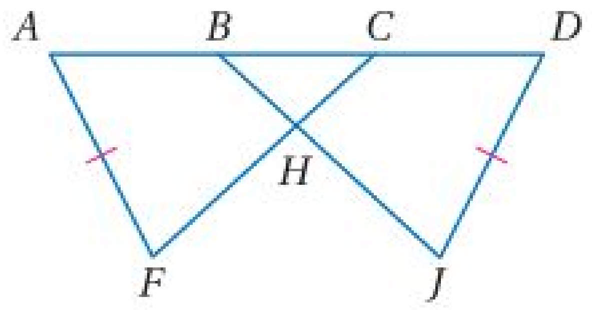
15) **المعطيات:** $\overline{LK} \cong \overline{JK}, \overline{RL} \cong \overline{RJ}$
K نقطة منتصف $\overline{QS}$.
$m\angle SKL > m\angle QKJ$

المطلوب: $RS > QR$



16) **المعطيات:** $\overline{AF} \cong \overline{DJ}, \overline{FC} \cong \overline{JB}$
$AB > DC$

المطلوب: $m\angle AFC > m\angle DJB$



17) **تمرين:** يقوم عبد الله بتمرين العضلة ذات الرأسين.

a) أيُّهما أكبر: المسافة من قبضة اليد إلى الكتف في الوضع 1، أم المسافة نفسها في الوضع 2؟ وضّح إجابتك بالقياس.

b) أيُّهما أكبر: قياس الزاوية المتكونة عند المرفق في الوضع 1، أم المتكونة في الوضع 2؟ وضّح إجابتك مستعملًا القياسات التي أوجدتها في الفرع **a** وعكس متباينة SAS.

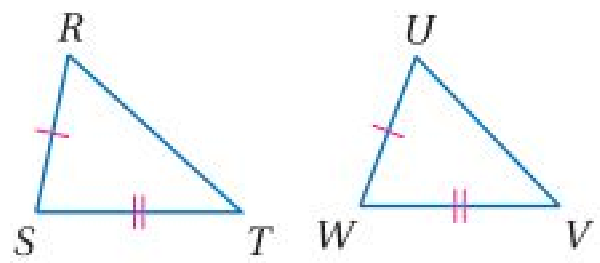
الربط مع الحياة

تمارين اللياقة تزيد القوة والقدرة على التحمل، وينصح معظم خبراء اللياقة الأشخاص المبتدئين بالتدريب ثلاث جلسات في الأسبوع، بحيث تتراوح مدة الجلسة الواحدة من 20 دقيقة إلى ساعة كاملة (متضمنة فترة الإحماء والاسترخاء) على أن يفصل ما بين الجلسة والأخرى يوم واحد على الأقل.

18) **برهان:** استعمل البرهان غير المباشر؛ لإثبات النظرية 4.13 (عكس متباينة SAS).

المعطيات: $\overline{RS} \cong \overline{UW}$
$\overline{ST} \cong \overline{WV}$
$RT > UV$

المطلوب: $m\angle S > m\angle W$



19) **تمثيلات متعدِّدة:** في هذه المسألة ستكتشف مجموع زوايا مضلع.

a) **هندسيًّا:** ارسم ثلاثة مضلعات: ثلاثي، رباعي، خماسي. وسمِّ المضلع الثلاثي ABC، والرباعي $FGHJ$، والخماسي $PQRST$.

b) **جدوليًّا:** انسخ الجدول أدناه في دفترك وأكمله مستعملًا المنقلة لقياس كل زاويةٍ.

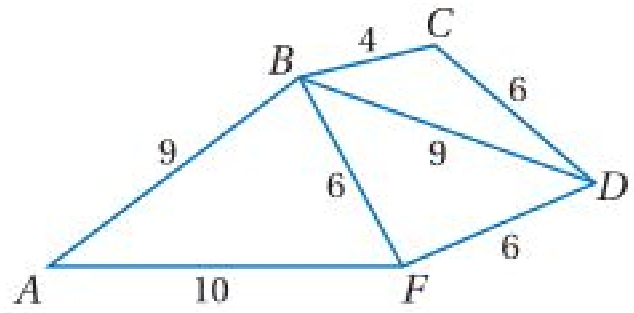
مجموع قياسات الزوايا	قياسات الزوايا				عدد الأضلاع
		$m\angle C$		$m\angle A$	3
				$m\angle B$	
		$m\angle H$		$m\angle F$	4
		$m\angle J$		$m\angle G$	
		$m\angle S$		$m\angle P$	5
		$m\angle T$		$m\angle Q$	
				$m\angle R$	

c) **لفظيًّا:** خمّن العلاقة بين عدد أضلاع المضلع ومجموع قياسات زواياه.

d) **منطقيًّا:** ما نوع التبرير الذي استعملته في الفرع **c**؟ وضِّح إجابتك.

e) **جبريًّا:** اكتب عبارةً جبريةً؛ لإيجاد مجموع قياسات زوايا مضلعٍ عدد أضلاعه n.

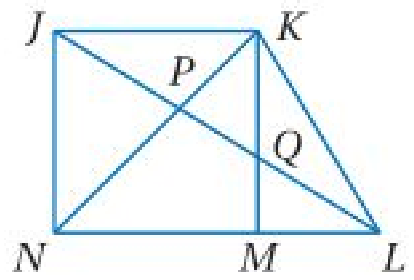
استعمل الشكل المجاور لكتابة متباينةٍ تربط بين قياس كل زوج من الزوايا في السؤالين الآتيين:



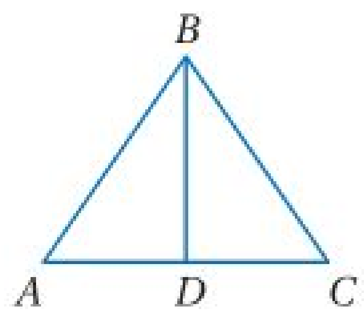
20) $m\angle BDC, m\angle FDB$

21) $m\angle ABF, m\angle FDB$

مسائل مهارات التفكير العليا



22) **تحدٍّ:** في الشكل المجاور، إذا كان: $\overline{KJ} \cong \overline{JN}$، $m\angle LJN > m\angle KJL$، فأيّ الزاويتين هي الأكبر: $\angle LKN$ أم $\angle LNK$؟ وضّح إجابتك.

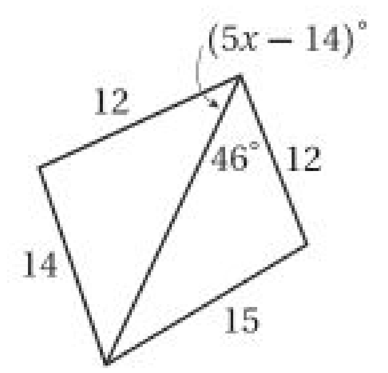


23) **تبرير:** إذا كانت $\overline{BD}$ قطعة متوسطة في $\triangle ABC$ كما في الشكل المجاور، وكان $AB < BC$، فهل تكون $\angle BDC$ حادة دائمًا، أو أحيانًا، أو لا تكون حادةً أبدًا؟ وضّح إجابتك.

24) **اكتب:** بيِّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين متباينة SAS والمسلّمة SAS لتطابق المثلثات.

تدريب على اختبار

25) أيٌّ متباينة مما يأتي تصف مدى القيم الممكنة لـِ x؟



A $x > 6$

B $0 < x < 14$

C $2.8 < x < 12$

D $12 < x < 15$

26) إذا كان طول ضلع مربّعٍ $x + 3$، فإن طول قطره يساوي:

A $x^2 + 1$

B $x\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$

C $2x + 6$

D $x^2\sqrt{2} + 6$

مراجعة تراكمية

اكتب متباينةً تمثل مدى طول الضلع الثالث في مثلث عُلم طولا ضلعين من أضلاعه في كلٍّ من الأسئلة الآتية: (الدرس 5-4)

27) $3.2\ \text{cm}, 4.4\ \text{cm}$

28) $5\ \text{ft}, 10\ \text{ft}$

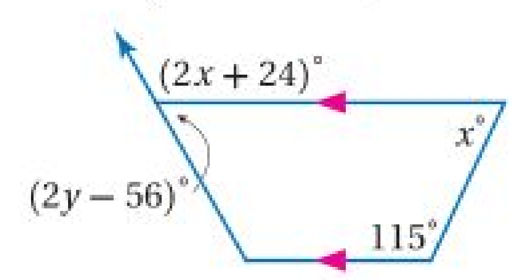
29) $3\ \text{m}, 9\ \text{m}$

30) **رحلات:** سأل عليّ صديقه ماجدًا عن تكلفة الرحلة التي قام بها مع صديقه، فلم يتذكر ماجد تكلفة الشخص الواحد، ولكنّه تذكر أن التكلفة الكلّية كانت أكثر من 500 ريالٍ. استعمل البرهان غير المباشر لتبيِّن أن تكلفة الشخص الواحد كانت أكثر من 250 ريالًا. (الدرس 4-4)

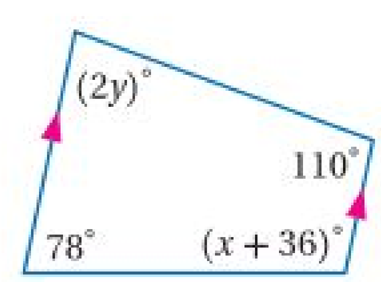
استعد للدرس اللاحق

أوجد قيمة كلٍّ من y , x في الأسئلة الآتية، موضِّحًا إجابتك:

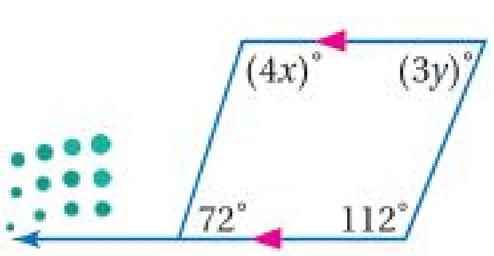
31)



32)



33)



الفصل

4 دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسيّة

قطع مستقيمة خاصّة في المثلثات: (الدرسان 2-4 ,1-4)

- القطع المستقيمة الخاصّة بالمثلثات هي الأعمدة المنصِّفة ومنصفات الزوايا والقطع المتوسطة والارتفاعات.
- نقاط تقاطع المستقيمات الخاصّة في مثلث تُسمَّى نقاط التلاقي.
- نقاط التلاقي في مثلث، هي مركز الدائرة الخارجية ومركز الدائرة الداخلية ومركز المثلث ومُلتقَى الارتفاعات.

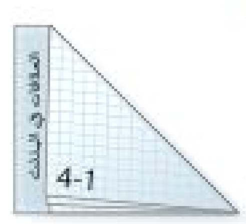
البرهان غير المباشر: (الدرس 4-4)

- كتابة برهانٍ غير مباشر:
  1) افترض أن النتيجة غير صحيحة.
  2) بيِّن أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض.
  3) بما أن النتيجة الخطأ تؤدي إلى عبارة غير صحيحة، فإن النتيجة الأصليّة ستكون صحيحة.

متباينات المثلث: (الدروس 6-4 ,5-4 ,3-4)

- **متباينة الزاوية الخارجية:** قياس الزاوية الخارجية لمثلث، يكون أكبر من أيٍّ من الزاويتين الداخليَّتين البعيدتين عنها.
- الزاوية الكبرى في مثلث تقابل الضلع الأطول، والزاوية الصغرى تقابل الضلع الأقصر.
- مجموع طولَي أي ضلعين في مثلث يكون أكبر من طول الضلع الثالث.
- **المتباينة SAS:** (نظرية الرافعة) إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين مناظرين في مثلث آخر، وكان قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني، فإنَّ الضلع الثالث في المثلث الأول يكون أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني.
- **المتباينة SSS:** (عكس نظرية الرافعة) إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين مناظرين في مثلث آخر، وكان الضلع الثالث في المثلث الأول أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني، فإنَّ قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول يكون أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني.

المطويات منظم أفكار



تأكد من أنّ المفاهيم الأساسية قد دُوِّنت في مطويتك.

المفردات الأساسية

العمود المنصف (ص 221)

المستقيمات المتلاقية (ص 222)

نقطة التلاقي (ص 222)

مركز الدائرة الخارجية للمثلث (ص 222)

مركز الدائرة الداخلية للمثلث (ص 225)

القطعة المتوسطة (ص 231)

مركز المثلث (ص 231)

ارتفاع المثلث (ص 233)

ملتقى ارتفاعات المثلث (ص 233)

التبرير غير المباشر (ص 247)

البرهان غير المباشر (ص 247)

البرهان بالتناقض (ص 247)

اختبار المفردات

بيّن ما إذا كانت كل جملةٍ مما يأتي صحيحةً أو خاطئةً، وإذا كانت خاطئةً فاستبدل بالكلمة التي تحتها خط كلمة من القائمة أعلاه؛ لتجعل الجملة صحيحةً:

1) مركز المثلث هو النقطة التي تتقاطع عندها الارتفاعات .

2) نقطة تلاقي القطع المتوسطة لمثلث تُسمَّى مركز الدائرة الداخلية.

3) نقطة التلاقي هي النقطة التي تتقاطع عندها ثلاثة خطوط أو أكثر.

4) مركز الدائرة الخارجية لمثلث يكون على أبعادٍ متساويةٍ من رؤوس المثلث.

5) لإيجاد مركز المثلث، ارسم منصّفات الزوايا أولًا.

6) لتبدأ برهانًا بالتناقض، أولًا افترض أنّ ما تحاول أن تُثبته صحيح.

7) يستعمل البرهان بالتناقض التبرير غير المباشر.

8) القطعة المتوسطة لمثلثٍ تصل نقطة منتصف ضلع المثلث بمنتصف ضلعٍ آخر للمثلث.

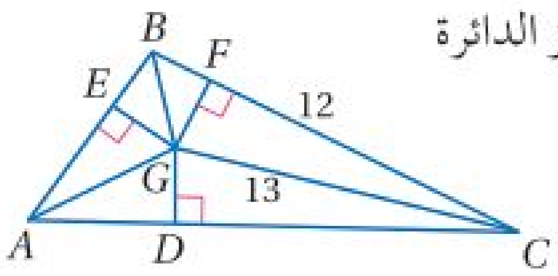
9) مركز الدائرة الداخلية لمثلث هو نقطة تتقاطع عندها منصِّفات زوايا المثلث.

دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

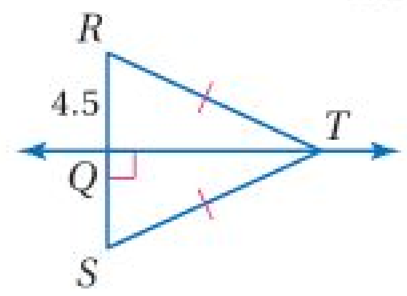
4-1 المنصفات في المثلث (ص 221-229)

10) أوجد EG إذا كانت G مركز الدائرة الداخلية في $\triangle ABC$.

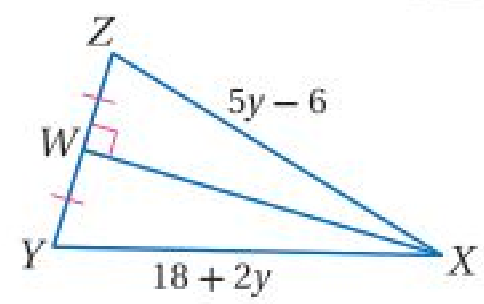


أوجد كل قياسٍ ممّا يأتي :

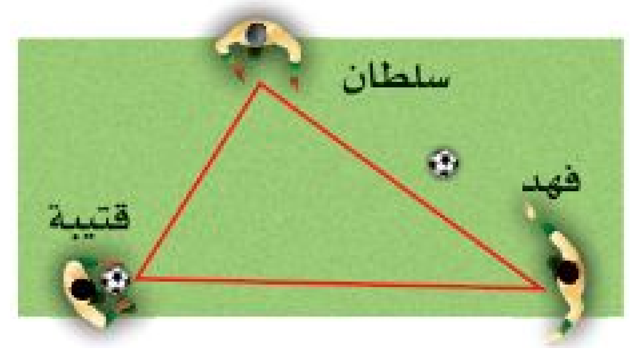
11) RS



12) XZ

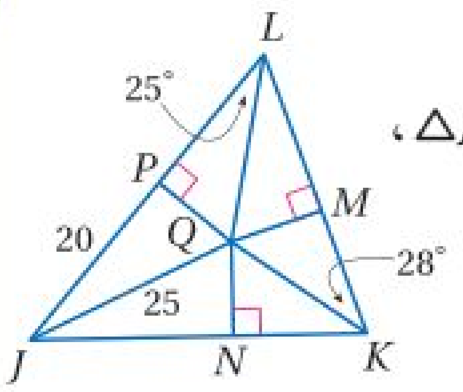


13) **كرة قدم:** يقوم قتيبة وفهد وسلطان بعمليةِ إحماءٍ قبل بدء مباراة كرة قدم، حيث يتطلب أحد تدريبات الإحماء أن يشكّل اللاعبون الثلاثة مثلثًا، ويقف اللاعب الرابع في الوسط. أين يجب أن يقف اللاعب الرابع، بحيثُ يكون على مسافاتٍ متساويةٍ من اللاعبين الثلاثة؟



مثال 1

إذا كانت Q مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle JKL$ ، فأوجد كلًّا من القياسين الآتيين:



a) $m\angle QJK$

$m\angle KLP + m\angle MKN + m\angle NJP = 180°$ نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$2(25°) + 2(28°) + m\angle NJP = 180°$ عوّض

$106° + m\angle NJP = 180°$ بسّط

$m\angle NJP = 74°$ اطرح 106 من الطرفين

وبما أنّ $\overrightarrow{JQ}$ ينصّف $\angle NJP$، إذن $2m\angle QJK = m\angle NJP$؛ أيْ أنّ $m\angle QJK = \frac{1}{2}m\angle NJP$؛ إذن: $m\angle QJK = \frac{1}{2}\times 74° = 37°$.

b) QP

$a^2 + b^2 = c^2$ نظرية فيثاغورس

$(QP)^2 + 20^2 = 25^2$ عوّض

$(QP)^2 + 400 = 625$ $20^2 = 400 , 25^2 = 625$

$(QP)^2 = 225$ اطرح 400 من الطرفين

$QP = 15$ بسّط

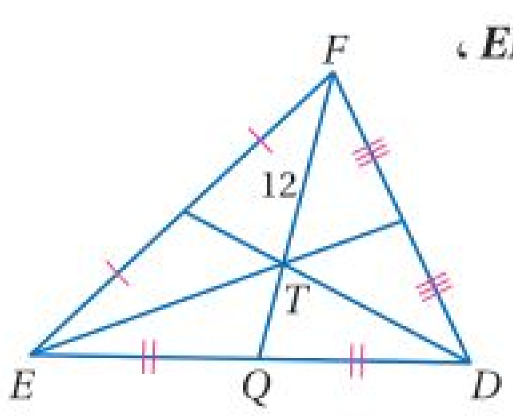
4-2 القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث (ص 231-238)

14) رؤوس $\triangle DEF$ هي $D(0, 0), E(0, 7), F(6, 3)$. أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle DEF$.

15) **احتفالات:** تُريد حفصة أن تعلّق 4 مثلثات متطابقة في سقف غرفة الصف، بحيث تكون موازيةً لأرضية الغرفة. فرسمت نموذجًا لأحد المثلثات على مستوى إحداثي، فكانت إحداثيات رؤوسه هي $(0, 4), (3, 8), (6, 0)$. إذا كان كل مثلث سيُعلّق في السقف بخيطٍ، فما إحداثيات النقطة التي سيُربط الخيط عندها بالمثلث؟

مثال 2

إذا كانت النقطة T مركز المثلث EDF ، $FT = 12$ ، فأوجد TQ



$FT = \frac{2}{3}FQ$

$FT = \frac{2}{3}(FT + TQ)$

$12 = \frac{2}{3}(12 + TQ)$ $FT = 12$

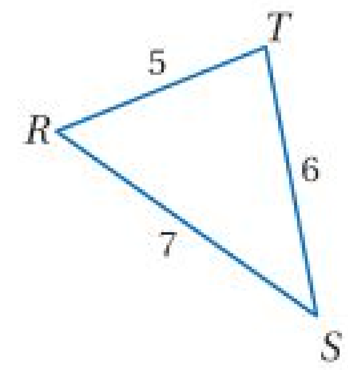
$12 = 8 + \frac{2}{3}TQ$ خاصية التوزيع

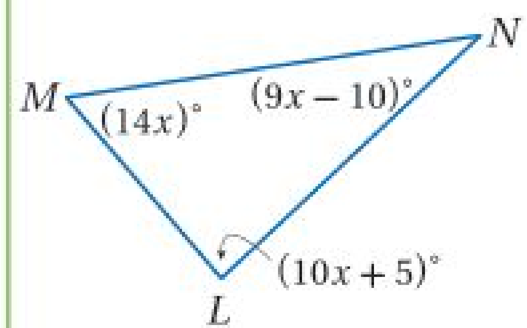
$4 = \frac{2}{3}TQ$ اطرح 8 من الطرفين

$6 = TQ$ اضرب الطرفين في $\frac{3}{2}$

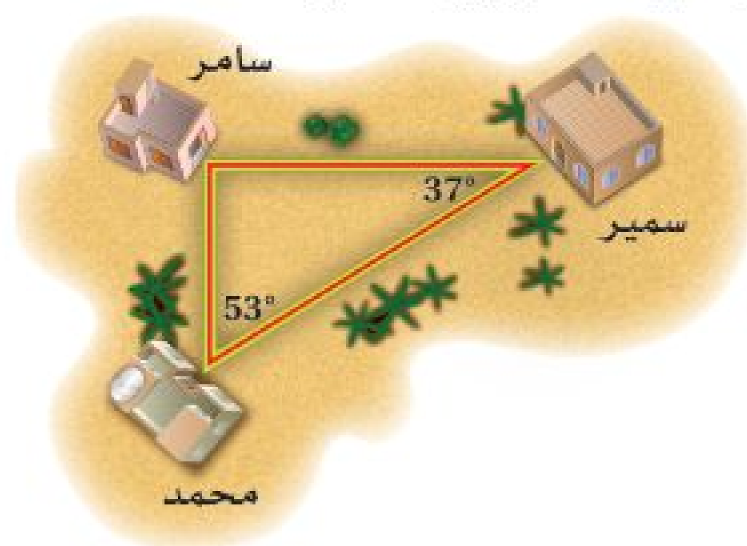
4-3 المتباينات في المثلث (ص 239-245)

اكتب زوايا كل مثلثٍ مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر في السؤالين الآتيين:

16)


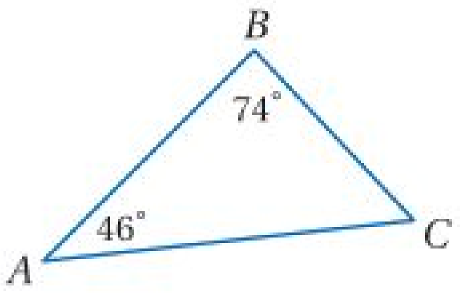
17)


18) **جيران:** يسكن سمير ومحمد وسامر عند تقاطعات ثلاثة شوارع تشكّل المثلث المبين أدناه، إذا أرادوا الالتقاء عند أحدهم، فأي الطريقين أقصر: اصطحاب سمير لمحمد وذهابهما معًا إلى بيت سامر. أم اصطحاب محمد لسامر وذهابهما معًا إلى بيت سمير؟



مثال 3

اكتب زوايا $\triangle ABC$ ، مرتبةً من الأصغر إلى الأكبر.



a) أولًا: أوجد قياس الزاوية المجهولة باستعمال نظرية مجموع قياسات الزوايا. $m\angle C = 180^\circ - (46^\circ + 74^\circ) = 60^\circ$

لذا فالزوايا مرتبةً من الأصغر إلى الأكبر هي: $\angle A, \angle C, \angle B$.

b) والأضلاع مرتبةً من الأقصر إلى الأطول هي: $\overline{BC}, \overline{AB}, \overline{AC}$.

4-4 البرهان غير المباشر (ص 247-253)

اكتب الافتراض الضروري الذي تبدأ به برهانًا غير مباشرٍ لكل عبارةٍ مما يأتي:

19) $m\angle A \geq m\angle B$.

20) $\triangle FGH \cong \triangle MNO$.

21) $\triangle KLM$ قائم الزاوية.

22) إذا كان $3y < 12$ ، فإنّ $y < 4$.

23) اكتب برهانًا غير مباشر لتبين أنّه إذا كانت الزاويتان متتامّتين، فإنّه لا يمكن أن تكون أيٌّ منهما قائمةً.

24) **مطالعة:** اشترى محمود كتابين بأكثر من 180 ريالًا، استعمل البرهان غير المباشر لتبيّن أنّ ثمن أحدِهما على الأقل أكثر من 90 ريالًا.

مثال 4

اكتب الافتراض الضروري للبدء في برهان غير مباشرٍ لكل عبارةٍ مما يأتي:

a) $\overline{XY} \not\cong \overline{JK}$

الافتراض هو: $\overline{XY} \cong \overline{JK}$

b) إذا كان $3x < 18$ ، فإن $x < 6$

نتيجة هذه العبارة الشرطية هي: $x < 6$ ، ونفيها هو $x \geq 6$ ؛ لذا فالافتراض هو $x \geq 6$

c) $\angle 2$ زاوية حادّة.

الافتراض هو: $\angle 2$ ليست زاويةً حادّةً.

4-5 متباينة المثلث (ص 255-260)

حدِّد ما إذا كانت القياسات المعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلثٍ في كلٍّ مما يأتي أم لا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فوضّح السبب.

25) $5, 6, 9$ 26) $3, 4, 8$

اكتب متباينةً تمثل مدى طول الضلع الثالث في مثلثٍ عُلم طولا ضلعين من أضلاعه في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

27) $5\,\text{ft}, 7\,\text{ft}$ 28) $10.5\,\text{cm}, 4\,\text{cm}$

29) **درَّاجاتٌ:** يركب خالد دراجته لزيارة صديقه وليد، وبما أن الطريق المباشر مُغلق، فقد سلك طريقًا فرعيًّا طوله $2\,\text{km}$، ثم انعطف وسلك طريقًا آخر طوله $3\,\text{km}$ حتى وصل منزل وليد. إذا كانت الطرق الثلاثة تشكّل مثلثًا رأسان من رؤوسه هما منزلَا وليد وخالد، فاكتب متباينةً تمثل مدى المسافة الممكنة بين منزلَيهِمَا.

مثال 5

حدِّد ما إذا كانت القياسات (9 , 10 , 7) يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث أم لا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فوضّح السبب.

اختبر كل متباينة.

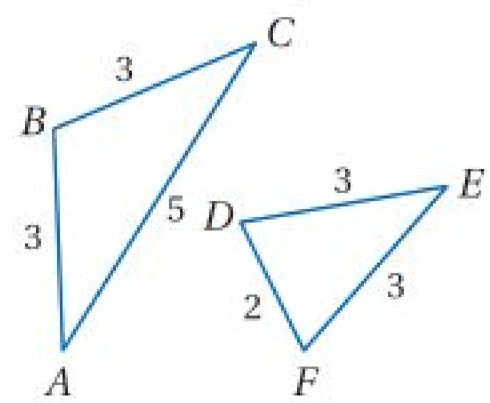
$7 + 10 > 9$ $\qquad$ $7 + 9 > 10$ $\qquad$ $10 + 9 > 7$

$17 > 9$ ✔ $\qquad$ $16 > 10$ ✔ $\qquad$ $19 > 7$ ✔

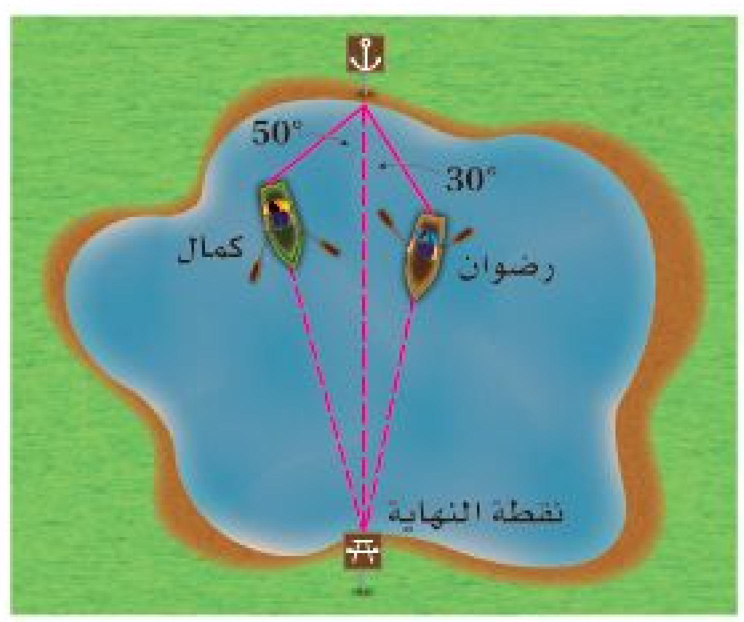
بما أن مجموع طولَي أيِّ ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث، إذن القطع المستقيمة التي أطوالها 9 , 10 , 7 تشكّل مثلثًا.

4-6 المتباينات في مثلثين (ص 261-268)

30) مستعملًا المثلثين المجاورين، قارن بين القياسين $m\angle ABC$, $m\angle DEF$



31) **تجديف:** يُجدِّف كلٌّ من رضوان وكمال في بركةٍ متَّجِهين إلى نقطةٍ محددةٍ، ولأنه ليس لهما خبرةٌ في التجديف فقد انحرفا عن المسار مدة 4 دقائق، قطع كلٌّ منهما فيها مسافة $50\,\text{m}$، ثم استعادا مسارهما الصحيح، كما في الشكل. أيهما أقرب إلى نقطة النهاية عند هذه اللحظة؟



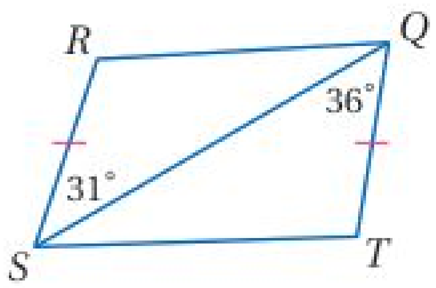
مثال 6

قارن بين كل قياسين فيما يأتي :

a) RQ, ST

بما أن: $\overline{RS} \cong \overline{TQ}, \overline{QS} \cong \overline{QS}, m\angle SQT > m\angle RSQ$

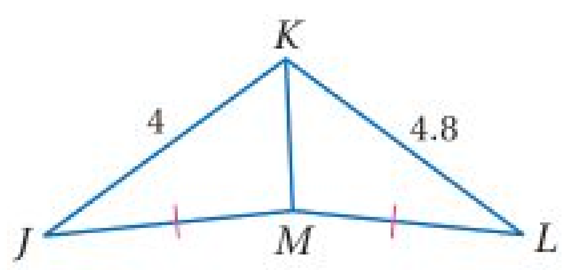
في المثلثين STQ, QRS إذن، $RQ < ST$ بحسب نظرية المفصَّلة.



b) $m\angle KML, m\angle KMJ$

بما أن: $\overline{JM} \cong \overline{LM}, \overline{KM} \cong \overline{KM}, LK > JK$ ،

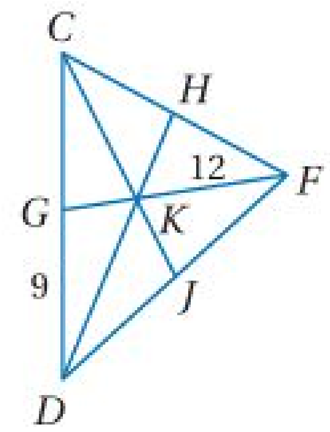
إذن $\angle KMJ < \angle KML$. بحسب عكس نظرية المفصّلة.



اختبار الفصل

1) **حدائق:** يزرع ماجد وردًا في حوض دائري داخل منطقة مثلثة الشكل محدودة بثلاثة طرق للمشاة، أيُّ نقطة من نقاط التلاقي في المثلث سيستعملها مركزًا لأكبر دائرةٍ يمكن رسمها داخل المثلث؟

النقطة K مركز $\triangle CDF$ ، $DK = 16$. أوجد كلَّ طولٍ مما يأتي:



2) KH

3) CD

4) FG

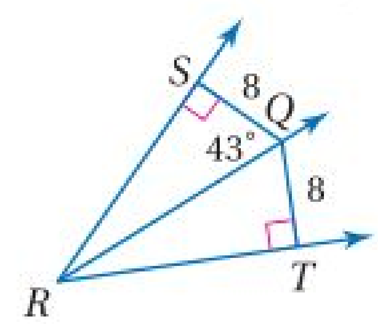
5) **برهان:** اكتب برهانًا غير مباشر.

المعطيات: $5x + 7 \geq 52$

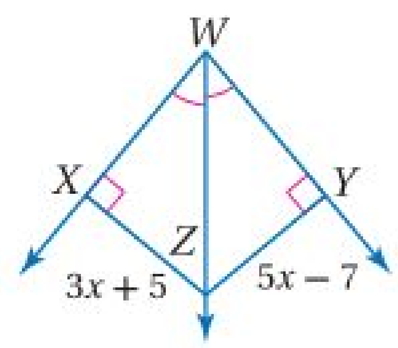
المطلوب: $x \geq 9$

أوجد كلَّ قياسٍ مما يأتي:

6) $m\angle TQR$



7) XZ



8) **اختيار من متعدِّد:** إذا كان طولا ضلعين في مثلث هما 3.1 cm و 4.6 cm ، فما أصغر عددٍ صحيحٍ يمكن أن يكون طولًا للضلع الثالث؟

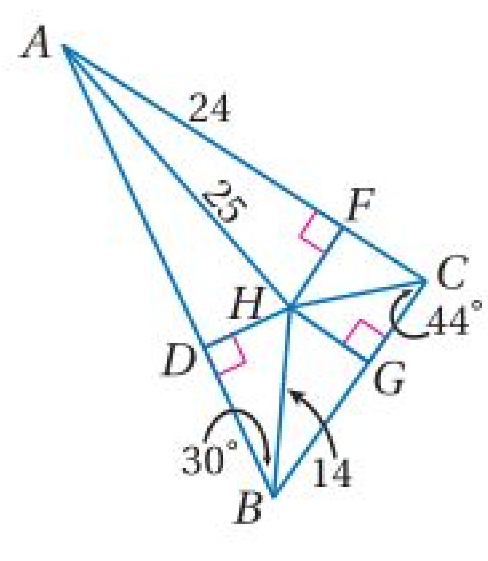
A 1.6 cm

B 2 cm

C 7.5 cm

D 8 cm

إذا كانت H مركز الدائرة الداخلية في $\triangle ABC$ ، فأوجد كلَّ قياسٍ مما يأتي:



9) DH

10) BD

11) $m\angle HAC$

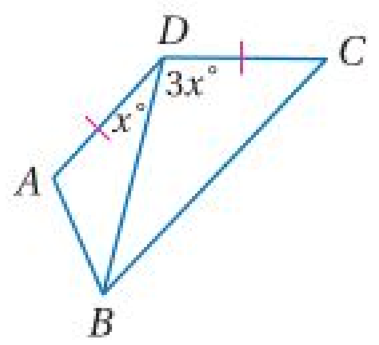
12) $m\angle DHG$

13) **اختيار من متعدِّد:** إذا كان طولا ضلعين في مثلثٍ هما 11 , 5 ، فأيُّ متباينةٍ مما يأتي تمثل مدى طول الضلع الثالث؟

A $6 < x < 10$ | C $6 < x < 16$

B $5 < x < 11$ | D $x < 5$ أو $x > 11$

14) قارن بين AB, BC في الشكل أدناه.



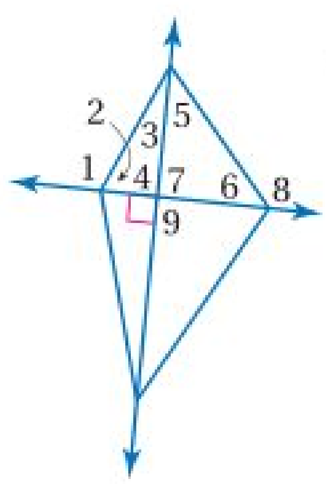
اكتب الافتراض الضروري الذي تبدأ به برهانًا غير مباشرٍ لكل عبارة مما يأتي:

15) إذا كان 8 عاملًا للعدد n ، فإنّ 4 عامل للعدد n .

16) $m\angle M > m\angle N$

17) إذا كان $3a + 7 \leq 28$ ، فإنّ $a \leq 7$.

استعمل الشكل المجاور، لتحدِّد أي زاوية لها أكبر قياسٍ في كلٍّ من المجموعات الآتية :



18) $\angle 1, \angle 5, \angle 6$

19) $\angle 9, \angle 8, \angle 3$

20) $\angle 4, \angle 3, \angle 2$

أوجد متباينةً تمثل مدى طول الضلع الثالث في المثلث الذي عُلم طولا ضلعين من أضلاعه في كلٍّ من السؤالين الآتيين :

21) 10 ft, 16 ft

22) 23 m, 39 m

استبعاد البدائل غير المعقولة

يمكنك استبعاد البدائل غير المعقولة؛ لتحدّد الإجابة الصحيحة عند حل أسئلة الاختيار من متعدِّدٍ.

طرائق استبعاد البدائل غير المعقولة

الخطوة 1

اقرأ نَصَّ السؤال بعناية؛ لتحدّد المطلوب إيجاده بالضبط.

- ما المطلوب حلّه؟
- هل الجواب عدد صحيح أم كسر اعتيادي أم كسر عشري؟
- هل تحتاج إلى استعمال رسمٍ أو جدولٍ؟
- ما وحدات القياس المطلوبة للإجابة (إن وُجدت)؟

الخطوة 2

تفحَّص كل بديل بعناية وقدِّر معقوليته.

- استبعد أي بديل يبدو أنّه غير صحيح.
- استبعد أي بديل ليس ضمن الصيغة المناسبة للإجابة الصحيحة.
- استبعد أي بديل لا يتضمن وحدات القياس الصحيحة.

الخطوة 3

حل السؤال، واختر الإجابة الصحيحة من بين البدائل المتبقية، ثم تحقق من إجابتك.

مثال

اقرأ المسألة، وحدّد المطلوب، ثم استعمل المعطيات في حلّها.

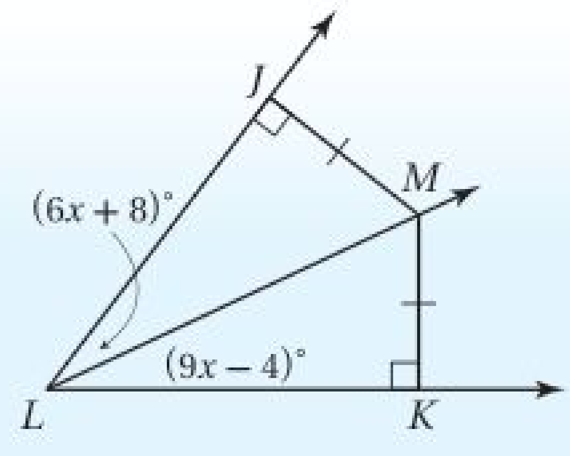
ما قياس $\angle KLM$؟

A $32°$

B $44°$

C $78°$

D $94°$



اقرأ السؤال وادرس الشكل بعناية. المثلث KLM قائم الزاوية. وبما أن مجموع قياسات الزوايا الداخلية لأي مثلث يساوي $180°$ ، فإن $m\angle KLM + m\angle LMK$ يجب أن يساوي $90°$ ، وإلا زاد المجموع على $180°$ ، وبما أن البديل D هو قياس لزاوية منفرجة، فإنّه يُستبعد لعدم معقوليته؛ وعليه فالجواب الصحيح يكون A أو B أو C .

حل المسألة. بحسب عكس نظرية منصّف الزاوية التي تنصُّ على أنّه: "إذا وقعت نقطة داخل زاويةٍ، وكانت على بعدين متساويين من ضلعَيها، فإنّ هذه النقطة تقع على منصف الزاوية" ، وبما أنّ النقطة M على بُعدين متساويين من ضلعي الزاوية LJ, LK ، فإنّها تقع على منصّف $\angle JLK$ ؛ لذا $\angle JLM$ يجب أن تطابق $\angle KLM$ ؛ والآن اكتب معادلةً لإيجاد قيمة x وحلها.

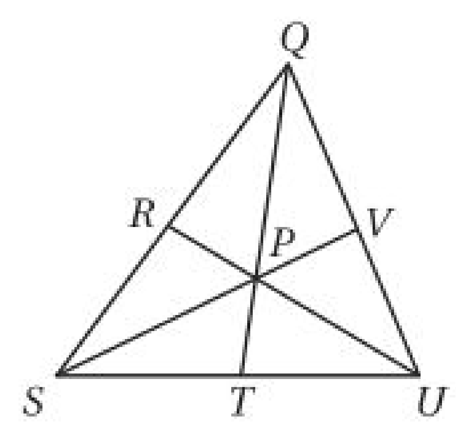
$$6x + 8 = 9x - 4$$
$$-3x = -12$$
$$x = 4$$

إذن $m\angle KLM = [9(4) - 4]° = 32°$ ، والبديل A يمثل الإجابة الصحيحة.

تمارين ومسائل

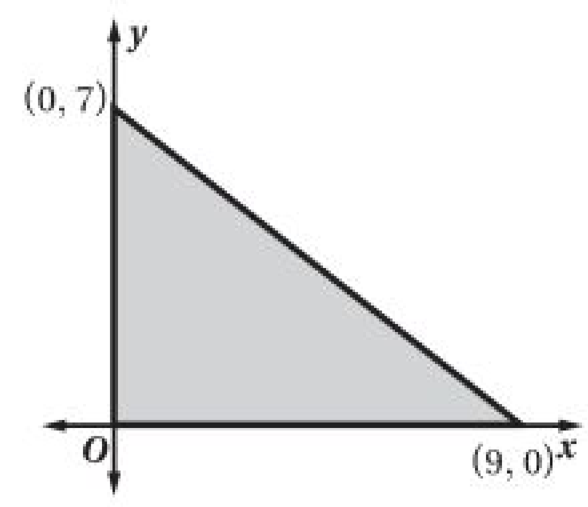
اقرأ كلّ سؤال فيما يأتي، ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة:

1) النقطة P مركز المثلث QUS ، إذا كان $QP = 14$ cm ، فما طول $\overline{QT}$ ؟



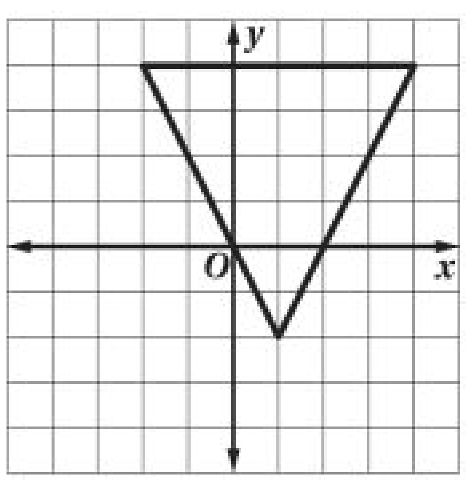
A 7 cm
B 12 cm
C 18 cm
D 21 cm

2) كم وحدةً مربعةً مساحة المثلث في الشكل أدناه؟



A 8
B 27.4
C 31.5
D 63

3) ما إحداثيات ملتقى ارتفاعات المثلث أدناه؟



A $\left(-\frac{3}{4}, -1\right)$
B $\left(-\frac{4}{3}, 1\right)$
C $\left(1, \frac{5}{2}\right)$
D $\left(1, \frac{9}{4}\right)$

4) إذا كان $\triangle ABC$ متطابق الضلعين، وكان $m\angle A = 94°$ ، فأيٌّ مما يأتي يجب أن تكون صحيحة؟

A $m\angle B = 94°$
B $m\angle B = 47°$
C $AB = BC$
D $AB = AC$

5) أيٌّ مما يأتي يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية؟

A 1.9, 3.2, 4
B 1.6, 3, 3.4
C 3, 7.2, 7.5
D 2.6, 4.5, 6

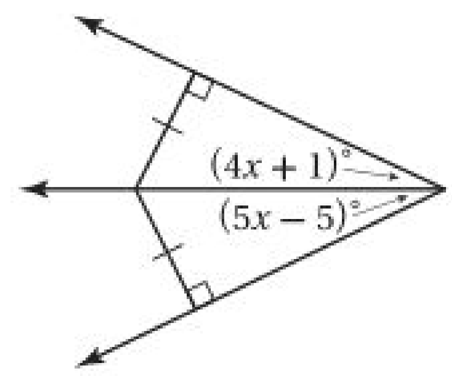
اختبار تراكمي

للفصول 4-1

أسئلة الاختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال مما يأتي، ثم حدِّد رمز الإجابة الصحيحة:

1) أوجد قيمة x.



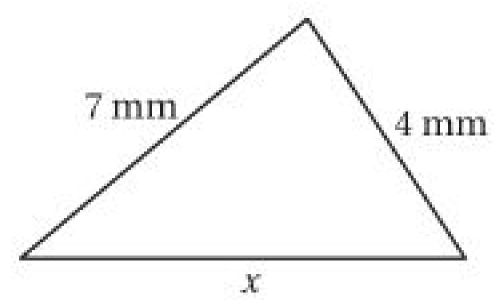
A 3

B 4

C 5

D 6

2) أيٌّ مما يأتي لا يمكن أن يكون قيمة لـ x؟



A 8 mm

B 9 mm

C 10 mm

D 11 mm

3) أيٌّ مما يأتي أفضل وصف لأقصر مسافةٍ من أحد رؤوس مثلثٍ إلى الضلع المقابل له؟

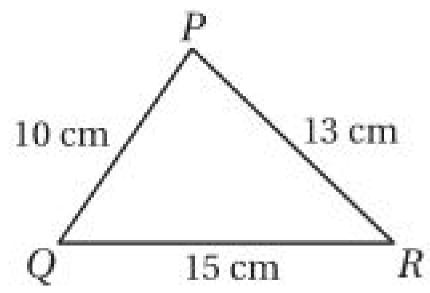
A ارتفاع

B عمود منصف

C قطعة متوسطة

D قطعة مستقيمة

4) ما العلاقة الصحيحة بين قياسات زوايا $\triangle PQR$؟



A $m\angle R < m\angle Q < m\angle P$

B $m\angle R < m\angle P < m\angle Q$

C $m\angle Q < m\angle P < m\angle R$

D $m\angle P < m\angle Q < m\angle R$

5) ما الافتراض الضروري الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر للعبارة "الزاوية S ليست زاويةً منفرجةً"؟

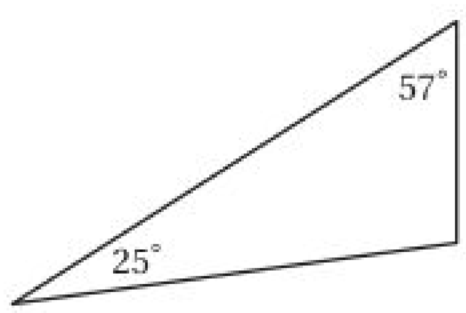
A $\angle S$ زاوية قائمة

B $\angle S$ زاوية منفرجة

C $\angle S$ زاوية حادّة

D $\angle S$ ليست زاوية حادّة

6) صنِّف المثلث أدناه تبعًا لقياسات زواياه.



A حادّ الزوايا

B متطابق الزوايا

C منفرج الزاوية

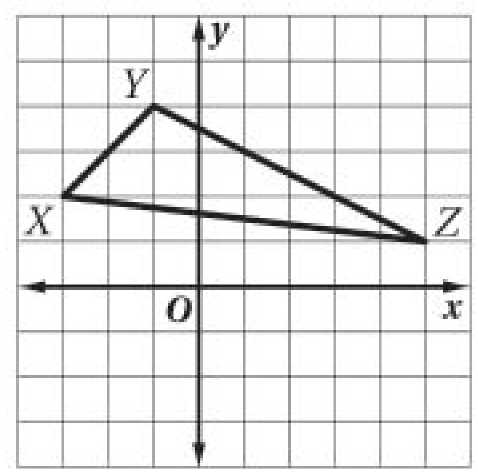
D قائم الزاوية

أسئلة ذات إجابات قصيرة

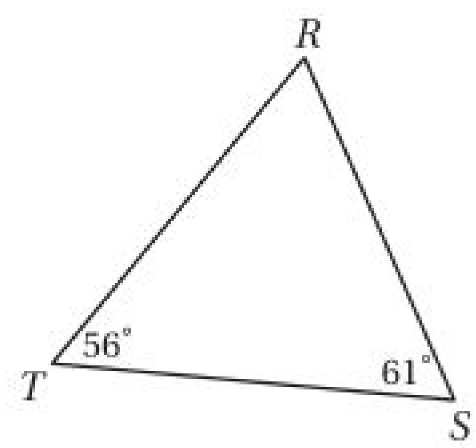
أجب عن الأسئلة الآتية:

7) إذا كان طولا ضلعين في مثلثٍ هما 9 cm , 15 cm ، فما أصغر عددٍ صحيحٍ من السنتمترات يمكن أن يكون طولًا للضلع الثالث؟

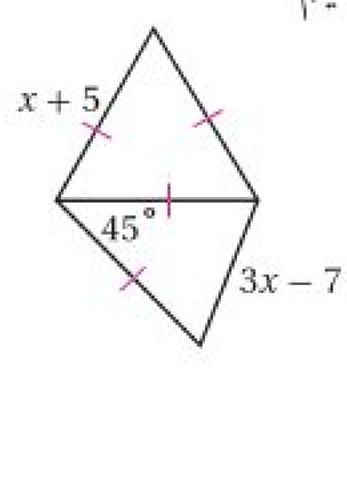
8) ما إحداثيات ملتقى ارتفاعات المثلث أدناه؟



9) اكتب أضلاع المثلث أدناه مرتّبةً تبعًا لأطوالها من الأقصر إلى الأطول:

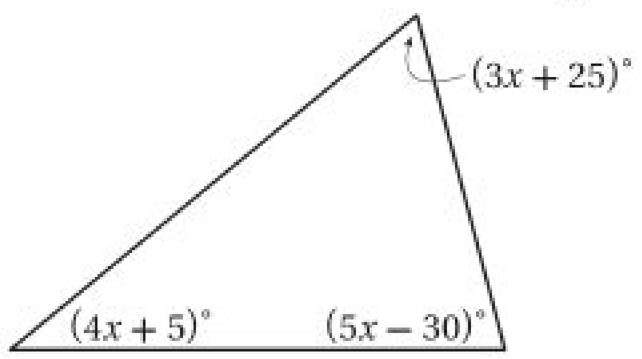


10) اكتب متباينةً تصف قيم x الممكنة.



11) خرج كلٌّ من حمزة وهاني مع فرقة الكشافة وخيّموا في الصحراء، فترك حمزةُ المخيم وسار 2 km في اتجاه الشرق. ثم انعطف 20° في اتجاه الجنوب الشرقي. وسار 4 km أخرى. وأما هاني فسار 2 km في اتجاه الغرب، ثم انعطف 30° في اتجاه الشمال الغربي ، وسار 4 km أخرى. أيُّهما أبعد عن المخيم؟

12) أوجد قيمة x في المثلث أدناه.



أسئلة ذات إجابات مطولة

13) إذا كانت رؤوس $\triangle ABC$ هي $A(-3, 1), B(0, 2)$, $C(3, 4)$ ، فأجب عن الأسئلة التالية مبيِّنًا خطوات الحل:

a) ارسم هذا المثلث في المستوى الإحداثي.

b) أوجد أطوال أضلاعه (قرِّب إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ).

c) صنِّفِ المثلث من حيث أضلاعه وزواياه.

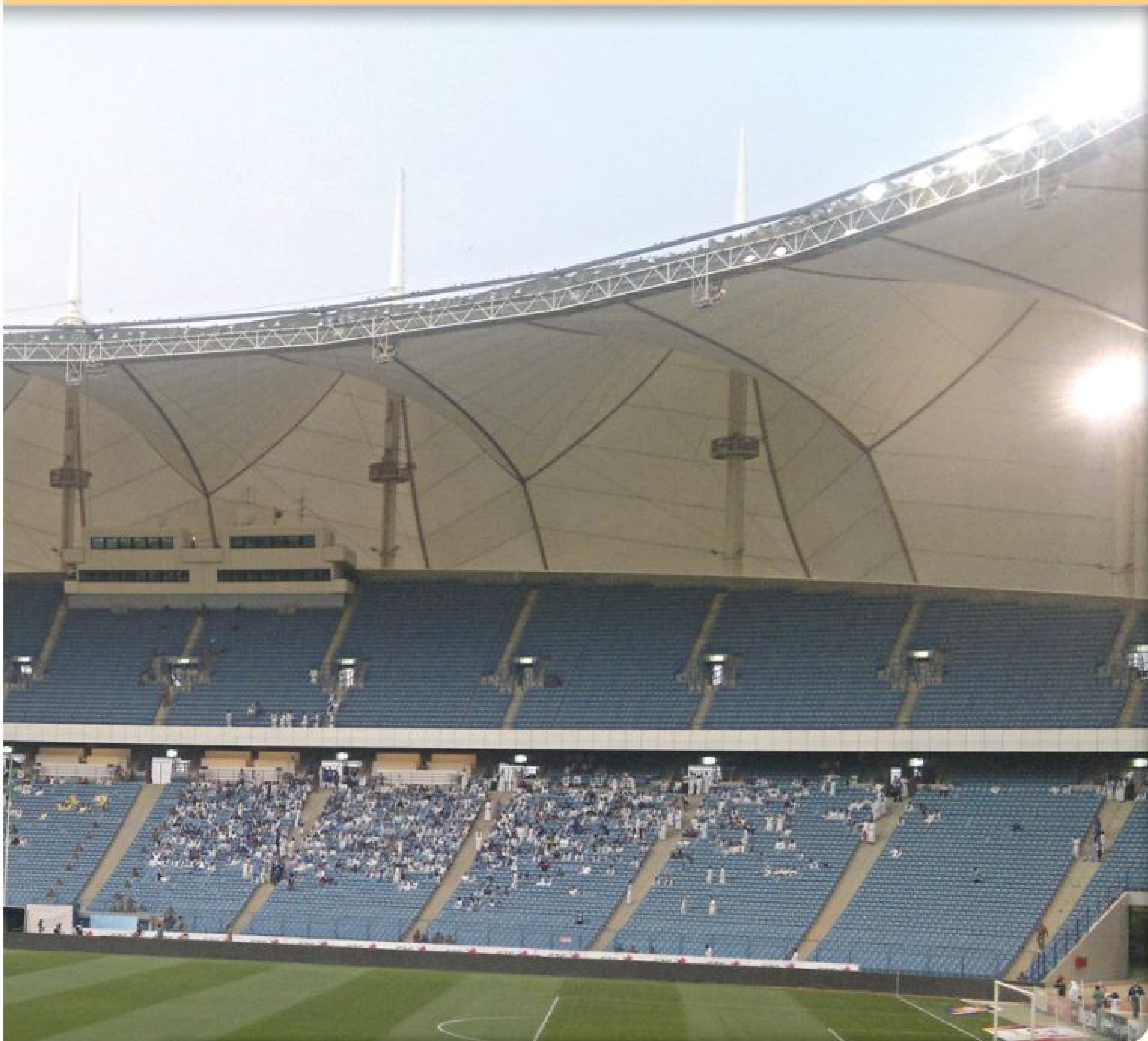
d) قارن بين $m\angle A, m\angle C$.

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

إذا لم تستطع الإجابة عن ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
فعد إلى الدرس...	4-1	4-5	4-2	4-3	4-4	3-1	4-5	4-2	4-3	4-6	4-6	3-2	3-1, 4-3

الفصل 5

الأشكال الرباعية
Quadrilaterals



فيما سبق:

درستُ تصنيف المضلعات وميَّزت خصائصها وطبَّقتُها.

والآن:

- أجد مجموع قياسات كل من الزوايا الداخلية والخارجيّة لمضلع، وأستعملها.
- أتعرف خصائص الأشكال الرباعية، وأطبِّقها.
- أقارن بين الأشكال الرباعيّة.

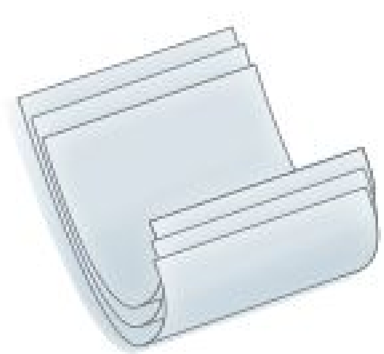
لماذا؟

أدوات رياضية: تُستعمل خصائص الأشكال الرباعيّة لإيجاد قياسات زوايا أو أطوال أضلاع، كقياس زوايا الملاعب وتخطيطها.

المطويات منظم أفكار

الأشكال الرباعيّة: اعملْ هذهِ المطويَّةَ لتساعدَكَ على تنظيمِ معلوماتِكَ حول الفصل 5 . ابدأْ بثلاثِ أوراقِ A4 .

1. ضَعْ 3 أوراق بعضها فوق بعضٍ بحيثُ تبعد كل ورقة عن الأخرى 2 cm
2. اطوِ الأوراقَ بحيث تكونَ لحوافها الظاهرة العرض نفسه.
3. ثَبِّتِ الأوراقَ على طُولِ خطِّ الطَّيِّ.
4. أُكتبْ عنوان الفصل وأرقام الدُّروسِ، وسجِّلْ مُلاحظاتِكَ.



التهيئة للفصل 5

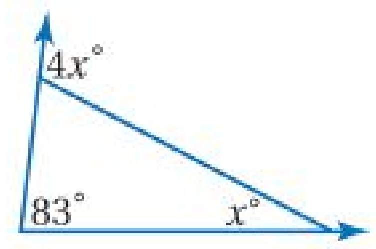
تشخيص الاستعداد:

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

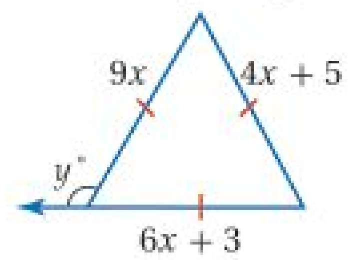
اختبار سريع

أوجد قيم x, y في كل مما يأتي مقرَّبًا إلى أقرب عُشر:

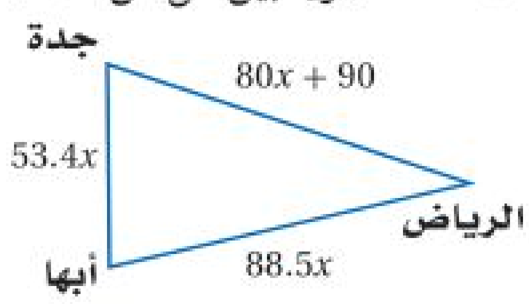
1)



2)



3) مدن: تمثل مواقع كل من الرياض وجدة وأبها رؤوس مثلث كما في الشكل أدناه. إذا كان محيط هذا المثلث 2198 km، فأوجد المسافة الجوية بين كل من المدن الثلاث.



حدِّد ما إذا كان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك في كل مما يأتي:

4) $A(3, 3), B(8, 2), C(6, -1), D(1, 0)$

5) $A(4, 2), B(1, -3), C(-3, 5), D(2, 2)$

6) $A(-8, -7), B(4, -4), C(-2, -5), D(1, 7)$

7) حدائق: صمَّم مهندس رسمًا لحديقة رباعيّة الشكل، إحداثيات رؤوسها: $A(-2, 1), B(3, -3), C(5, 7),$ $D(-3, 4)$. إذا رسم ممرين يقطعانها $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{BD}$. فهل الممران متعامدان؟ فسّر إجابتك.

أوجد المسافة بين كل نقطتين، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصف القطعة الواصلة بينهما في كل مما يأتي:

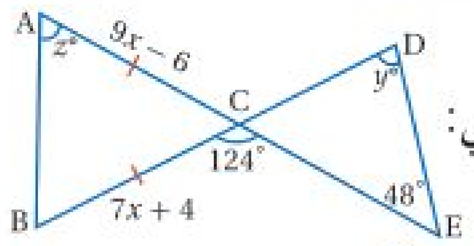
8) $J(-6, 2), K(-1, 3)$ **9)** $R(2, 5), S(8, 4)$

10) مسافات: وقف شخص على النقطة $T(80, 20)$ من مستوى إحداثي، ورغب في الانتقال إلى كل من $U(20, 60)$ وَ $V(110, 85)$. فما أقصر مسافة يمكن أن يقطعها الشخص؟ فسِّر إجابتك.

مراجعة سريعة

مثال 1

أوجد (x, y, z) في الشكل الآتي:



$AC = BC$	معطى
$9x - 6 = 7x + 4$	بالتعويض
$2x = 10$	بالطرح
$x = 5$	بالتبسيط
$124° = y° + 48°$	نظريّة الزاوية الخارجية للمثلث
$(y) = 76°$	بالتبسيط
$124° = z° + z°$	نظريّة الزاوية الخارجية للمثلث
$124° = 2z°$	بالجمع
$z° = 62°$	بالتبسيط

مثال 2

إذا كان $A(-2, 5), B(4, 17), C(0, 1), D(8, -3)$، فحدّد ما إذا كان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ صيغة الميل

ميل $\overleftrightarrow{AB}$: $\frac{17 - 5}{4 - (-2)} = \frac{12}{6} = 2$

ميل $\overleftrightarrow{CD}$: $\frac{-3 - 1}{8 - 0} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$

بما أن ميلي المستقيمين غير متساويين، فهما غير متوازيين.

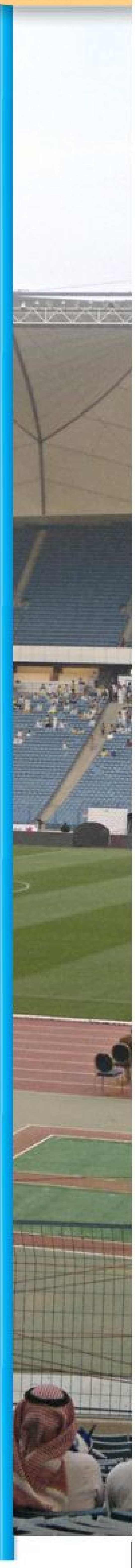
$2(-\frac{1}{2}) = -1$ حاصل ضرب ميلي $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$

وبما أن حاصل ضرب ميليهما يساوي -1، فهما متعامدان.

مثال 3

أوجد المسافة بين النقطتين $J(2, -1), K(7, 1)$، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما.

$JK = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_2)^2}$	صيغة المسافة بين نقطتين
$= \sqrt{(7 - 2)^2 + (1 - (-1))^2}$	بالتعويض
$= \sqrt{29}$	بالتبسيط
$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{2 + 7}{2}, \frac{-1 + 1}{2}\right) = (4.5, 0)$	صيغة نقطة المنتصف



زوايا المضلع
Angles of Polygon

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ أسماء المضلعات وتصنيفها.
(مهارة سابقة)

والآن:

- أجِدُ مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع، وأستعمله.
- أجِدُ مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة لمضلع، وأستعمله.

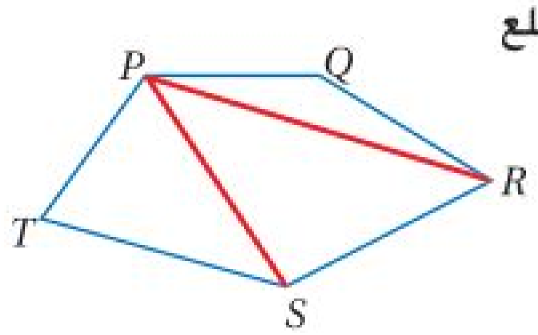
المفردات:

القطر
diagonal

لماذا؟

تنتج عاملات النحل اليافعة شمعًا تشكِّله بعناية نحلات أخريات على صورة خلايا سداسيّة. ومع أنّ سُمْكَ جدران الخلايا 0.1 mm، إلّا أنّها تتحمّل ثقلًا يعادل 25 مثل وزنها. وتشكِّل جدران الخلايا الزاوية نفسها عند كل التقاء. وقياس هذه الزاوية يساوي قياس الزاوية الداخلية للسداسي المنتظم.

مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع:

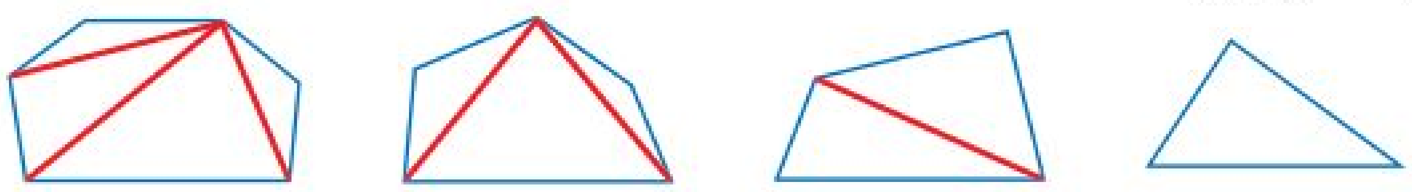


قطر المضلع هو قطعة مستقيمة تصل بين أي رأسين غير متتاليين فيه. رأسا المضلع $PQRST$ غير التاليين للرأس P: هما: R, S؛

لذا فالمضلع $PQRST$ له قطران من الرأس P: هما: $\overline{PR}, \overline{PS}$.

لاحظ أن هذين القطرين يقسمان الشكل الخماسي إلى ثلاثة مثلثات.

مجموع قياسات زوايا المضلع يساوي مجموع قياسات زوايا المثلثات التي تتشكّل عند رسم جميع الأقطار الممكنة من أحد الرؤوس.



مثلث رباعي خماسي سداسي

بما أن مجموع قياسات زوايا المثلث $180°$، فإنّه يمكننا إنشاء جدول والبحث عن نمط لإيجاد مجموع قياسات زوايا أي مضلع محدّب.

المضلع	عدد الأضلاع	عدد المثلثات	مجموع قياسات الزوايا الداخلية
مثلث	3	1	$180°\,(1) = 180°$
رباعي	4	2	$180°\,(2) = 360°$
خماسي	5	3	$180°\,(3) = 540°$
سداسي	6	4	$180°\,(4) = 720°$
ذو n من الأضلاع	n	$n-2$	$180°\,(n-2)$

وهذا يقودنا إلى النظرية الآتية:

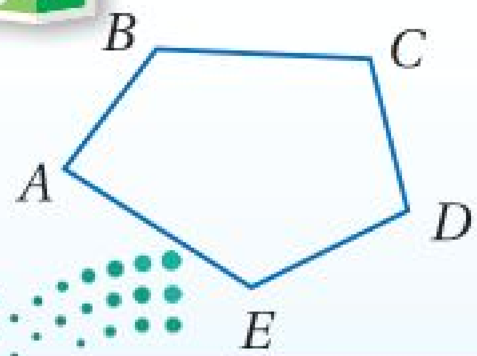
مراجعة المفردات

المضلع: هو شكل مغلق، يتكوّن من ثلاث قطع مستقيمة أو أكثر، تلتقي كل قطعة بطرفي قطعتين أخريين من المضلع، ولا تقع أي قطعتين منها على استقامة واحدة، وتكون رؤوس المضلع هي أطراف القطع المستقيمة فيه.

نظرية 5.1 مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع

أضف إلى مطويتك

مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع محدّب عدد أضلاعه n يساوي $S = (n-2) \cdot 180°$.



مثال:

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D + m\angle E = (5-2) \cdot 180° = 540°$$

مراجعة المفردات

الزاوية الداخلية: هي الزاوية المحصورة بين ضلعين متجاورين في مضلع وتقع داخله.

ستبرهن نظرية 5.1 في السؤال 38

يمكنك استعمال النظرية 5.1 لإيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع والقياسات المجهولة لزواياه.

مثال 1 إيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع

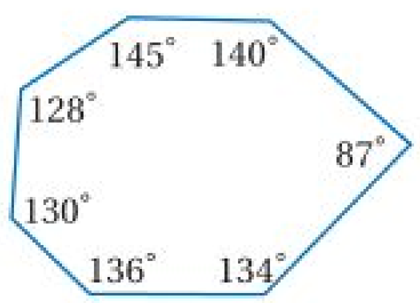
a) أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للسباعي المحدّب.

السباعي المحدب له سبعة أضلاع. استعمل النظرية 5.1 ؛ لإيجاد مجموع قياسات زواياه الداخليّة.

$(n-2)\cdot 180^\circ = (7-2)\cdot 180^\circ$ $\quad n = 7$

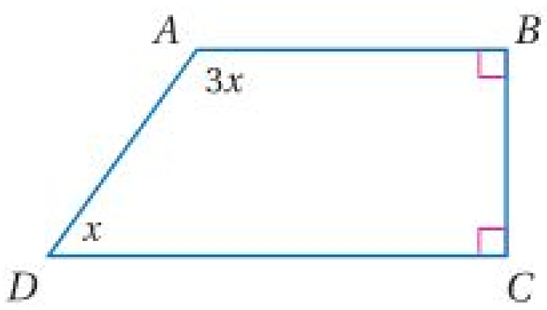
$= 5\cdot 180^\circ = 900^\circ$ $\quad$ بالتبسيط

إذن فمجموع قياسات الزوايا الداخليّة للسباعي المحدّب يساوي 900°.



ارسم سباعيًّا محدّبًا، واستعمل المنقلة لقياس كل زاوية داخليّة مقربًا إلى أقرب درجة، ثم أوجد مجموع هذه القياسات.

$128^\circ+145^\circ+140^\circ+87^\circ+134^\circ+136^\circ+130^\circ = 900^\circ$ ✓



b) جبر: أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية للرباعي المجاور.

الخطوة 1: أوجد قيمة (x).

بما أن للشكل الرباعي 4 زوايا، فإن مجموع قياسات زواياه الداخليّة يساوي $(4-2)\cdot 180^\circ = 360^\circ$.

$360^\circ = m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D$ $\quad$ مجموع قياسات الزوايا الداخليّة

$360^\circ = 3x + 90^\circ + 90^\circ + x$ $\quad$ بالتعويض

$360^\circ = 4x + 180^\circ$ $\quad$ بتجميع الحدود المتشابهة

$180^\circ = 4x$ $\quad$ بطرح 180° من كلا الطرفين

$45^\circ = x$ $\quad$ بقسمة كلا الطرفين على 4

الخطوة 2: استعمل قيمة x لإيجاد قياس كل زاوية.

$m\angle D = x = 45^\circ$

$m\angle B = 90^\circ$

$m\angle C = 90^\circ$

$m\angle A = 3x = 3(45^\circ) = 135^\circ$

اكتب قياسات الزوايا الداخلية للرباعي، ثم أوجد مجموع هذه القياسات.

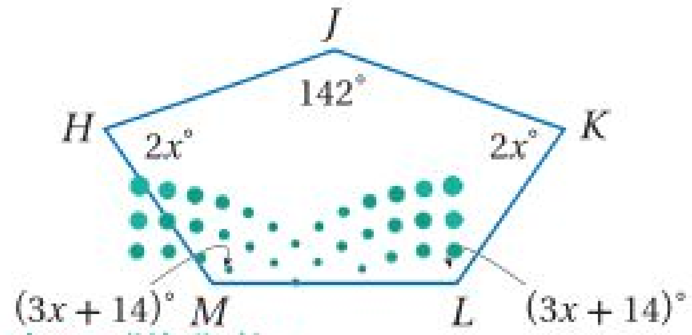
$90^\circ, 90^\circ, 45^\circ, 135^\circ$

$90^\circ + 90^\circ + 45^\circ + 135^\circ = 360^\circ$ ✓

✓ تحقق من فهمك

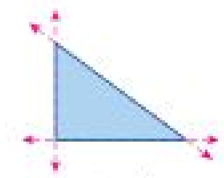
1A) أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للثماني المحدّب.

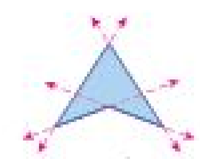
1B) أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية للخماسي المجاور.



مراجعة المفردات

المضلع المحدّب: مضلع يكون قياس أيّ من زواياه الداخلية أقل من 180°، ولا يقطع امتداد أي ضلع فيه أي ضلع آخر من أضلاع المضلع.


مضلع محدب


مضلع مقعر

إرشادات للدراسة

المضلع: عند ذكر كلمة مضلع في هذا الفصل فإننا نعني المضلع المحدّب.

مراجعة المفردات

المضلع المنتظم: هو مضلع محدَّب جميع أضلاعه متطابقة، وجميع زواياه متطابقة.

تذكّر أن جميع الزوايا الداخليّة للمضلع المنتظم متطابقة. ويمكنك استعمال هذه الحقيقة ونظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع لإيجاد قياس الزاوية الداخلية لأي مضلع منتظم.

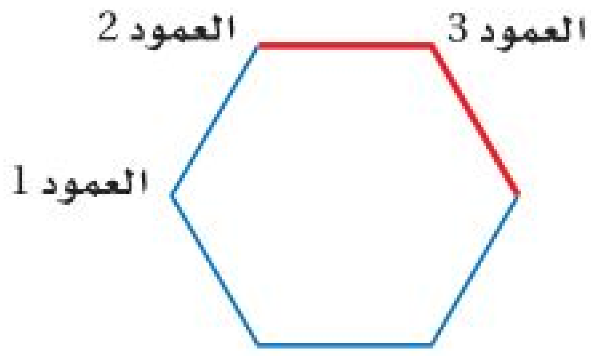
مثال 2 من واقع الحياة — قياس الزاوية الداخليّة لمضلع منتظم

مظلة: في المنظر العلوي للمظلة المجاورة، تشكّل الأعمدة رؤوس مضلع سداسي منتظم. أوجد قياس الزاوية التي تتشكل عند أي من أركان المظلة.

افهم: المعطيات: منظر علوي لمظلة سداسية منتظمة الشكل.

المطلوب: إيجاد قياس الزاوية التي تتشكل عند أي ركن من أركان المظلة.

ارسم شكلًا يمثِّل المنظر العلوي للمظلة.



الزاوية التي تتشكّل عند أي من أركان المظلة هي زاوية داخليّة لسداسي منتظم.

خطط: استعمل نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع لإيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للسداسي. وبما أن الزوايا الداخلية للسداسي المنتظم متطابقة، فإن قياس كل زاوية داخلية يساوي ناتج قسمة المجموع على عدد الزوايا.

حل: أولًا: أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة.

$S = (n - 2) \cdot 180^\circ$ صيغة مجموع قياسات الزوايا الداخلية

$= (6 - 2) \cdot 180^\circ$ $n = 6$

$= 4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$ بالتبسيط

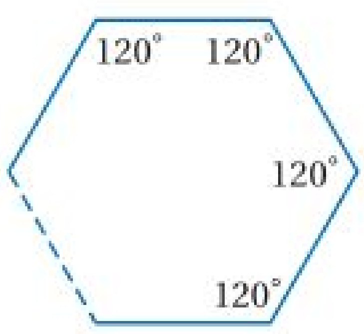
ثانيًا: أوجد قياس كل زاوية داخليّة.

$\dfrac{\text{مجموع قياسات الزوايا الداخلية}}{\text{عدد الزوايا الداخلية}} = \dfrac{720^\circ}{6}$ بالتعويض

$= 120^\circ$ بالقسمة

إذن قياس الزاوية المتكوِّنة عند كل ركن يساوي 120°.

تحقق: للتحقق من أنّ هذا القياس صحيح، استعمل المسطرة والمنقلة لرسم سداسي منتظم قياس زاويته الداخليّة 120°.
سيرتبط الضلع الأخير بنقطة البداية لأول قطعة مستقيمة رُسمت. ✓



تحقق من فهمك

2A) **سجاد:** أوجد قياس الزاوية الداخلية لسجادة على شكل ثماني منتظم.

2B) **نوافير:** تزيِّن النوافير الأماكن العامة، ويقام بعضها على شكل مضلعات منتظمة. أوجد قياس الزاوية الداخلية لنافورة على شكل تساعي منتظم.

يمكنك أيضًا استعمال نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع لإيجاد عدد أضلاع مضلع منتظم إذا عُلم قياس زاوية داخلية له.

مثال 3 إيجاد عدد الأضلاع إذا عُلم قياس زاوية داخليّة

إذا كان قياس الزاوية الداخليّة لمضلع منتظم يساوي °135، فأوجد عدد أضلاعه .

افترض أن عدد أضلاع المضلع يساوي n. وبذلك يكون مجموع قياسات زواياه الداخليّة $135n$ ؛ لأن جميع الزوايا الداخليّة للمضلع المنتظم متطابقة. وبناءً على نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة يمكن التعبير أيضًا عن مجموع قياسات الزوايا الداخليّة بالعبارة $S = (n - 2) \cdot 180$.

$135°n = (n - 2) \cdot 180°$	كتابة معادلة
$135°n = 180°n - 360°$	خاصية التوزيع
$-45°n = -360°$	بطرح $180n$ من كلا الطرفين
$n = 8$	بقسمة كلا الطرفين على -45

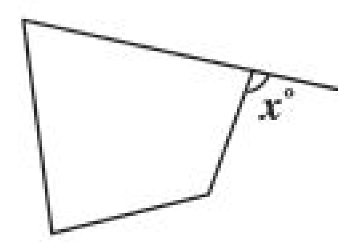
إذن للمضلع 8 أضلاع.

تحقق من فهمك

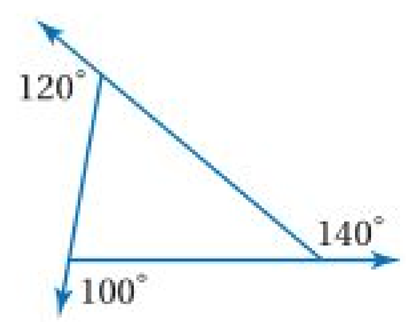
3) إذا كان قياس الزاوية الداخليّة لمضلع منتظم يساوي °144، فأوجد عدد أضلاعه.

مراجعة المفردات

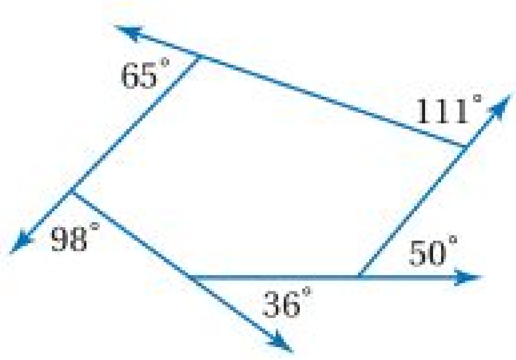
الزاوية الخارجيّة: الزاوية الخارجية لمضلع محدب هي زاوية محصورة بين أحد أضلاعه وامتداد ضلع آخر.



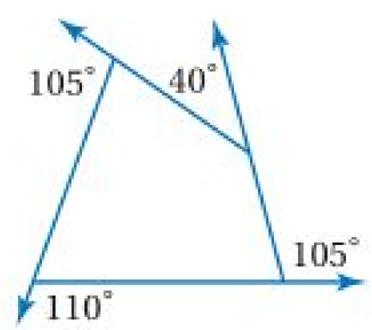
مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع: هل توجد علاقة بين عدد أضلاع مضلع محدّب ومجموع قياسات زواياه الخارجية؟ انظر المضلعات أدناه التي أُعطي في كل منها قياس زاوية خارجية عند كل رأس.



$120° + 100° + 140° = 360°$



$65° + 98° + 36° + 50° + 111° = 360°$



$105° + 110° + 105° + 40° = 360°$

إرشادات للدراسة

قياس الزاوية الخارجية: قياس الزاوية الخارجية لمضلع منتظم عدد أضلاعه n يساوي $\frac{360°}{n}$

لاحظ أنّ مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة بأخذ زاوية واحدة عند كل رأس في كل حالة يساوي °360. وتقودنا هذه الملاحظة إلى النظرية الآتية :

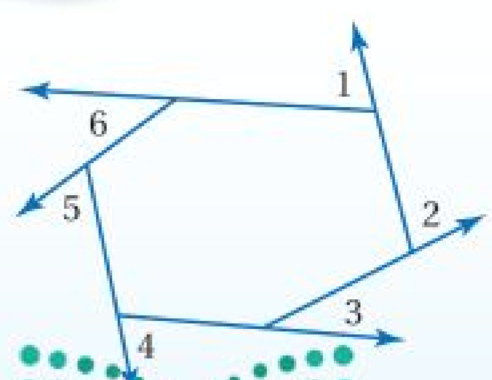
نظرية 5.2 مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع

أضف إلى مطويتك

مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع المحدّب بأخذ زاوية واحدة عند كل رأس يساوي °360.

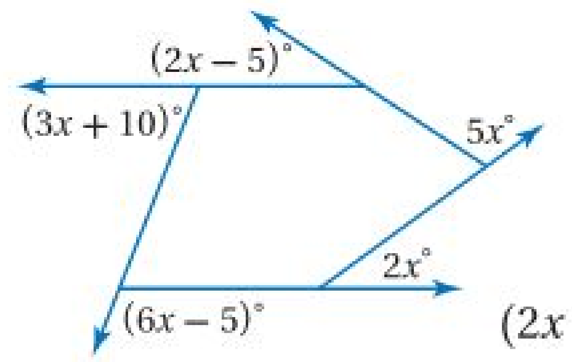
مثال:

$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5 + m\angle 6 = 360°$



ستبرهن نظرية 5.2 في السؤال 39

مثال 4 إيجاد قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع



a) **جبر:** **أوجد قيمة x في الشكل المجاور.**

استعمل نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع لكتابة معادلة، ثمّ حُلّها لإيجاد قيمة x.

$$(2x-5)^\circ + 5x^\circ + 2x^\circ + (6x-5)^\circ + (3x+10)^\circ = 360^\circ$$

$$(2x+5x+2x+6x+3x)^\circ + [-5+(-5)+10]^\circ = 360^\circ$$

$$18x^\circ = 360^\circ$$

$$x^\circ = \frac{360^\circ}{18} = 20$$

b) **أوجد قياس الزاوية الخارجيّة للتساعي المنتظم.**

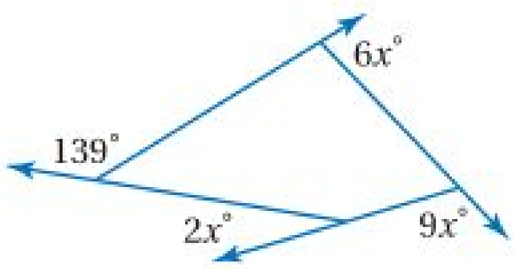
تتطابق الأضلاع والزوايا الداخلية في التساعي المنتظم وتكون الزوايا الخارجية متطابقة لأن المكملات للزوايا المتطابقة تكون متطابقة أيضًا.

افترض أن قياس كل زاوية خارجيّة يساوي x، ثم اكتب معادلة وحلّها.

$9x = 360^\circ$	نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع
$x = 40^\circ$	بقسمة كلا الطرفين على 9

إذن قياس كل زاوية خارجيّة للمضلع التساعي المنتظم يساوي 40°.

تحقق من فهمك



4A) أوجد قيمة x في الشكل المجاور.

4B) أوجد قياس الزاوية الخارجيّة لمضلع منتظم ذي 12 ضلعًا.

إرشادات للدراسة

طريقة بديلة: لإيجاد قياس زاوية خارجيّة لمضلع منتظم يمكنك إيجاد قياس زاوية داخليّة وطرح هذا القياس من 180°؛ لأنّ الزاوية الخارجيّة والزاوية الداخليّة المرتبطة بها متكاملتان.

تأكـد

المثال 1

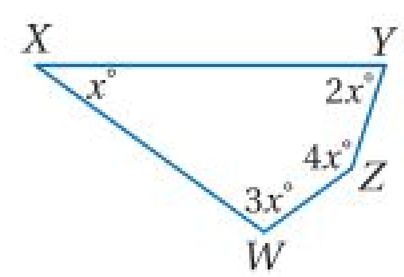
أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لكل من المضلعين المحدبين الآتيين:

1) العشاري

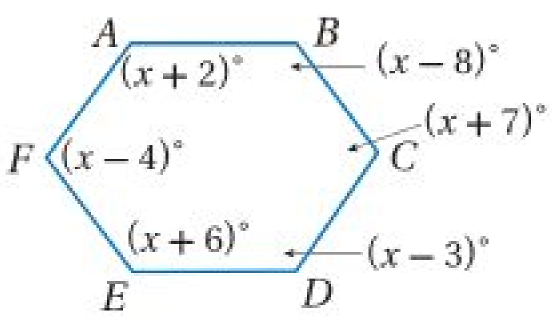
2) الخماسي

أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لكل من المضلعين الآتيين:

3)



4)



المثال 2

5) **عجلة دوارة:** العجلة الدوّارة في الصورة المجاورة على شكل مضلع منتظم عدد أضلاعه 15 ضلعًا.

أوجد قياس الزاوية الداخليّة له.

المثال 3

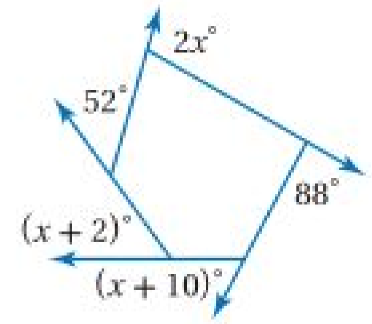
إذا كان قياس إحدى الزوايا الداخلية لمضلع منتظم معطى، فأوجد عدد الأضلاع في كل مما يأتي:

6) 150°

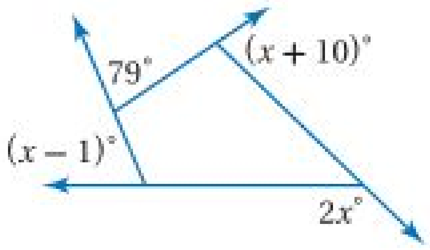
7) 170°

المثال 4 أوجد قيمة x في كلٍّ من الشكلين الآتيين :

8)



9)



أوجد قياس الزاوية الخارجيّة لكل من المضلعين المنتظمين الآتيين:

10) رباعي　　**11)** ثُماني

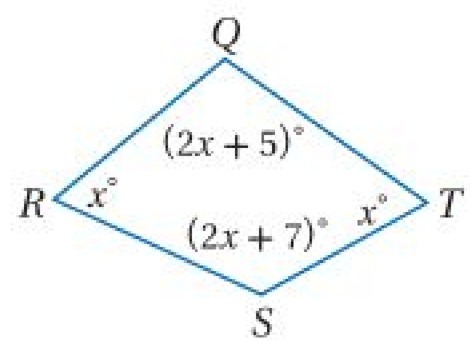
تدرب وحل المسائل

المثال 1 أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لكل من المضلعات المحدبة الآتية:

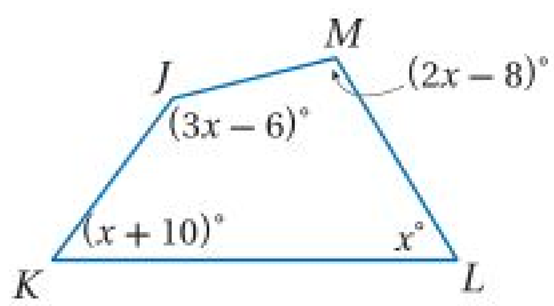
12) ذو 12 ضلعًا　　**13)** ذو 20 ضلعًا　　**14)** ذو 29 ضلعًا　　**15)** ذو 32 ضلعًا

أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لكل من المضلعات الآتية:

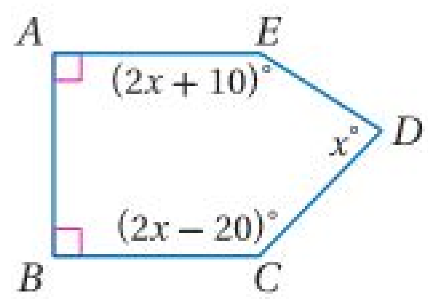
16)



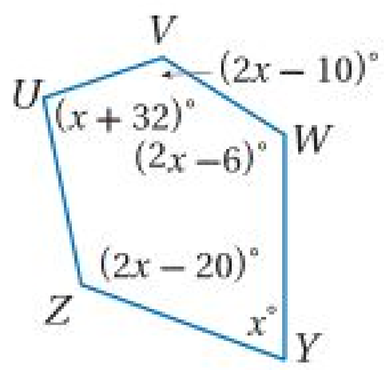
17)



18)



19)



20) ما مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع في الشكل المجاور؟

المثال 2 أوجد قياس زاوية داخليّة لكل من المضلعات المنتظمة الآتية:

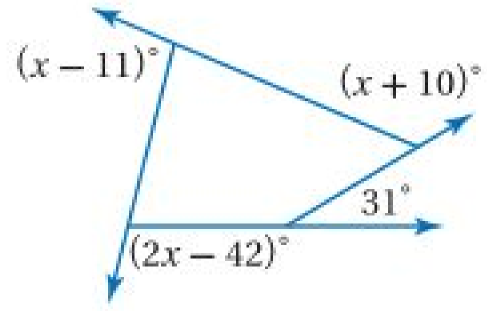
21) ذو12 ضلعاً　　**22)** الخماسي　　**23)** العشاري　　**24)** التُّساعي

المثال 3 إذا كان قياس إحدى الزوايا الداخلية لمضلع منتظم معطى، فأوجد عدد الأضلاع في كل مما يأتي:

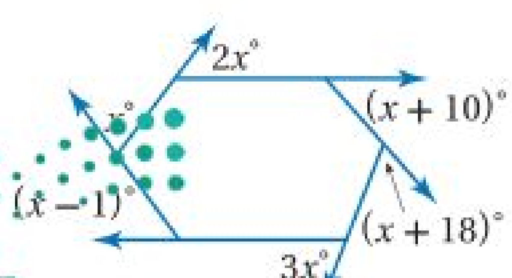
25) $60°$　　**26)** $90°$　　**27)** $120°$　　**28)** $156°$

المثال 4 أوجد قيمة x في كل من الشكلين الآتيين:

29)



30)

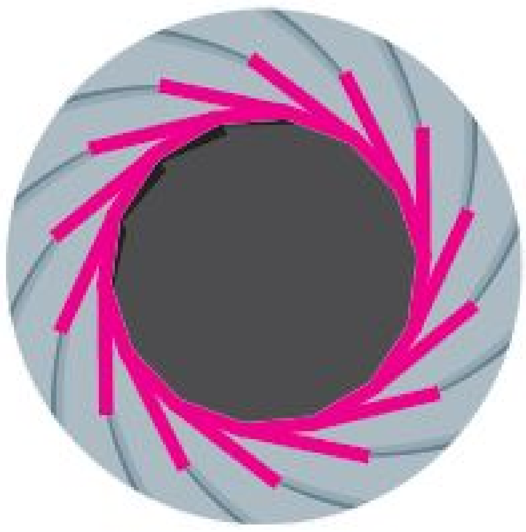


تاريخ الرياضيات

أبو كامل شجاع بن أسلم بن محمد بن شجاع 236 - 318 هـ
مهندس وعالم بالحساب، عرف باسم «أبي كامل الحاسب»، وعاش في القرن الثالث الهجري، له رسالة في «المضلع ذي الزوايا الخمس وذي الزوايا العشر».

أوجد قياس زاوية خارجيّة لكل من المضلعات المنتظمة الآتية:

31) العشاري **32)** الخماسي **33)** السداسي **34)** ذو 15 ضلعًا



35) **تصوير:** تشكّل الفتحة التي ينفذ منها الضوء إلى عدسة آلة التصوير في الشكل المجاور مضلعًا منتظمًا ذا 14 ضلعًا.

a) أوجد قياس الزاوية الداخلية مقرّبة إلى أقرب عُشر.

b) أوجد قياس الزاوية الخارجية مقرّبة إلى أقرب عُشر.

أوجد قياس زاوية خارجية وزاوية داخلية للمضلع المنتظم المعطى عدد أضلاعه في كل مما يأتي، وقرّب إجابتك إلى أقرب عُشر:

36) 7 **37)** 13

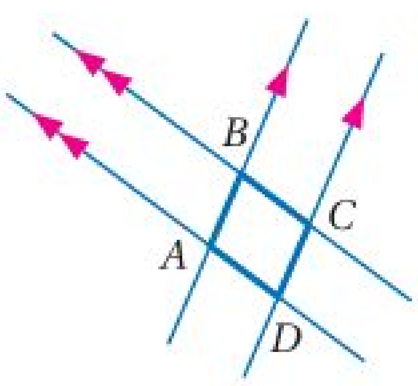
38) أثبت أن مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع الثماني يساوي $1080°$، دون استعمال صيغة مجموع الزوايا الداخلية للمضلع.

39) **برهان:** استعمل الجبر لإثبات نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع.

جبر: أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لكل من المضلعين الآتيين :

40) عشاري قياسات زواياه الداخليّة:
$(x+5)°, (x+10)°, (x+20)°, (x+30)°, (x+35)°, (x+40)°, (x+60)°, (x+70)°, (x+80)°, (x+90)°$

41) الخماسي $ABCDE$ الذي قياسات زواياه الداخليّة: $6x°, (4x+13)°, (x+9)°, (2x-8)°, (4x-1)°$



42) **تمثيلات متعدّدة:** سوف تستقصي في هذه المسألة العلاقات بين الزوايا والأضلاع في متوازي أضلاع.

a) **هندسيًّا:** ارسم زوجين من المستقيمات المتوازية تتقاطع كما في الشكل المجاور، وسمِّ الشكل الرباعي الناتج $ABCD$. ثم كرّر هذه الخطوات لتكوين شكلين آخرين: $FGHJ$, $QRST$.

b) **جدوليًّا:** أكمل الجدول الآتي :

الشكل الرباعي	أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا							
$ABCD$	$m\angle A$		$m\angle B$		$m\angle C$		$m\angle D$	
	AB		BC		CD		DA	
$FGHJ$	$m\angle F$		$m\angle G$		$m\angle H$		$m\angle J$	
	FG		GH		HJ		JF	
$QRST$	$m\angle Q$		$m\angle R$		$m\angle S$		$m\angle T$	
	QR		RS		ST		TQ	

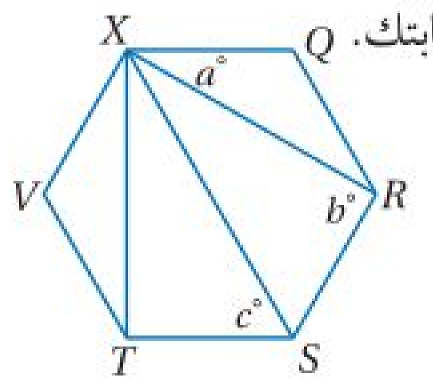
c) **لفظيًّا:** خمّن العلاقة بين كل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي الناتج عن زوجين من المستقيمات المتوازية.

d) **لفظيًّا:** خمّن العلاقة بين كل زاويتين متحالفتين في الشكل الرباعي الناتج عن زوجين من المستقيمات المتوازية.

e) **لفظيًّا:** خمّن العلاقة بين كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي الناتج عن زوجين من المستقيمات المتوازية.

مسائل مهارات التفكير العليا

43) **اكتشف الخطأ:** قالت مريم: إنّ مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للعشاري أكبر منه للسباعي؛ لأنّ عدد أضلاع العشاري أكثر من أضلاع السباعي. وقالت لبنى: إنّ مجموع قياسات الزوايا الخارجية لكلا المضلعين متساوٍ. "فهل أيٌّ منهما ادعاؤها صحيح"؟ وضّح تبريرك.



44) **تحدٍّ:** أوجد قيم a, b, c في الشكل السداسي المنتظم $QRSTVX$ المجاور. برّر إجابتك.

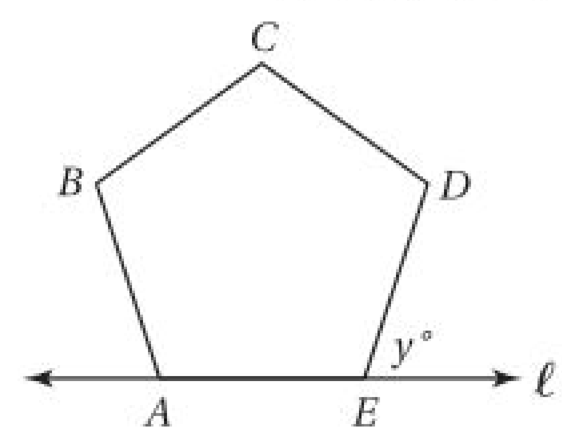
45) **تبرير:** إذا مُدَّ ضلعان لسداسي منتظم بحيث يلتقيان في نقطة خارجه، فهل يكون المثلث الناتج متطابق الأضلاع دائمًا، أو أحيانًا، أو لا يمكن أن يكون متطابق الأضلاع أبدًا؟ برّر إجابتك.

46) **مسألة مفتوحة:** ارسم مضلعًا، وأوجد مجموع قياسات زواياه الداخليّة. ما عدد أضلاع المضلع الذي مجموع قياسات زواياه الداخليّة مِثلا المجموع الذي أوجدته؟ برّر إجابتك.

47) **اكتب:** وضّح العلاقة بين المثلثات ونظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع.

تدريب على اختبار

48) **إجابة قصيرة:** الشكل $ABCDE$ خماسي منتظم، والمستقيم ℓ يحوي $\overline{AE}$. ما قياس $(\angle y)$؟



49) إذا كان مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع مِثْلي مجموع قياسات زواياه الخارجيّة، فما نوع هذا المضلع؟

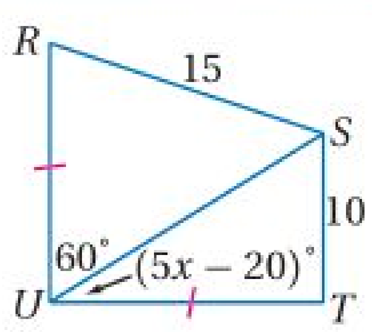
A مربع

B خماسي

C سداسي

D ثماني

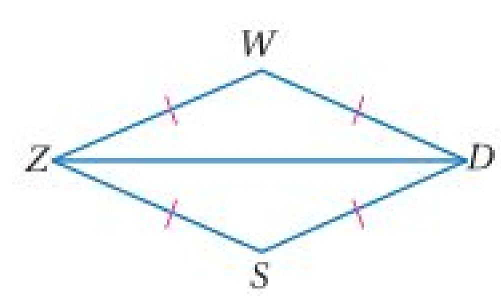
مراجعة تراكمية



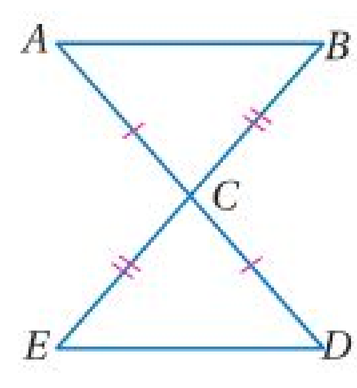
50) **جبر:** اكتب متباينة تمثّل مدى القيم الممكنة لِـ x **(مهارة سابقة)**

بيّن في كل مما يأتي أن المثلثين متطابقان، وحدِّد حالة التطابق، ثم اكتب عبارة تطابق: (مهارة سابقة)

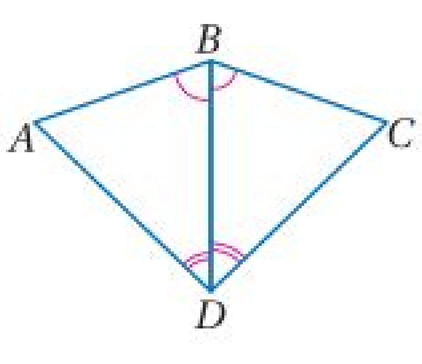
(51



(52

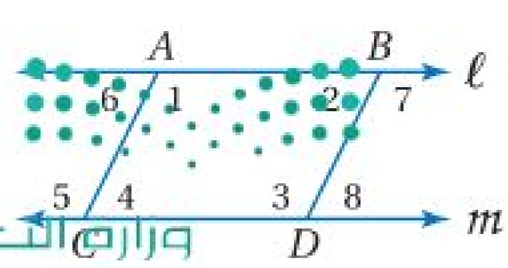


(53



استعد للدرس اللاحق

في الشكل المجاور $\overline{BD} \parallel \overline{AC}$ ، $\ell \parallel m$ ، حدِّد جميع أزواج الزوايا التي تصنف وفقًا لما يلي:



54) زاويتان متبادلتان داخليًّا.

55) زاويتان متحالفتان.

توسع **5-1**

معمل الجداول الإلكترونية

زوايا المضلع
Angles of Polygon

من الممكن إيجاد قياسات الزوايا الداخلية والزوايا الخارجية بالإضافة إلى مجموع قياسات الزوايا الداخلية لأي مضلع منتظم عدد أضلاعه n، وذلك باستعمال برنامج الجداول الإلكترونية.

نشاط

صمّم جدولًا إلكترونيًّا باتباع الخطوات الآتية:

- اكتب عناوين للأعمدة كما في الجدول أدناه.
- أدخل الأرقام 10–3 في العمود الأول بدءًا من الخلية A2.
- عدد المثلثات في كل مضلع أقل من عدد أضلاعه بـ 2. اكتب صيغة في الخلية B2 لطرح 2 من كل عدد في الخلية A2 وذلك بوضع المؤشر في الخلية B2 وكتابة $\boxed{=A2-2}$ ثم ضغط enter .
- اكتب صيغة في الخلية C2 لحساب مجموع قياسات الزوايا الداخليّة. تذكّر أن صيغة مجموع قياسات زوايا مضلع هي $S=(n-2)\cdot 180^\circ$، وذلك بوضع المؤشر في الخلية C2 وكتابة $\boxed{=B2*180}$ ثم ضغط enter .
- استمر في كتابة صيغ لحساب القيم المشار إليها في الجدول، ثم اسحب هذه الصيغ على القيم حتّى الصف 9. سيظهر الجدول في النهاية على النحو الآتي:

المضلعات والزوايا

	A	B	C	D	E	F
1	عدد الأضلاع	عدد المثلثات	مجموع قياسات الزوايا الداخلية	قياس كل زاوية داخلية	قياس كل زاوية خارجية	مجموع قياسات الزوايا الخارجية
2	3	1	180	60	120	360
3	4	2	360	90	90	360
4	5	3	540	108	72	360
5	6	4	720	120	60	360
6	7	5	900	128.57	51.43	360
7	8	6	1080	135	45	360
8	9	7	1260	140	40	360
9	10	8	1440	144	36	360

Sheet 1 | Sheet 2 | Sheet 3

تمارين ومسائل:

1) اكتب الصيغة التي استعملتها لإيجاد قياس زاوية داخلية للمضلع المنتظم.
2) اكتب الصيغة التي استعملتها لإيجاد مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع المنتظم.
3) ما قياس كل زاوية داخليّة إذا كان عدد الأضلاع 1 أو 2؟
4) هل من الممكن أن يكون عدد الأضلاع 1 أو 2؟ وضّح إجابتك.

استعمل جدولًا إلكترونيًّا لحل الأسئلة الآتية:

5) ما عدد المثلثات في مضلع عدد أضلاعه 17 ضلعًا؟
6) أوجد قياس الزاوية الخارجية لمضلع منتظم عدد أضلاعه 16 ضلعًا.
7) أوجد قياس زاوية داخلية لمضلع منتظم عدد أضلاعه 115 ضلعًا مقرّبًا إجابتك إلى أقرب عُشر.
8) إذا كان قياس كل من الزوايا الخارجية 0°، فأوجد قياس الزاوية الداخليّة. وهل هذا ممكن؟ وضّح إجابتك.

2-5 متوازي الأضلاع
Parallelogram

فيما سبق:

درستُ تصنيف المضلعات الرباعية.

(مهارة سابقة)

والآن:

- أتعرف خصائص أضلاع وزوايا متوازي الأضلاع وأطبّقها.
- أتعرف خصائص أقطار متوازي الأضلاع وأطبّقها.

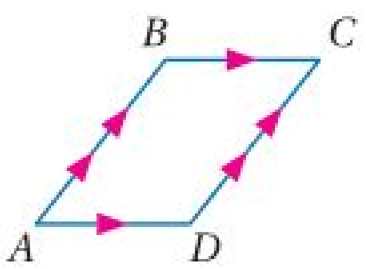
المفردات:

متوازي الأضلاع
parallelogram

لماذا؟

يمكن التحكم في ارتفاع مرمى كرة السلة من خلال أذرع خلفية كما في الشكل أدناه. لاحظ أنّه كلّما تم تعديل الارتفاع، يبقى كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي الذي تشكّله الأذرع متوازيين.

أضلاع متوازي الأضلاع وزواياه: **متوازي الأضلاع** هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان. ويُرمز لمتوازي الأضلاع بالرمز ▱. ففي ▱$ABCD$ المبين جانبًا $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ بحسب التعريف.



▱$ABCD$

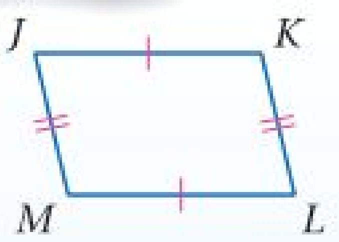
تقدم النظريات الآتية خصائص أخرى لمتوازي الأضلاع.

نظريات — خصائص متوازي الأضلاع

أضف إلى مطويتك

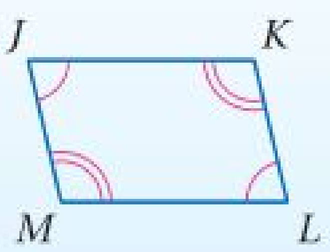
5.3 كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان.

مثال: $\overline{JK} \cong \overline{ML}$, $\overline{JM} \cong \overline{KL}$



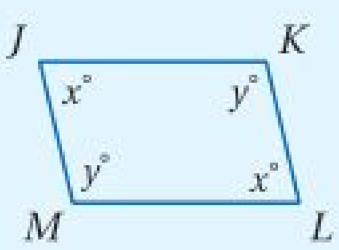
5.4 كل زاويتين متقابلتين في متوازي الأضلاع متطابقتان.

مثال: $\angle J \cong \angle L$, $\angle K \cong \angle M$



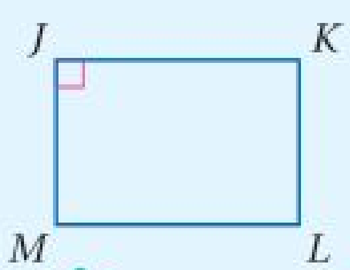
5.5 كل زاويتين متحالفتين في متوازي الأضلاع متكاملتان.

مثال: $x° + y° = 180°$



5.6 إذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع قائمة، فإن زواياه الأربع قوائم.

مثال: في ▱$JKLM$ ، إذا كانت $\angle J$ قائمة، فإنّ: $\angle K, \angle L, \angle M$ قوائم أيضًا.



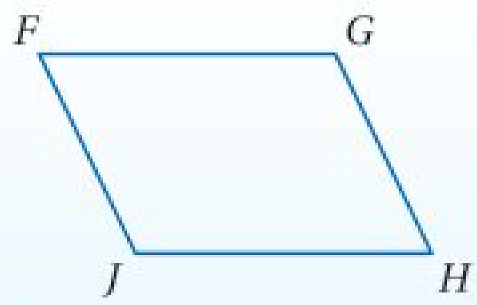
سوف تبرهن النظريات 5.6 ,5.5 ,5.3 في الأسئلة 5 ,25 ,27 على الترتيب

إرشادات للدراسة

رسم الأشكال: تكتب النظريات بمصطلحات عامة، أما في البرهان فيجب رسم شكل بحيث يمكن من خلاله الإشارة إلى القطع المستقيمة والزوايا بصورة دقيقة.

برهان   نظرية 5.4

اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 5.4.



المعطيات: $\square FGHJ$

المطلوب: $\angle F \cong \angle H, \angle J \cong \angle G$

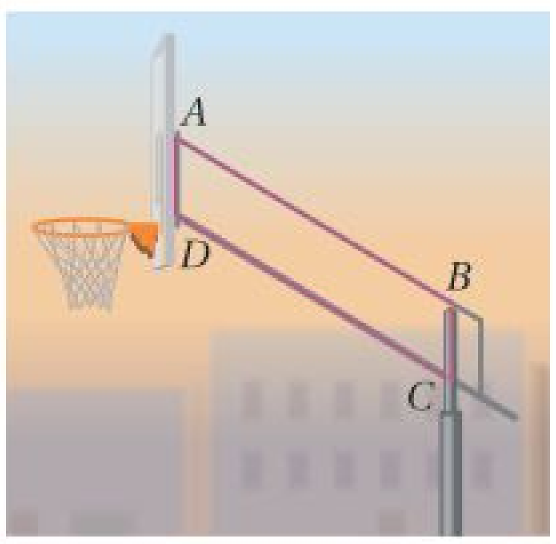
البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\square FGHJ$	1) معطى.
2) $\overline{FG} \parallel \overline{JH}, \overline{FJ} \parallel \overline{GH}$	2) تعريف متوازي الأضلاع.
3) $\angle F, \angle J$ متكاملتان. $\angle J, \angle H$ متكاملتان. $\angle H, \angle G$ متكاملتان.	3) إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين، فإن كل زاويتين متحالفتين متكاملتان.
4) $\angle F \cong \angle H, \angle J \cong \angle G$	4) الزاويتان المكملتان للزاوية نفسها تكونان متطابقتين.

الربط مع الحياة

الأبعاد القياسية لملعب كرة السلة هي $94\,ft \times 50\,ft$، والارتفاع القياسي للهدف عن الأرض $10\,ft$.

مثال 1 من واقع الحياة   استعمال خصائص متوازي الأضلاع



كرة سلة: في $\square ABCD$، إذا كان $AB = 2.5\,ft, m\angle A = 55°$، $BC = 1\,ft$، فأوجد كلًّا مما يأتي، وبرِّر إجابتك.

a) DC

$\overline{DC} \cong \overline{AB}$ كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان

$DC = AB$ تعريف تطابق القطع المستقيمة

$= 2.5\,ft$ بالتعويض

b) $m\angle B$

$m\angle B + m\angle A = 180°$ كل زاويتين متحالفتين في متوازي الأضلاع متكاملتان

$m\angle B + 55° = 180°$ بالتعويض

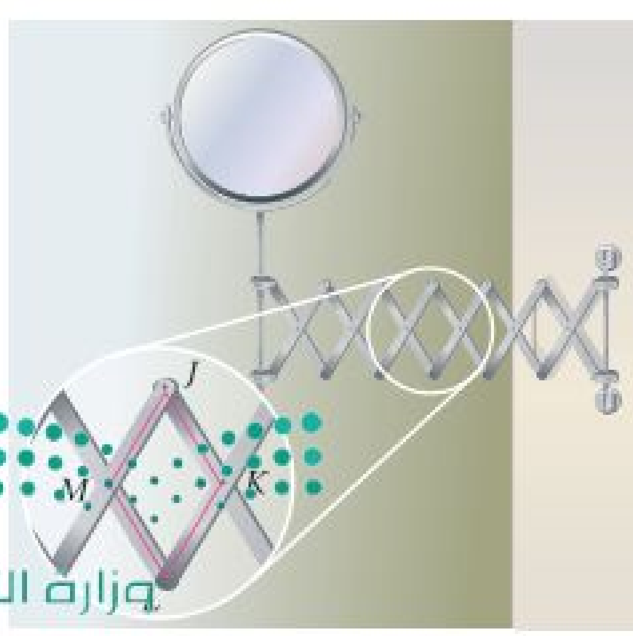
$m\angle B = 125°$ بطرح $55°$ من كلا الطرفين

c) $m\angle C$

$m\angle C = m\angle A$ كل زاويتين متقابلتين في متوازي الأضلاع متطابقتان

$= 55°$ بالتعويض

تحقق من فهمك



1) **مرايا:** تُستعمل في مرآة الحائط المبينة جانبًا متوازيات أضلاع يتغير شكلها كُلّما مُدّ الذراع. في $\square JKLM$، إذا كان $m\angle J = 47°, MJ = 8\,cm$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

A) LK B) $m\angle L$

C) إذا مُدّ الذراع حتى أصبح $m\angle J = 90°$، فكم يصبح قياس كلٍّ من $\angle K, \angle L, \angle M$؟ برّر إجابتك.

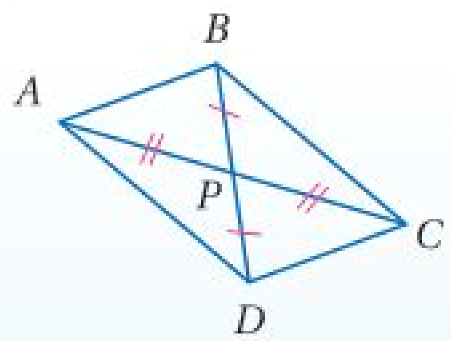
قطرا متوازي الأضلاع: قطرا متوازي الأضلاع يُحقّقان الخاصيّتين الآتيتين :

نظريات — قطرا متوازي الأضلاع

أضف إلى مطويتك

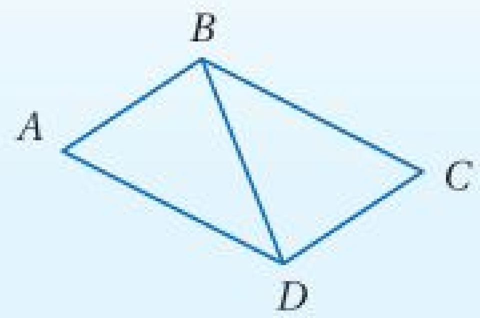
5.7 قطرا متوازي الأضلاع ينصّف كل منهما الآخر.

مثال: $\overline{AP} \cong \overline{PC}$, $\overline{DP} \cong \overline{PB}$.



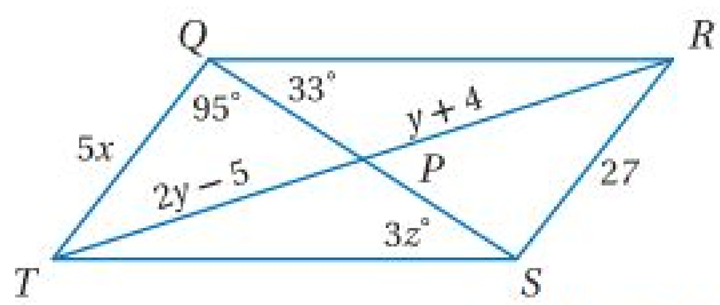
5.8 قطر متوازي الأضلاع يقسمه إلى مثلثين متطابقين.

مثال: $\triangle ABD \cong \triangle CDB$.



سوف تبرهن النظريتين 5.7, 5.8 في السؤالين 26, 28 على الترتيب

مثال 2 خصائص متوازي الأضلاع والجبر



جبر: إذا كان $QRST$ متوازي أضلاع،
فأوجد قيمة كل من المتغيرات الآتية:

a) x

$\overline{QT} \cong \overline{RS}$	كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان
$QT = RS$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$5x = 27$	بالتعويض
$x = 5.4$	بقسمة كلا الطرفين على 5

b) y

$\overline{TP} \cong \overline{PR}$	قطرا متوازي الأضلاع ينصّف كل منهما الآخر
$TP = PR$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$2y - 5 = y + 4$	بالتعويض
$y = 9$	بطرح y وإضافة 5 لكلا الطرفين

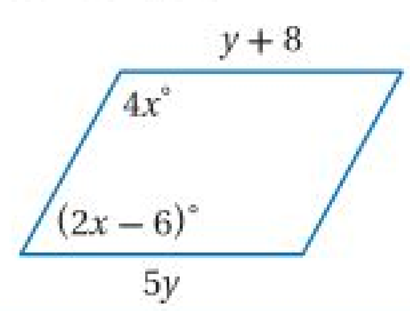
c) z

$\triangle TQS \cong \triangle RSQ$	قطر متوازي الأضلاع يقسمه إلى مثلثين متطابقين
$\angle QST \cong \angle SQR$	العناصر المتناظرة في المثلثات المتطابقة تكون متطابقة
$m\angle QST = m\angle SQR$	تعريف تطابق الزوايا
$3z = 33°$	بالتعويض
$z = 11$	بقسمة كلا الطرفين على 3

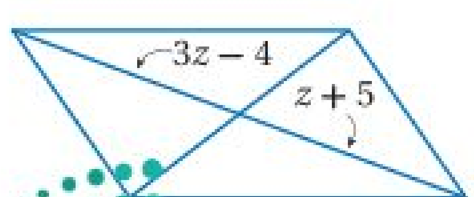
تحقق من فهمك

أوجد قيمة المتغير في كل من متوازيي الأضلاع الآتيين :

2A)



2B)



يمكنك استعمال النظرية 5.7 لتحديد إحداثيات نقطة تقاطع قطري متوازي أضلاع في المستوى الإحداثي إذا عُلمت إحداثيات رؤوسه.

مثال 3 متوازي الأضلاع والهندسة الإحداثية

هندسة إحداثية: **أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square FGHJ$ الذي إحداثيات رؤوسه $F(-2, 4), G(3, 5), H(2, -3), J(-3, -4)$.**

بما أنّ قطري متوازي الأضلاع ينصّف كل منهما الآخر، فإنّ نقطة تقاطعهما هي نقطة منتصف كل من $\overline{GJ}$, $\overline{FH}$. أوجد نقطة منتصف $\overline{FH}$ التي طرفاها $(-2, 4)$, $(2, -3)$.

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{-2 + 2}{2}, \frac{4 + (-3)}{2}\right)$$ صيغة نقطة المنتصف

$$= (0, 0.5)$$ بالتبسيط

إذن إحداثيا نقطة تقاطع قطري $\square FGHJ$ هما $(0, 0.5)$.

تحقق: أوجد نقطة منتصف $\overline{GJ}$ التي طرفاها $(-3, -4)$, $(3, 5)$.

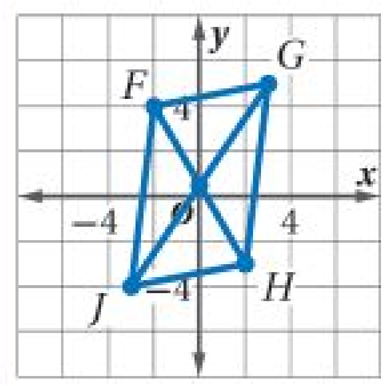
$$\left(\frac{3 + (-3)}{2}, \frac{5 + (-4)}{2}\right) = (0, 0.5) \checkmark$$

تحقق من فهمك

3) **هندسة إحداثية:** أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square RSTU$ الذي رؤوسه $R(-8, -2), S(-6, 7), T(6, 7), U(4, -2)$.

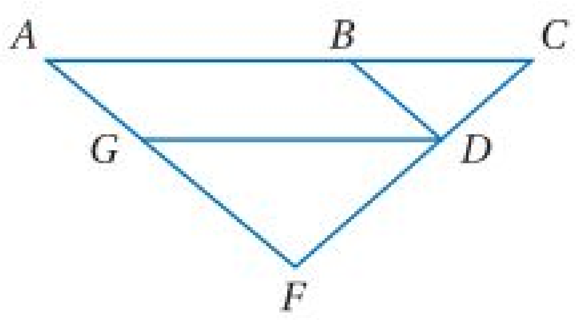
إرشادات للدراسة

التحقق من الإجابة: في المثال 3، مثّل متوازي الأضلاع على المستوى الإحداثي وعيّن نقطة تقاطع القطرين التي أوجدتها. ارسم القطرين لتجد أن نقطة تقاطعهما هي $(0, 0.5)$.



يمكنك استعمال خصائص متوازي الأضلاع وأقطاره لكتابة براهين.

مثال 4 استعمال خصائص متوازي الأضلاع لكتابة براهين



اكتب برهانًا حرًّا.

المعطيات: $\square ABDG, \overline{AF} \cong \overline{CF}$

المطلوب: $\angle BDG \cong \angle C$

البرهان:

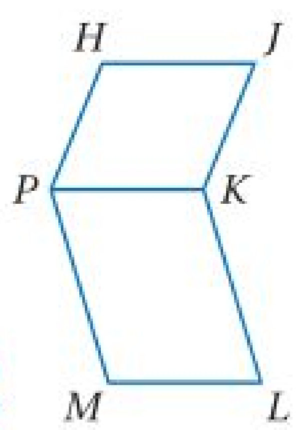
من المعطيات $ABDG$ متوازي أضلاع. وبما أن الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة، فإنّ $\angle BDG \cong \angle A$. ومعطى أيضًا أنّ $\overline{AF} \cong \overline{CF}$. ومن نظريّة المثلث المتطابق الضلعين تكون $\angle A \cong \angle C$. ومن خاصيّة التعدّي للتطابق تكون $\angle BDG \cong \angle C$.

تحقق من فهمك

4) اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\square HJKP , \square PKLM$

المطلوب: $\overline{HJ} \cong \overline{ML}$



تأكـــد

المثال 1

1) **مِلاحة:** يستعمل البحّارة مسطرتين متوازيتين، يصل بينهما ذراعان متساويا الطول لتحديد اتجاه إبحارهم، فيضعون حافة إحدى المسطرتين بمحاذاة مسار الإبحار، ثم يحركون المسطرة الأخرى حتى تصل إلى قرص بوصلة مرسوم على الخريطة. تُشكّل المسطرتان والذراعان الواصلتان بينهما $\square MNPQ$.

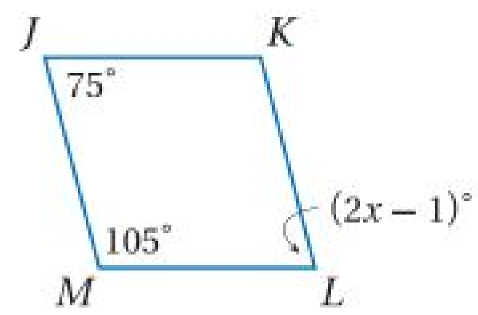
a) إذا كان $MQ = 2\text{in}$ ، فأوجد NP.

b) إذا كان $m\angle NMQ = 38^\circ$ ، فأوجد $m\angle MNP$.

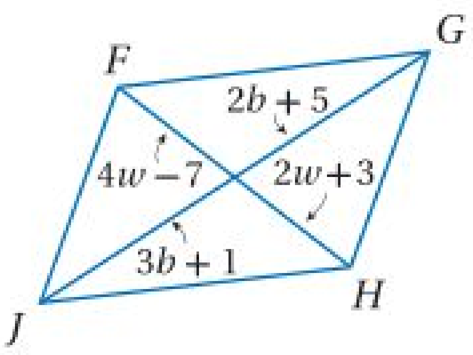
c) إذا كان $m\angle MQP = 128^\circ$ ، فأوجد $m\angle MNP$.

المثال 2 **جبر:** أوجد قيمة المتغير في كل من متوازيي الأضلاع الآتيين :

2)



3)



المثال 3

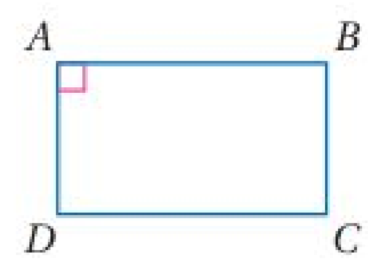
4) **هندسة إحداثيّة:** أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square ABCD$ الذي رؤوسه $A(-4, 6), B(5, 6), C(4, -2), D(-5, -2)$.

المثال 4 **برهان:** اكتب برهانًا من النوع المحدد في كل من السؤالين الآتيين :

5) برهانًا حرًّا.

المعطيات: $ABCD$ متوازي أضلاع، $\angle A$ قائمة.

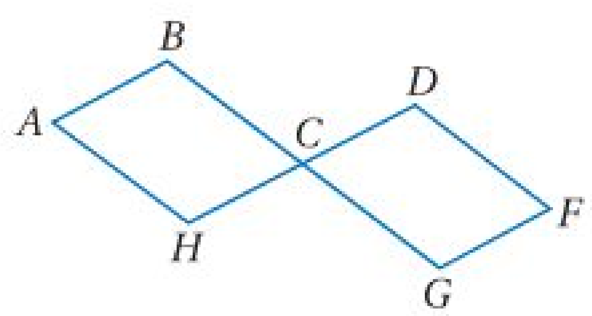
المطلوب: $\angle B, \angle C, \angle D$ قوائم. (النظرية 5.6)



6) برهانًا ذا عمودين.

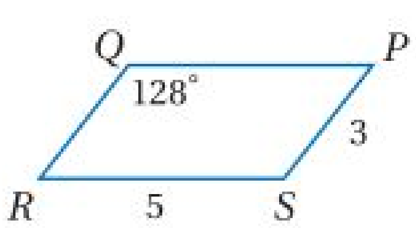
المعطيات: $ABCH$, $DCGF$ متوازيا أضلاع.

المطلوب: $\angle A \cong \angle F$.



تدرب وحل المسائل

المثال 1 استعمل $\square PQRS$ المبيَّن جانبًا لإيجاد كل مما يأتي :



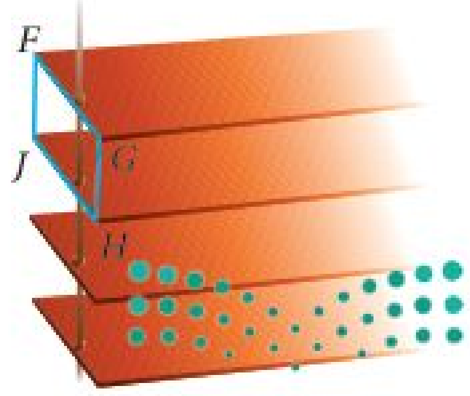
7) $m\angle R$

8) QR

9) QP

10) $m\angle S$

11) **ستائر:** في الشكل المقابل صورة لشرائح ستائر النوافذ المتوازية دائمًا؛ لتسمح بدخول أشعة الشمس. في $\square FGHJ$ ، إذا كان $FJ = \frac{3}{4}\text{ in}, FG = 1\text{ in}, m\angle JHG = 62^\circ$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي :



a) JH

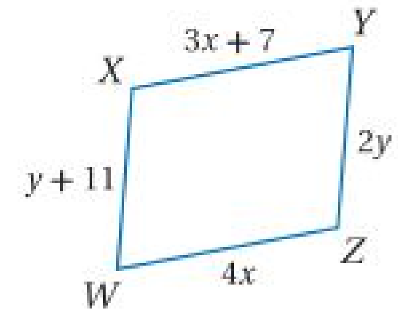
b) GH

c) $m\angle JFG$

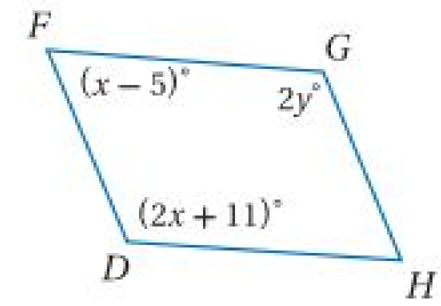
d) $m\angle FJH$

المثال 2 **جبر:** أوجد قيمتي x, y في كل من متوازيات الأضلاع الآتية :

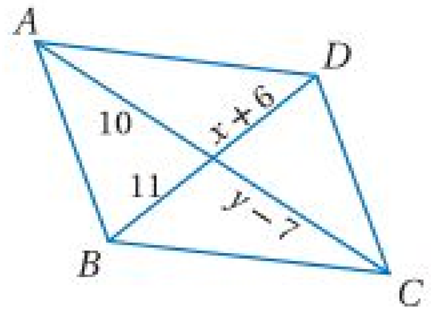
(12



(13



(14



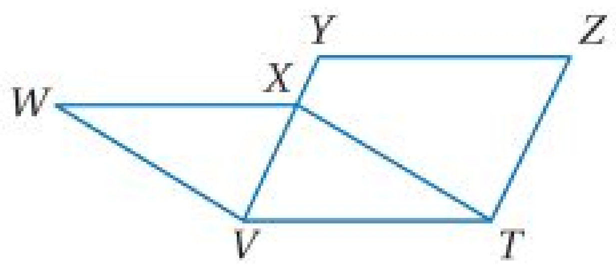
المثال 3 **هندسة إحداثيَة:** أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square WXYZ$ المعطاة رؤوسه في كل من السؤالين الآتيين :

(15 $W(-1, 7), X(8, 7), Y(6, -2), Z(-3, -2)$ **(16** $W(-4, 5), X(5, 7), Y(4, -2), Z(-5, -4)$

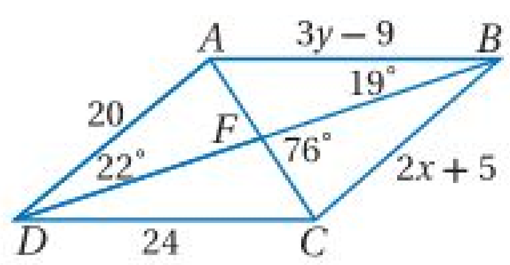
المثال 4 **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين فيما يأتي :

(17 **المعطيات:** $\square WXTV$, $\square ZYVT$

المطلوب: $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$



جبر: استعمل $\square ABCD$ المبيَّن جانبًا لإيجاد كل مما يأتي :



(18 x **(19** y

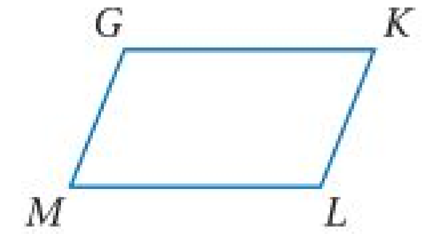
(20 $m\angle AFB$ **(21** $m\angle DAC$

(22 $m\angle ACD$ **(23** $m\angle DAB$

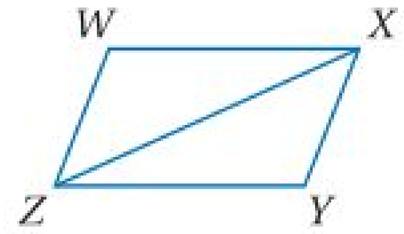
(24 **هندسة إحداثيَة:** إذا كانت $A(-2, 5), B(2, 2), C(4, -4)$ رؤوسًا في $\square ABCD$ ، فأوجد إحداثيات الرأس D. وبرّر إجابتك.

برهان: اكتب برهانًا من النوع المحدد في كل مما يأتي :

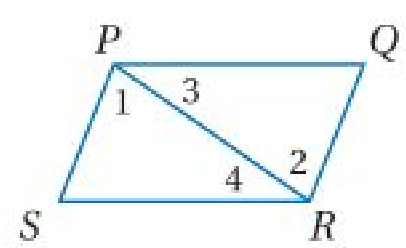
(25 برهانًا ذا عمودين.
المعطيات: $GKLM$ متوازي أضلاع ،
المطلوب: اثبات أن كل زاويتين في الأزواج التالية متكاملتان $\angle G$ و $\angle K$ ، $\angle K$ و $\angle L$ ، $\angle L$ و $\angle M$ ، $\angle M$ و $\angle G$.
(النظرية 5.5)



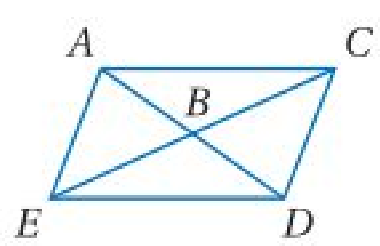
(26 برهانًا ذا عمودين.
المعطيات: $WXYZ$ متوازي أضلاع ،
المطلوب: $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$
(النظرية 5.8)



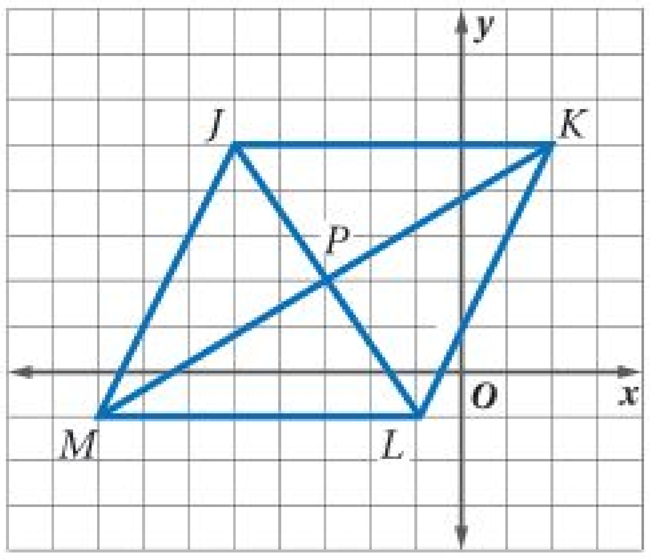
(27 برهانًا ذا عمودين.
المعطيات: $PQRS$ متوازي أضلاع.
المطلوب: $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$, $\overline{QR} \cong \overline{SP}$
(النظرية 5.3)



(28 برهانًا حرًّا.
المعطيات: $ACDE$ متوازي أضلاع.
المطلوب: القطران $\overline{EC}$ ___ وَ $\overline{AD}$ ينصف كلٌّ منهما الآخر.
(النظرية 5.7)



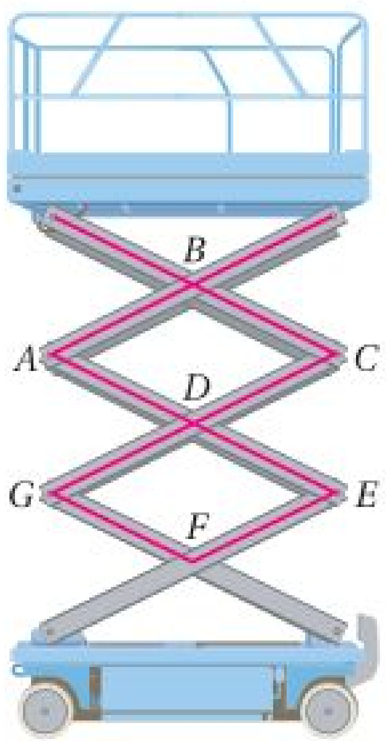
29) **هندسة إحداثيّة:** استعن بالشكل المجاور في كل مما يأتي:



a) استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لتحديد ما إذا كان قطرا $JKLM$ ينصّف كل منهما الآخر. وضّح إجابتك.

b) حدّد ما إذا كان قطرا $JKLM$ متطابقين. وضّح إجابتك.

c) استعمل صيغة الميل لتحديد ما إذا كان كل ضلعين متتاليين متعامدين أم لا. وضّح إجابتك.



30) **رافعات:** في الشكل المجاور: $ABCD$, $GDEF$ متوازيا أضلاع متطابقان.

a) حدِّد الزوايا التي تطابق $\angle A$. وضّح تبريرك.

b) حدِّد القطع المستقيمة التي تطابق $\overline{BC}$. وضّح تبريرك.

c) حدِّد الزوايا المكملة للزاوية C. وضّح تبريرك.

الربط مع الحياة

توفر الرافعات المقصيّة مساحات عمل على ارتفاعات مختلفة تصل إلى $100\,m$.

31) **تمثيلات متعدِّدة:** سوف تستقصي في هذه المسألة اختبارات لتمييز متوازي الأضلاع.

a) **هندسيًّا:** ارسم ثلاثة أزواج من القطع المستقيمة المتطابقة والمتوازية. صِل الأطراف لتكوِّن أشكالًا رباعية، وسمِّها $ABCD, MNOP, WXYZ$. ثم قِس أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا لكل منها.

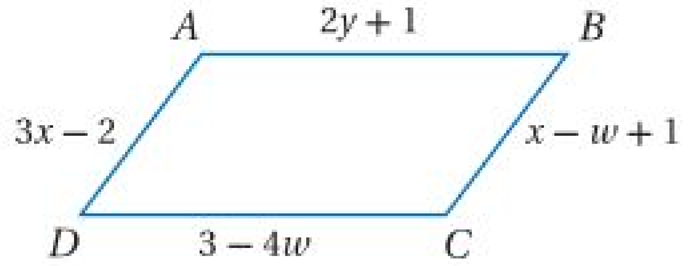
b) **جدوليًّا:** أكمل الجدول الآتي:

الشكل الرباعي	هل الأضلاع المتقابلة متطابقة؟	هل الزوايا المتقابلة متطابقة؟	هل الشكل متوازي أضلاع؟
$ABCD$			
$MNOP$			
$WXYZ$			

c) **لفظيًّا:** ضع تخمينًا حول الأشكال الرباعيّة التي لها ضلعان متطابقان ومتوازيان.

مسائل مهارات التفكير العليا

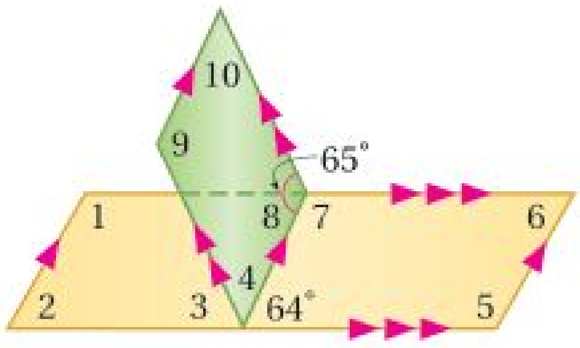
32) **تحدٍّ:** إذا كان محيط $\square ABCD$ في الشكل أدناه يساوي 22 in، فأوجد AB .



33) **اكتب:** هل توجد نظرية $SSSS$ في تطابق متوازيات الأضلاع. برّر إجابتك.

34) **إجابة مفتوحة:** أعطِ مثالًا مضادًّا يبيّن أن متوازيات الأضلاع ذات الأضلاع المتناظرة المتطابقة ليست متطابقة دائمًا.

35) **تبرير:** أوجد $m\angle 1$, $m\angle 10$ في الشكل المجاور. وبرّر إجابتك.



36) **اكتب:** لخّص خصائص أضلاع متوازي الأضلاع وزواياه وأقطاره.

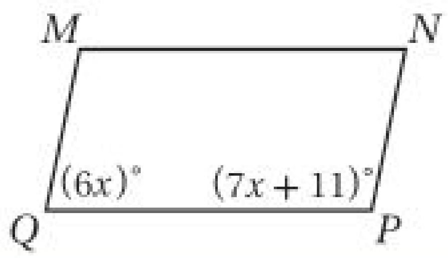
تدريب على اختبار

37) قياسا زاويتين متحالفتين في متوازي أضلاع هما: $3x + 42$, $9x - 18$. ما قياس الزاويتين؟

A 13, 167 **B** 58.5, 31.5

C 39, 141 **D** 81, 99

38) إذا كان $QPNM$ متوازي أضلاع، فما قيمة x؟



مراجعة تراكمية

أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى قياس إحدى زواياه الداخلية في كل مما يأتي: (الدرس 5-1)

39) $108°$ 40) $140°$ 41) $147.3°$

42) $160°$ 43) $135°$ 44) $176.4°$

حدد ما إذا كان المستقيمان متوازيين أو متعامدين، أو غير ذلك في كل مما يأتي: (مهارة سابقة)

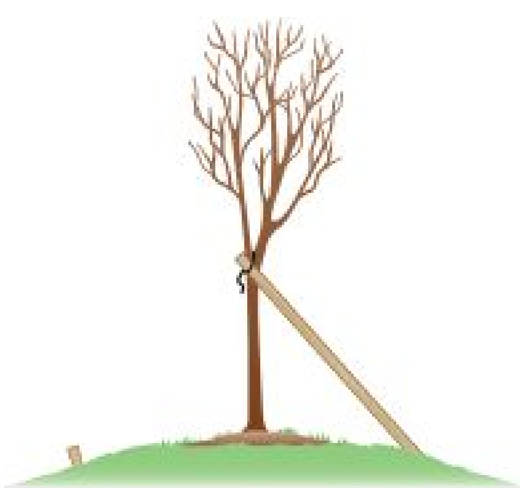
45) $y = -x + 6$
$x + y = 20$

46) $y - 7x = 6$
$7y + x = 8$

47) $3x + 4y = 12$
$6x + 2y = 6$

48) $2x + 5y = -1$
$10y = -4x - 20$

49) **زراعة:** عند زراعة الأشجار، تسند الشجرة بدعامة (على شكل عصا) ترتكز على الأرض وتربط في جذع الشجرة لتثبيتها. استعمل متباينة SAS لتفسير سبب فعالية هذه الطريقة في تثبيت الأشجار المزروعة رأسيًّا. (مهارة سابقة)



استعد للدرس اللاحق

رؤوس شكل رباعي هي $W(3, -1), X(4, 2), Y(-2, 3), Z(-3, 0)$. حدّد ما إذا كانت كل قطعة مستقيمة مما يأتي تمثل ضلعًا أو قطرًا في الشكل الرباعي، وأوجد ميل كل منها.

50) $\overline{YZ}$ 51) $\overline{YW}$ 52) $\overline{ZW}$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

5-3 تمييز متوازي الأضلاع
Distinguishing Parallelogram

فيما سبق:

درستُ خصائص متوازي الأضلاع وطبَّقتها.
(الدرس 5-2)

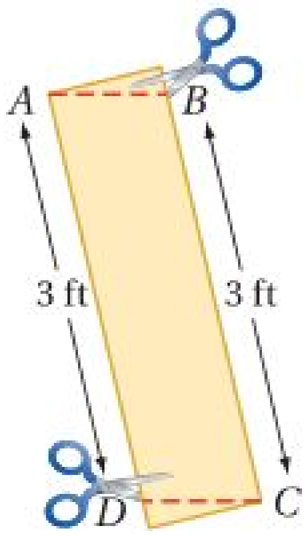
والآن:

- أتعرَّف الشروط التي تؤكد أنَّ شكلًا رباعيًّا متوازي أضلاع وأطبِّقها.
- أُبرهن على أنَّ أربع نقاط في المستوى الإحداثي تشكل رؤوس متوازي أضلاع.

لماذا؟

قصّت فاطمة شرائح ورقية ملونة لتكون خلفية للوحة الرياضيات عند مدخل المدرسة. فسألتها صديقتها: كيف قصصتِ الشرائح دون استعمال المنقلة بحيث كان الضلعان العلوي والسفلي في كل منها متوازيين؟

أجابت فاطمة: بما أن الضلعين الأيمن والأيسر للشريحة متوازيان، فإننا نحتاج فقط التأكد من أن لهما الطول نفسه عند قص الضلعين العلوي والسفلي للشريحة حتى نضمن أن الشرائح سوف تشكل متوازيات أضلاع.



شروط متوازي الأضلاع: في الشكل الرباعي، إذا كان كل ضلعين متقابلين متوازيين، فإنّه متوازي أضلاع بحسب التعريف. ولكن ليس هذا هو الشرط الوحيد الذي يمكن استعماله لتحديد ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

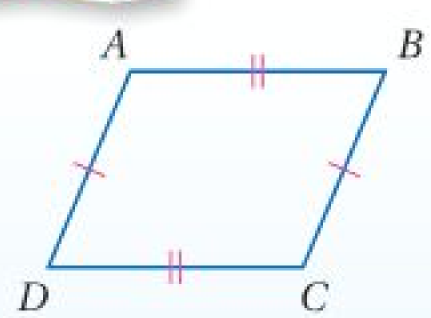
نظريات

شروط متوازي الأضلاع

أضف إلى مطويتك

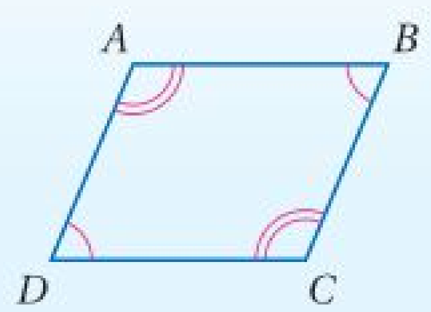
5.9 في الشكل الرباعي، إذا كان كل ضلعين متقابلين متطابقين، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

مثال: إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{DC}, \overline{AD} \cong \overline{BC}$، فإن $ABCD$ متوازي أضلاع.



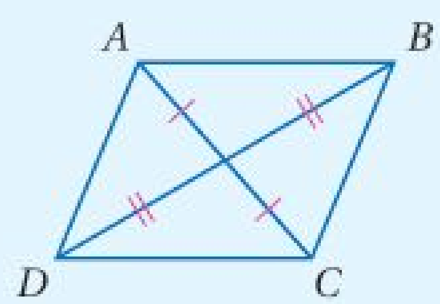
5.10 في الشكل الرباعي، إذا كانت كل زاويتين متقابلتين متطابقتين، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

مثال: إذا كانت $\angle A \cong \angle C, \angle B \cong \angle D$ ، فإنَّ $ABCD$ متوازي أضلاع.



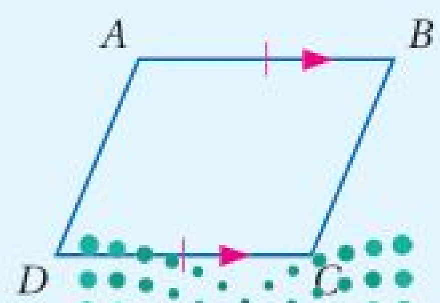
5.11 إذا كان قطرا شكل رباعي ينصّف كل منهما الآخر، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

مثال: إذا كان $\overline{AC}, \overline{DB}$ ينصّف كل منهما الآخر، فإن $ABCD$ متوازي أضلاع.



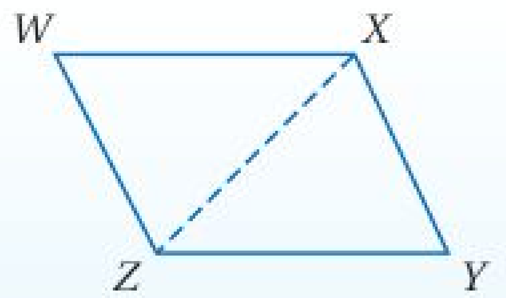
5.12 في الشكل الرباعي، إذا كان فيه ضلعان متقابلان متوازيين ومتطابقين، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

مثال: إذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{DC}, \overline{AB} \cong \overline{DC}$ ، فإنَّ $ABCD$ متوازي أضلاع.



سوف تبرهن النظريتين 5.10, 5.11 في السؤالين 31, 29 على الترتيب، وتبرهن النظرية 5.12 في مثال 5

برهان — نظريّة 5.9



اكتب برهاناً حرًّا للنظريّة 5.9

المعطيات: $\overline{WX} \cong \overline{ZY}, \overline{WZ} \cong \overline{XY}$

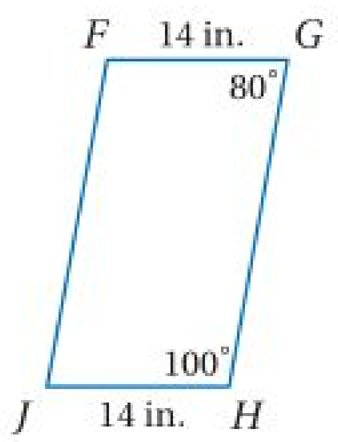
المطلوب: $WXYZ$ متوازي أضلاع.

البرهان:

ارسم قطعة مستقيمة مساعدة $\overline{ZX}$ (قطر $\square WXYZ$)لتشكيل $\triangle ZWX$, $\triangle XYZ$. ومن المعطيات $\overline{WX} \cong \overline{ZY}, \overline{WZ} \cong \overline{XY}$. وكذلك $\overline{ZX} \cong \overline{XZ}$ بحسب خاصيّة الانعكاس للتطابق؛ إذن $\triangle ZWX \cong \triangle XYZ$ بحسب SSS. وبما أن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة، فإنّ $\angle WXZ \cong \angle YZX, \angle WZX \cong \angle YXZ$. وهذا يعني أنّ $\overline{WX} \parallel \overline{ZY}, \overline{WZ} \parallel \overline{XY}$ بحسب عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا. وبما أن الأضلاع المتقابلة في $WXYZ$ متوازية، فإنه متوازي أضلاع بحسب التعريف.

مثال 1 تحديد متوازي الأضلاع

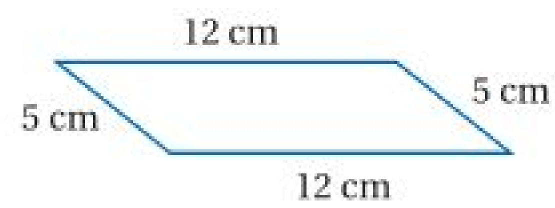
حدد ما إذا كانت المعطيات على الشكل الرباعي المجاور كافية ليكون متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك.



الضلعان المتقابلان $\overline{FG}$, $\overline{JH}$ متطابقان؛ لأنهما متساويان في الطول.
وبما أن $\angle FGH$, $\angle GHJ$ متحالفتان ومتكاملتان، فإنّ $\overline{FG} \parallel \overline{JH}$.
إذن فمن النظرية 5.12، يكون $FGHJ$ متوازي أضلاع.

✓ تحقق من فهمك

1A)

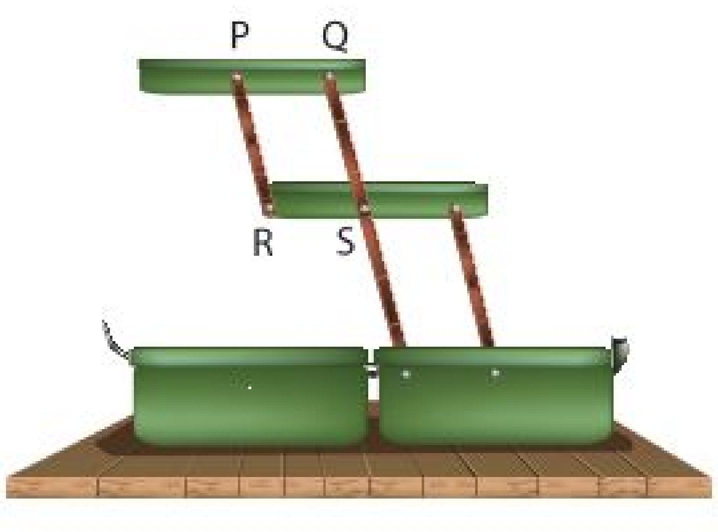


1B)

يمكنك استعمال شروط متوازي الأضلاع لإثبات علاقات من واقع الحياة.

مثال 2 من واقع الحياة — استعمال متوازي الأضلاع لإثبات علاقات

صندوق الأدوات: **في الشكل المجاور، إذا كان $PQ = RS$, $PR = QS$، فبيِّن لماذا تبقى الطبقتان العلوية والوسطى متوازيتين عند أي ارتفاع .**



بما أن كلّ ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي $PQSR$ متطابقان، فإن $PQSR$ متوازي أضلاع بحسب النظرية 5.9.
إذن $\overline{RS} \parallel \overline{PQ}$ ؛ لذا وبغض النظر عن ارتفاع الطبقتين، فستبقيان متوازيتين.

الربط مع الحياة

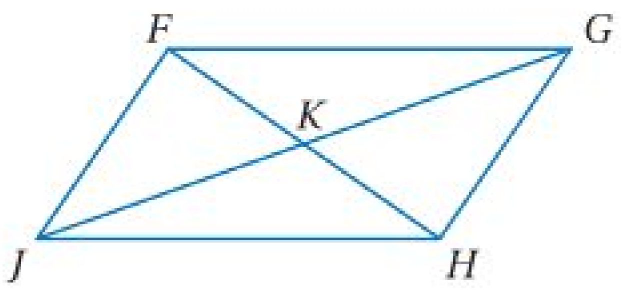
يضع الفنيون أدواتهم في صناديق ذات طبقات متداخلة تسهّل تنظيم الأدوات وتبقيها في متناول أيديهم.

✓ تحقق من فهمك

2) لوحات: عُد إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس، وضّح لماذا يكون خطي القص أعلى وأسفل كل شريحة متوازيين.

يمكنك استعمال الجبر مع شروط متوازي الأضلاع لإيجاد القيم المجهولة التي تجعل شكلًا رباعيًّا متوازي أضلاع.

مثال 3 استعمال متوازي الأضلاع لإيجاد القيم المجهولة



في الشكل المجاور: $FK = 3x - 1, KG = 4y + 3$، $JK = 6y - 2, KH = 2x + 3$. أوجد قيمتي x, y بحيث يكون الشكل الرباعي $FGHJ$ متوازي أضلاع.

بناءً على النظرية 5.11، إذا كان قطرا شكل رباعي ينصّف كل منهما الآخر، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع؛ لذا أوجد قيمة x التي تجعل $\overline{FK} \cong \overline{KH}$ ؛ وقيمة y التي تجعل $\overline{JK} \cong \overline{KG}$.

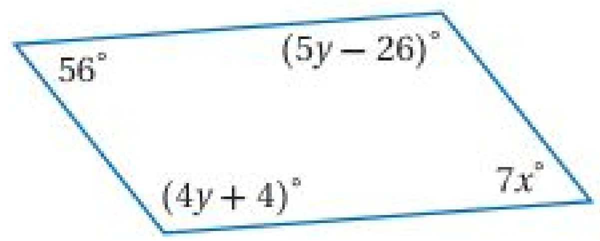
$FK = KH$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$3x - 1 = 2x + 3$	بالتعويض
$x - 1 = 3$	بطرح $2x$ من كلا الطرفين
$x = 4$	بإضافة 1 إلى كلا الطرفين
$JK = KG$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$6y - 2 = 4y + 3$	بالتعويض
$2y - 2 = 3$	بطرح $4y$ من كلا الطرفين
$2y = 5$	بإضافة 2 إلى كلا الطرفين
$y = 2.5$	بقسمة كلا الطرفين على 2

إذن عندما تكون $x = 4, y = 2.5$، يكون الشكل الرباعي $FGHJ$ متوازي أضلاع.

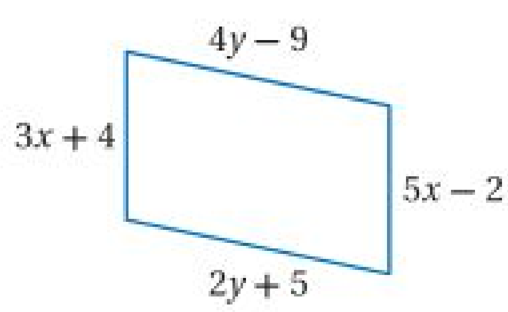
تحقق من فهمك

أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

3A)



3B)



تنبيه !

متوازي الأضلاع: في المثال 3، إذا كانت x تساوي 4، فإن y يجب أن تساوي 2.5 حتى يكون الشكل الرباعي $FGHJ$ متوازي أضلاع. وهذا يعني أنه إذا كانت x تساوي 4 و y تساوي 1 مثلًا، فلن يكون $FGHJ$ متوازي أضلاع.

تعرفت شروط متوازي الأضلاع، وفيما يأتي ملخّص يوضح كيفيّة استعمال هذه الشروط لإثبات أنّ شكلًا رباعيًّا يمثّل متوازي أضلاع.

ملخص المفهوم إثبات أنّ شكلًا رباعيًّا يمثّل متوازي أضلاع

أضف إلى مطويتك

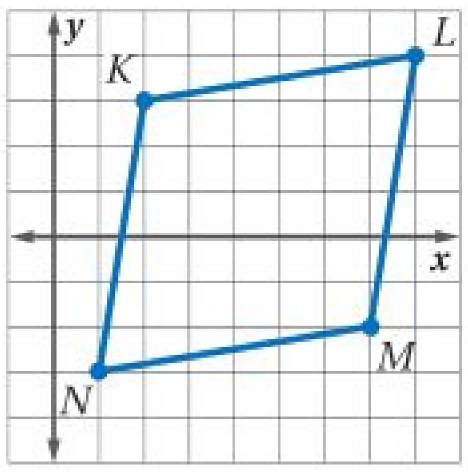
يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا حقّق أيًّا من الشروط الآتية:

1) إذا كان كل ضلعين متقابلين فيه متوازيين. (التعريف)
2) إذا كان كل ضلعين متقابلين فيه متطابقين. (النظرية 5.9)
3) إذا كانت كل زاويتين متقابلتين فيه متطابقتين. (النظرية 5.10)
4) إذا كان قطراه ينصّف كل منهما الآخر. (النظرية 5.11)
5) إذا كان فيه ضلعان متقابلان متوازيين ومتطابقين. (النظرية 5.12)

متوازي الأضلاع في المستوى الإحداثي: يمكننا استعمال صيغ المسافة بين نقطتين والميل ونقطة المنتصف لتحديد ما إذا كان الشكل الرباعي في المستوى الإحداثي متوازي أضلاع أم لا.

مثال 4 متوازي الأضلاع والهندسة الإحداثيّة

هندسة إحداثية: **مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي $KLMN$ الذي رؤوسه $K(2, 3), L(8, 4), M(7, -2), N(1, -3)$. وحدّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك باستعمال صيغة الميل.**



إذا كانت الأضلاع المتقابلة في الشكل الرباعي متوازية فإنه متوازي أضلاع.

ميل $\overline{KL}$: $\frac{4-3}{8-2} = \frac{1}{6}$

ميل $\overline{NM}$: $\frac{-2-(-3)}{7-1} = \frac{1}{6}$

ميل $\overline{KN}$: $\frac{-3-3}{1-2} = \frac{-6}{-1} = 6$

ميل $\overline{LM}$: $\frac{-2-4}{7-8} = \frac{-6}{-1} = 6$

بما أنّ الأضلاع المتقابلة لها الميل نفسه، فإنّ $\overline{KN} \parallel \overline{LM}$, $\overline{NM} \parallel \overline{KL}$.

لذا فالشكل الرباعي $KLMN$ متوازي أضلاع بحسب التعريف.

تحقق من فهمك

مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي الذي أعطيت إحداثيات رؤوسه فيما يأتي. وحدِّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا. برِّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال:

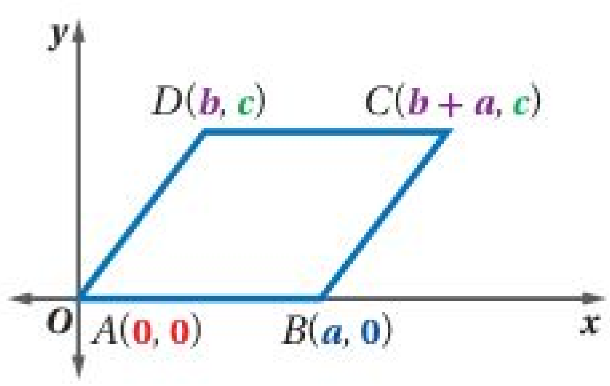
4A) $A(3, 3), B(8, 2), C(6, -1), D(1, 0)$ ، صيغة المسافة.

4B) $F(-2, 4), G(4, 2), H(4, -2), J(-2, -1)$ ، صيغة نقطة المنتصف.

درست سابقًا، أنّه يمكن التعبير عن إحداثيات رؤوس المثلثات بمتغيرات. ثم استعمال صيغ المسافة بين نقطتين والميل ونقطة المنتصف لكتابة براهين إحداثيّة للنظريات. ويمكن عمل الشيء نفسه مع الأشكال الرباعيّة.

مثال 5 متوازي الأضلاع والبرهان الإحداثي

اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة الآتية :



في الشكل الرباعي، إذا كان فيه ضلعان متقابلان متوازيين ومتطابقين، فإنّ الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

الخطوة 1: ارسم الشكل الرباعي $ABCD$ في المستوى الإحداثي على أن يكون $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $\overline{AB} \cong \overline{DC}$.

- عيّن الرأس A عند النقطة $(0, 0)$.
- افترض أن طول $\overline{AB}$ يساوي a وحدة. فيكون إحداثيا B هما $(a, 0)$.
- بما أنّ القطع المستقيمة الأفقيّة متوازية دائمًا، فعيّن نقطتي طرفي $\overline{DC}$ على أن يكون لهما الإحداثي y نفسه وليكن c.
- بما أن المسافة من D إلى C تساوي أيضًا a وحدة، وبفرض أنّ الإحداثي x للنقطة D يساوي b ، يكون الإحداثي x للنقطة C يساوي $b + a$.

إرشادات للدراسة

صيغة نقطة المنتصف: لبيان أنّ شكلًا رباعيًّا يمثّل متوازي أضلاع، يمكنك استعمال صيغة نقطة المنتصف، فإذا كانت نقطتا المنتصف للقطرين متساويتين، فإنّ القطرين ينصّف كل منهما الآخر.

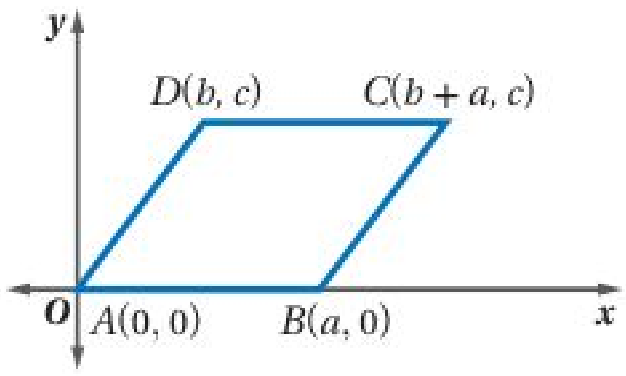
مراجعة المفردات

البرهان الإحداثي: هو برهان تُستعمل فيه أشكال في المستوى الإحداثي والجبر لإثبات مفاهيم هندسيّة.

تاريخ الرياضيات

رينيه ديكارت
(1596 - 1650م)
عالم رياضيات فرنسي، وهو أول من استعمل المستوى الإحداثي . وقيل إنّه فكّر أولًا بربط كل موقع في مستوى مع زوج من الأعداد.

الخطوة 2: استعمل الشكل الذي رسمته لكتابة برهان.



المعطيات: $ABCD$ شكل رباعي فيه $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $\overline{AB} \cong \overline{DC}$

المطلوب: $ABCD$ متوازي أضلاع.

برهان إحداثي:

من التعريف يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كانت أضلاعه المتقابلة متوازية.

ومن المعطيات $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. يبقى أن نثبت أن $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

استعمل صيغة الميل.

ميل $\overline{AD}$: $\frac{c-0}{b-0} = \frac{c}{b}$ ميل $\overline{BC}$: $\frac{c-0}{b+a-a} = \frac{c}{b}$

وبما أن $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ لهما الميل نفسه، فإنّ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ؛ لذا فالشكل الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع؛ لأن كل ضلعين متقابلين فيه متوازيان.

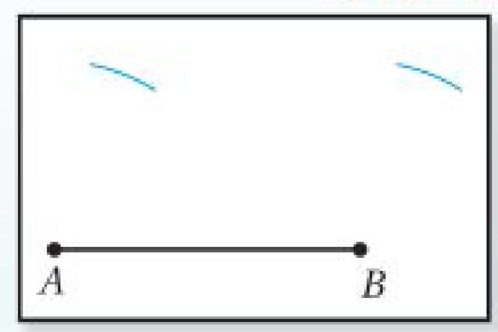
تحقق من فهمك

5) اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة الآتية: إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع فإنّ أضلاعه المتقابلة متطابقة.

إنشاءات هندسية

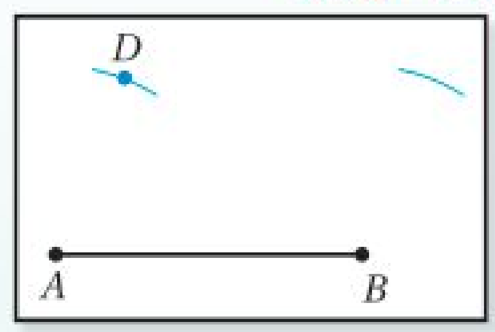
رسم متوازي أضلاع عُلم طولا ضلعين متتاليين فيه.

الخطوة 1:



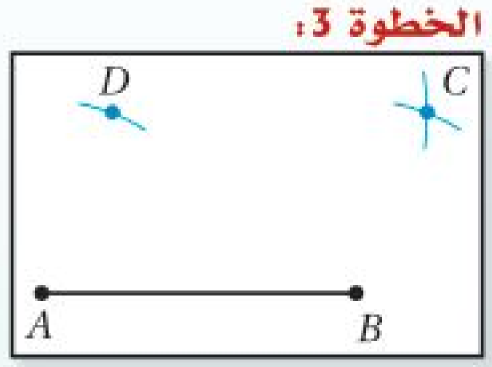
استعمل المسطرة لرسم $\overline{AB}$. ثم افتح الفرجار، وثبّته عند النقطة A، وارسم قوسًا فوقها. ثبّت الفرجار عند النقطة B، وبفتحة الفرجار نفسها ارسم قوسًا فوق B.

الخطوة 2:



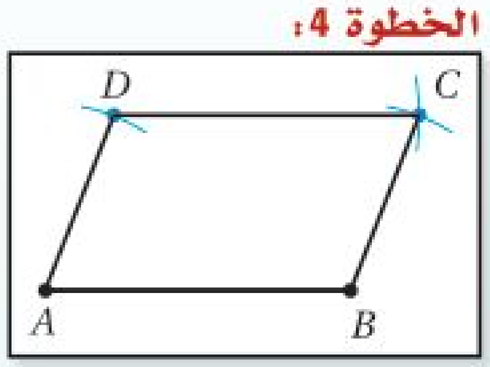
اختر نقطة على القوس الذي فوق A وسمِّها D.

الخطوة 3:



افتح الفرجار فتحة مساوية لِـ $\overline{AB}$، وثبّته عند النقطة D وارسم قوسًا يقطع القوس المرسوم من النقطة B، سمِّ نقطة التقاطع C.

الخطوة 4:

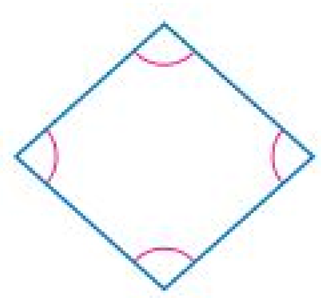


استعمل حافة المسطرة لرسم $\overline{AD}, \overline{BC}, \overline{CD}$.

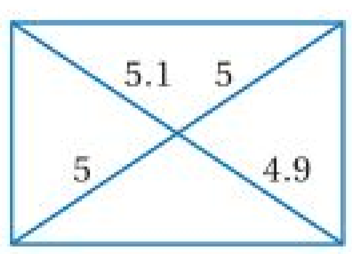
تأكـد

المثال 1 **حدّد ما إذا كان كل شكل رباعي فيما يأتي متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك.**

(1

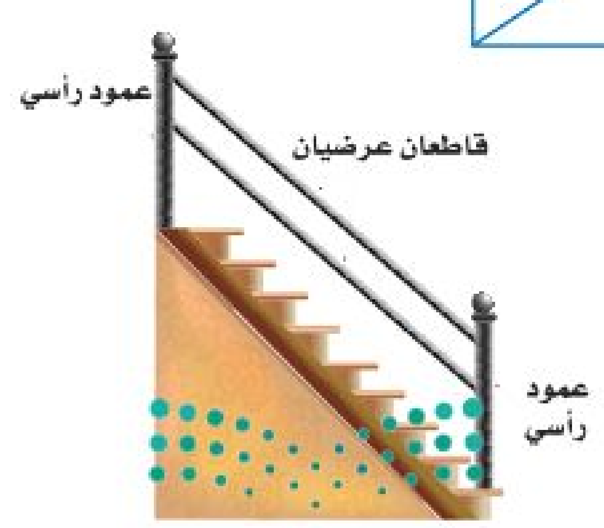


(2

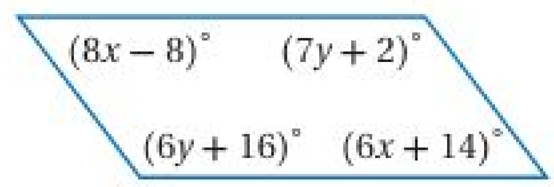


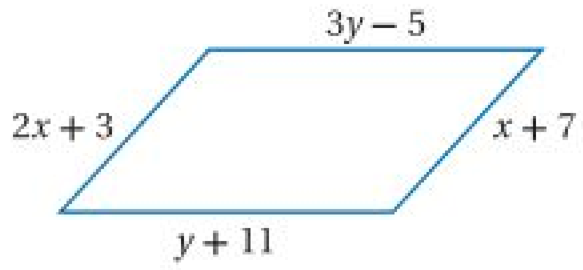
المثال 2

3) نجارة: صنع نجار درابزينًا لدَرَج يتكوّن من عمودين رأسيين؛ الأول مثبت فوق الدرجة الأولى، والثاني مثبت فوق الدرجة الأخيرة، ويصل بينهما قاطعان خشبيان كما في الشكل المجاور. كيف يمكن للنجار التحقق من أن القاطعين الخشبيين العرضيين متوازيان، وذلك بأقل عدد من مرات القياس، إذا علمت بأن الدرجتين الأولى والأخيرة مستويتان مع الأرض.



المثال 3 **جبر:** أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

(4


(5


المثال 4 **هندسة إحداثيّة:** مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه فيما يأتي. وحدّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا، برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحدّدة في السؤال.

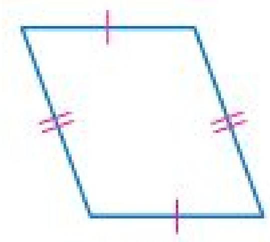
(6 $A(-2, 4), B(5, 4), C(8, -1), D(-1, -1)$، صيغة الميل.

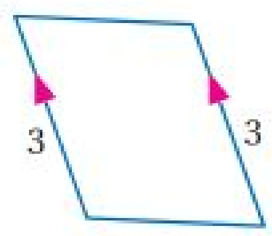
(7 $W(-5, 4), X(3, 4), Y(1, -3), Z(-7, -3)$، صيغة نقطة المنتصف.

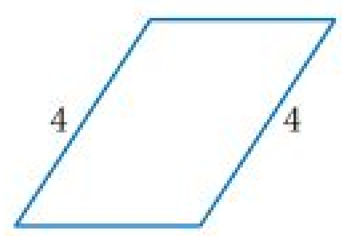
المثال 5 (8 اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة الآتية: إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع، فإنّ قطريه ينصّف كل منهما الآخر.

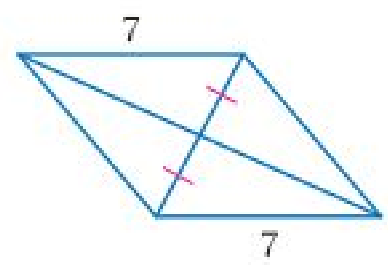
تدرب وحل المسائل

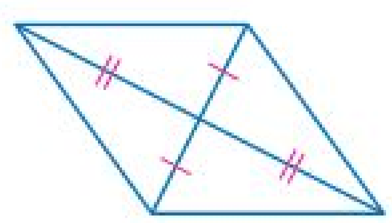
المثال 1 حدّد ما إذا كانت المعطيات في كل مما يأتي كافية ليكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك.

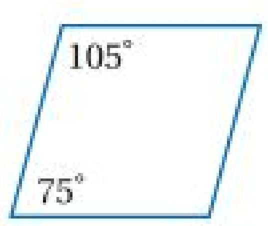
(9


(10


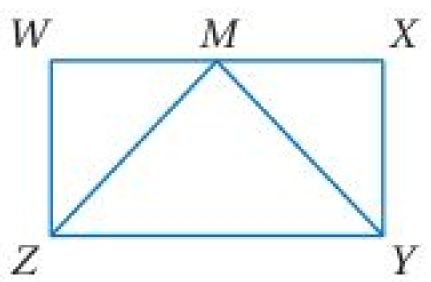
(11


(12


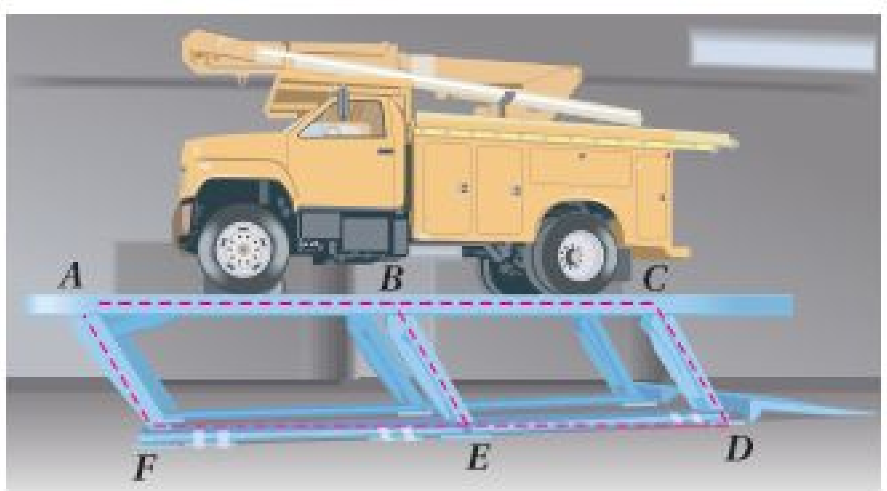
(13


(14


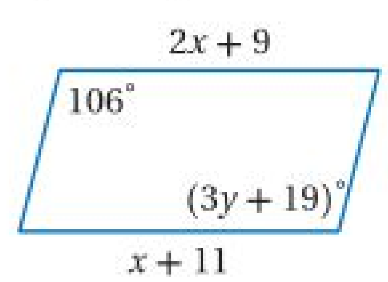
المثال 2 (15 **برهان:** إذا كان $WXYZ$ متوازي أضلاع، حيث $\angle W \cong \angle X$، M نقطة منتصف $\overline{WX}$، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن $\triangle ZMY$ متطابق الضلعين.

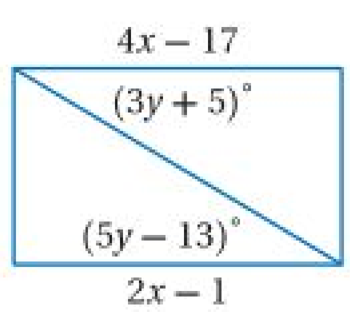


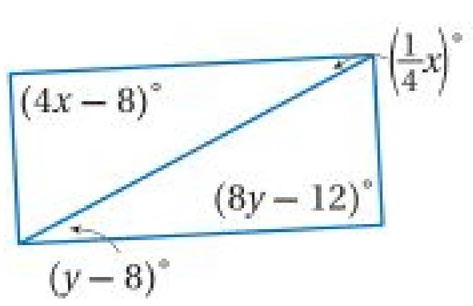
(16 **رافعات:** تستعمل رافعات متوازيات الأضلاع لرفع المركبات الثقيلة عند صيانتها. ففي الشكل أدناه: $ABEF, BCDE$ متوازيا أضلاع. اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن $ACDF$ متوازي أضلاع أيضًا.

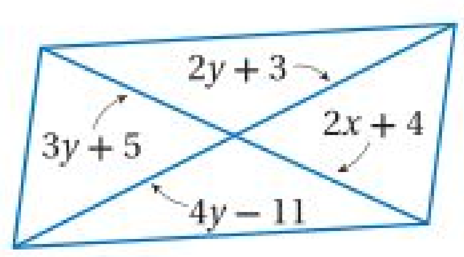


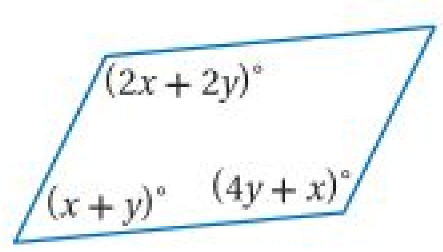
المثال 3 **جبر:** أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

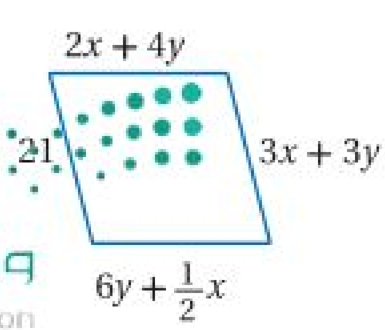
(17


(18


(19


(20


(21


(22


المثال 4 **هندسة إحداثيّة:** مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه فيما يأتي. وحدّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا، برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحدّدة في السؤال.

23) $A(-3, 4)$، $B(4, 5)$، $C(5, -1)$، $D(-2, -2)$ ، صيغة الميل.

24) $J(-4, -4)$، $K(-3, 1)$، $L(4, 3)$، $M(3, -3)$ ، صيغة المسافة بين نقطتين.

25) $V(3, 5)$، $W(1, -2)$، $X(-6, 2)$، $Y(-4, 7)$ ، صيغة الميل.

26) $Q(2, -4)$، $R(4, 3)$، $S(-3, 6)$، $T(-5, -1)$ ، صيغتا الميل والمسافة بين نقطتين.

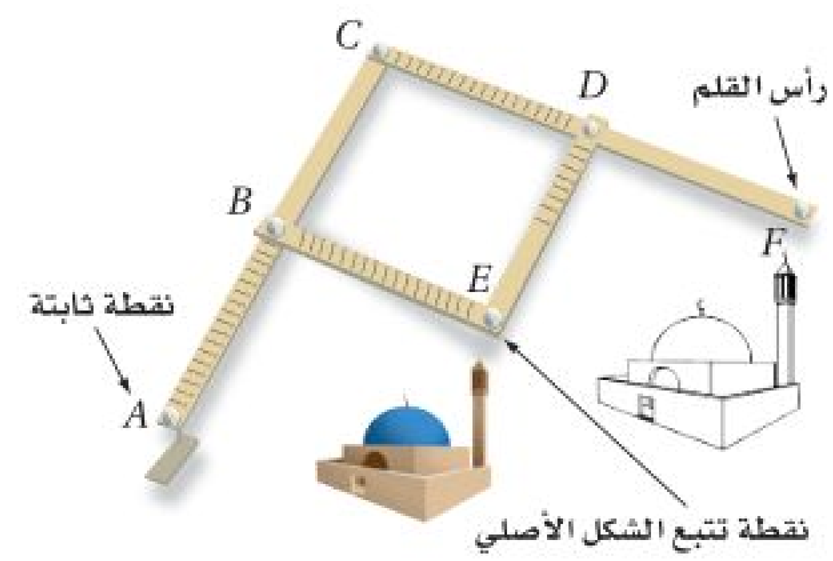
المثال 5

27) اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة: إذا كان كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي متطابقين، فإنه متوازي أضلاع.

28) اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة: إذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع قائمة، فإنّ جميع زواياه قوائم.

29) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 5.10.

30) **المِنْسَاخ:** استعن بمعلومات الربط مع الحياة إلى اليمين والشكل أدناه.



الربط مع الحياة

المِنْسَاخ هو أداة هندسية تستعمل لنسخ صورة أو مخطط وفق مقياس رسم معين.

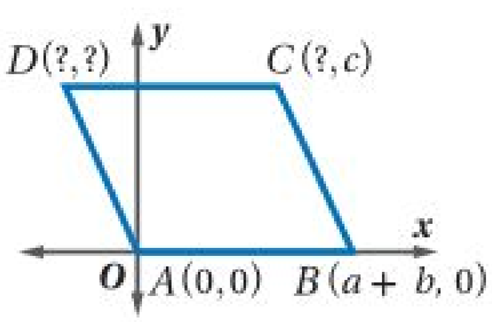
a) إذا كان $\overline{AC} \cong \overline{CF}$, $\overline{AB} \cong \overline{CD} \cong \overline{BE}$, $\overline{DF} \cong \overline{DE}$، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أنّ $\overline{CD} \parallel \overline{BE}$.

b) مقياس الرسم للشكل المنسوخ بالنسبة للشكل الأصلي هو نسبة CF إلى BE،
فإذا كان $AB = 12\,\text{in}, DF = 8\text{in}$ ، وطول الشكل الأصلي $1.5\,\text{in}$، فما طول صورة الشكل المنسوخ؟

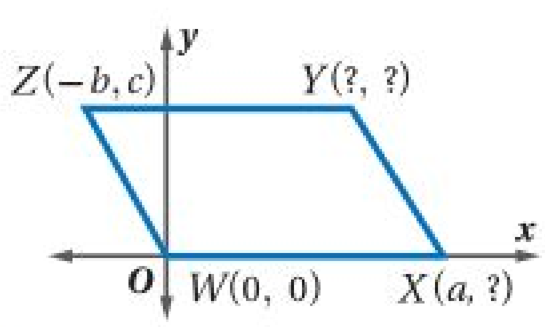
31) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 5.11

أوجد الإحداثيات المجهولة لرؤوس كل من متوازيي الأضلاع الآتيين:

32)



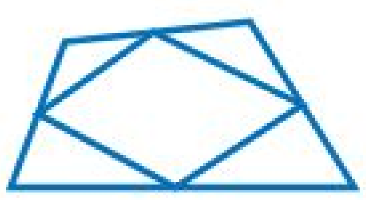
33)



مراجعة المفردات

مقياس الرسم: هو نسبة تستعمل لتمثيل الأشياء التي تكون كبيرة جدًّا أو صغيرة جدًّا عندما ترسم بحجمها الحقيقي. ويعطي المقياس نسبة تقارن بين قياسات الرسم أو النموذج وقياسات الأشياء الحقيقية.

34) **برهان:** اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن القطع المستقيمة الواصلة بين منتصفات أضلاع أي شكل رباعي تشكّل متوازي أضلاع.



35) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة سوف تستقصي إحدى خصائص المستطيل.

a) **هندسيًّا:** ارسم ثلاثة مستطيلات بأبعاد مختلفة وسمِّها $ABCD, MNOP, WXYZ$، ثم ارسم قطري كل منها.

b) قِس طولي قطري كل مستطيل، ثم أكمل الجدول المجاور.

c) **لفظيًّا:** اكتب تخمينًا حول قطري المستطيل.

المستطيل	القطر	الطول
$ABCD$	$\overline{AC}$	
	$\overline{BD}$	
$MNOP$	$\overline{MO}$	
	$\overline{NP}$	
$WXYZ$	$\overline{WY}$	
	$\overline{XZ}$	

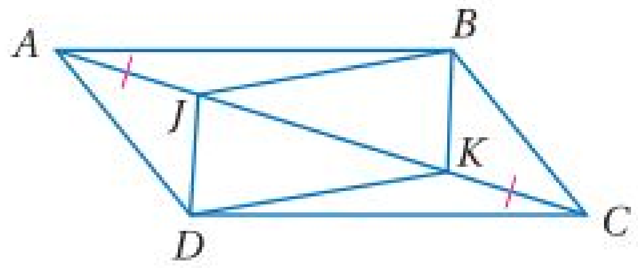
مسائل مهارات التفكير العليا

36) **تحدٍّ:** يتقاطع قطرا متوازي أضلاع عند النقطة $(1, 0)$. ويقع أحد رؤوسه عند النقطة $(4, 2)$، بينما يقع رأس آخر عند النقطة $(1, 3)$. أوجد موقعي الرأسين الآخرين.

37) **اكتب:** بيِّن أوجه الشبه والاختلاف بين النظريتين 5.9 و 5.3 .

38) **تبرير:** إذا كانت الزوايا المتناظرة في متوازيي أضلاع متطابقة، فهل يكون متوازيا الأضلاع متطابقين أحيانًا، أم دائمًا، أم لا يكونان متطابقين أبدًا؟

39) **تحدٍّ:** في الشكل المجاور، $ABCD$ متوازي أضلاع، $\overline{AJ} \cong \overline{KC}$. بيّن أن الشكل الرباعي $JBKD$ متوازي أضلاع.



40) **اكتب:** استعمل العبارات الشرطية الثنائية "إذا وفقط إذا" في دمج كل من النظريات: 5.9 وَ 5.10 وَ 5.11 وَ 5.12 وعكسها.

تدريب على اختبار

41) إذا كان الضلعان $\overline{AB}, \overline{DC}$ في الشكل الرباعي $ABCD$ متوازيين، فأيّ المعطيات الآتية كافية لإثبات أنّ $ABCD$ متوازي أضلاع؟

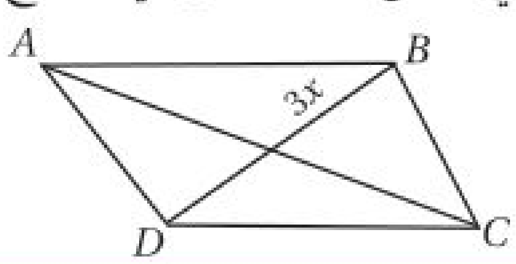
A $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

B $\overline{AB} \cong \overline{DC}$

C $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

D $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

42) **إجابة قصيرة:** في الشكل الرباعي $ABCD$ أدناه، إذا كان $\overline{AC}$ تنصّف $\overline{BD}$ ، $AC = 40, BD = \frac{3}{5} AC$ ، فما قيمة x التي تجعل $ABCD$ متوازي أضلاع؟



مراجعة تراكمية

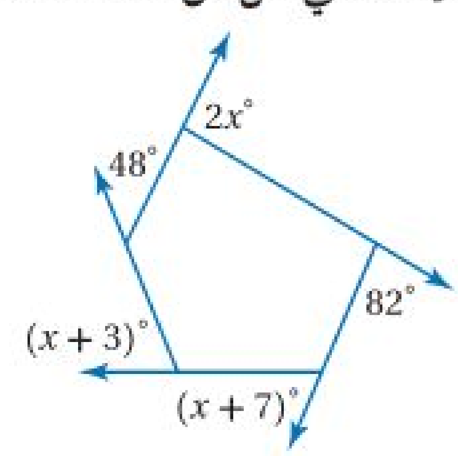
هندسة إحداثيّة: أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع $ABCD$ في كل من السؤالين الآتيين (الدرس 5-2)

43) $A(-3, 5), B(6, 5), C(5, -4), D(-4, -4)$

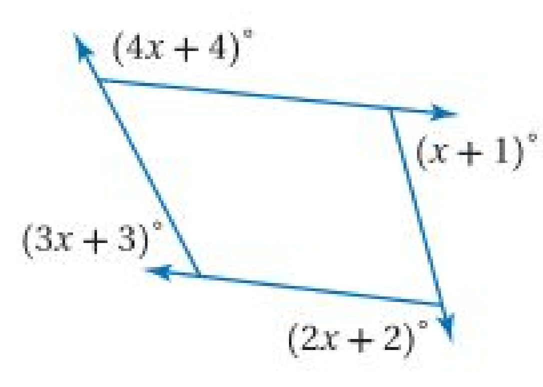
44) $A(2, 5), B(10, 7), C(7, -2), D(-1, -4)$

أوجد قيمة x في كل من الأسئلة الآتية : (الدرس 5-1)

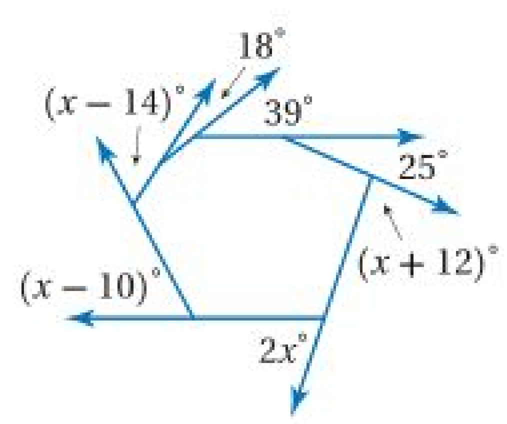
45)



46)



47)



أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى قياس إحدى زواياه الداخلية في كل مما يأتي: (الدرس 5-1)

48) $140°$

49) $160°$

50) $168°$

51) $162°$

استعد للدرس اللاحق

استعمل الميل لتحديد ما إذا كان $\overline{XY}, \overline{YZ}$ متعامدتين أم لا في كل مما يأتي:

52) $X(-2, 2), Y(0, 1), Z(4, 1)$

53) $X(4, 1), Y(5, 3), Z(6, 2)$

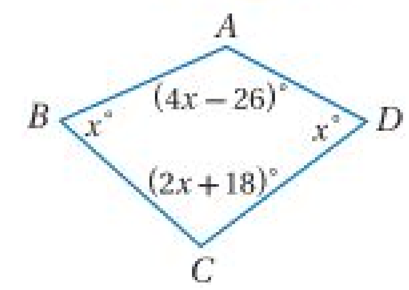
اختبار منتصف الفصل

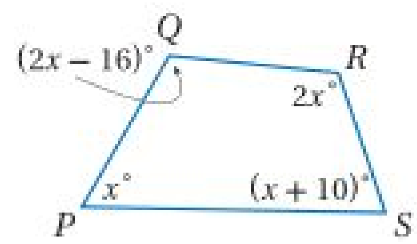
الدروس 1-5 إلى 3-5

أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة في كل من المضلعات المحدبة الآتية : (الدرس 1-5)

1) الخماسي
2) السباعي
3) ذو 18 ضلعًا
4) ذو 23 ضلعًا

أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية في كل من المضلعين الآتيين: (الدرس 1-5)

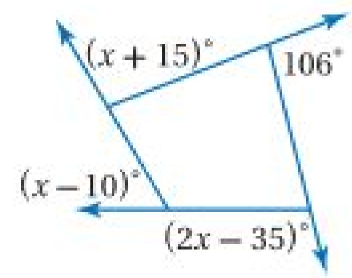
5) 

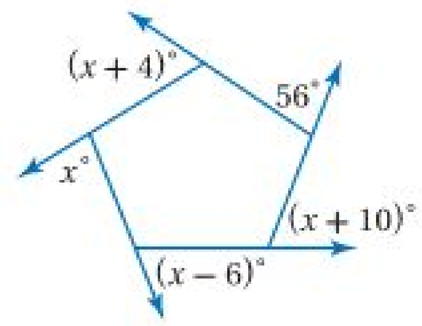
6) 

أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى مجموع قياسات زواياه الداخلية في كل مما يأتي : (الدرس 1-5)

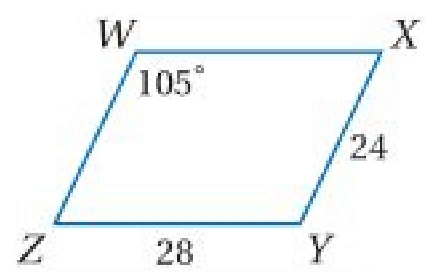
7) 720°
8) 1260°
9) 1800°
10) 4500°

أوجد قيمة x في كل من الشكلين الآتيين : (الدرس 1-5)

11) 

12) 

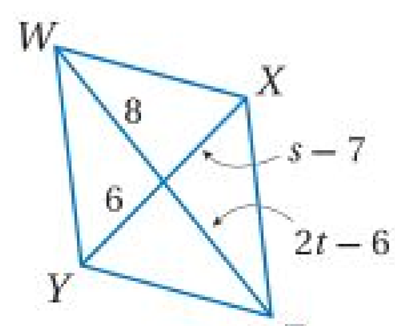
استعمل $\square WXYZ$ لإيجاد كل مما يأتي : (الدرس 2-5)

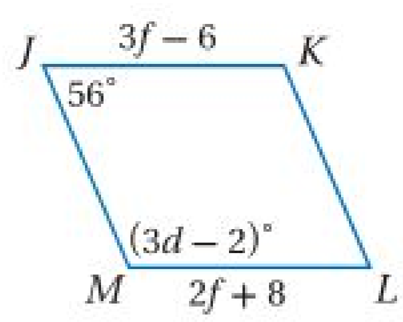


13) $m\angle WZY$
14) WZ
15) $m\angle XYZ$

16) **إنارة:** استعمل مقبض الإنارة العلوي الذي يشكل متوازي أضلاع في إيجاد $m\angle p$ في $\square PQRS$. (الدرس 2-5)

جبر: أوجد قيم المتغيرات في كل من متوازيي الأضلاع الآتيين : (الدرس 2-5)

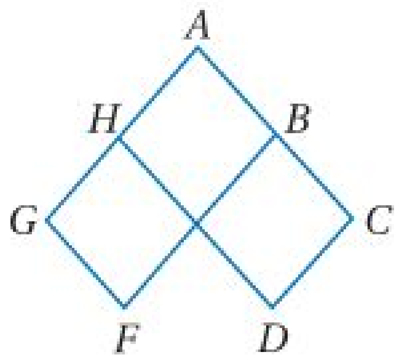
17) 

18) 

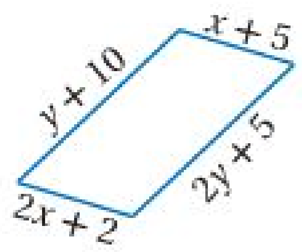
19) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين. (الدرس 2-5)

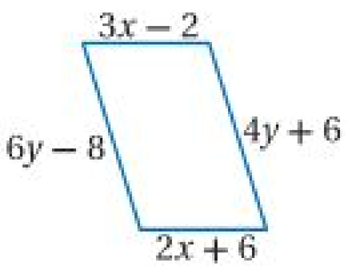
المعطيات: $\square GFBA$, $\square HACD$

المطلوب: $\angle F \cong \angle D$



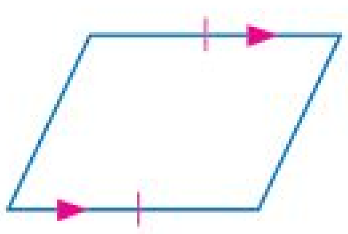
أوجد قيمتي x , y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع : (الدرس 3-5)

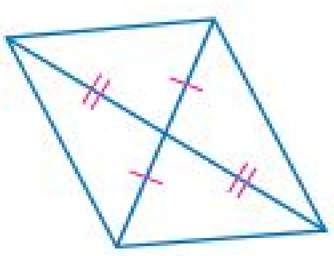
20) 

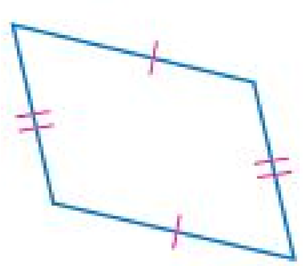
21) 

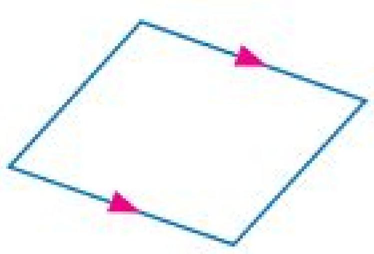
22) **طاولات:** لماذا يبقى سطح طاولة كي الثياب في الصورة أدناه موازيًا لأرضية الغرفة دائمًا؟ (الدرس 3-5)

23) **اختيار من متعدد:** أيّ الأشكال الرباعية الآتية ليس متوازي أضلاع؟ (الدرس 3-5)

A 

C 

B 

D 

هندسة إحداثيّة: حدِّد ما إذا كان الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي متوازي أضلاع. برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال. (الدرس 3-5)

24) $A(-6, -5), B(-1, -4), C(0, -1), D(-5, -2)$، صيغة المسافة بين نقطتين.

25) $Q(-5, 2), R(-3, -6), S(2, 2), T(-1, 6)$، صيغة الميل.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-5 المستطيل
Rectangle

فيما سبق:

درستُ استعمال خصائص متوازي الأضلاع وتحديد ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

(الدرس 2-5)

والآن:

- أتعرّف خصائص المستطيل وأطبّقها.
- أحدّد ما إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلًا.

المفردات:

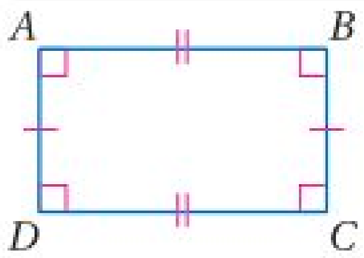
المستطيل
rectangle

لماذا؟

أحمد هو الطالب المسؤول عن عرض لوحات الرياضيات في يوم النشاط المدرسي. ولعمل خلفية مميزة يعرض عليها لوحات الرياضيات، قام بطلاء جزء من جدار على شكل مستطيل يبدأ طوله من أسفل الجدار ويمتد للأعلى، وكان طوله 80 in، وعرضه 36 in. كيف يمكنه أن يتحقق من أنّ الجزء الذي قام بطلائه مستطيل؟

خصائص المستطيل: **المستطيل** هو متوازي أضلاع زواياه الأربع قوائم. ونجد من ذلك أنّ للمستطيل الخصائص الآتية:

- الزوايا الأربع قوائم.
- كل ضلعين متقابلين متوازيان ومتطابقان.
- كل زاويتين متقابلتين متطابقتان.
- كل زاويتين متحالفتين متكاملتان.
- القطران ينصِّف كل منهما الآخر.



المستطيل $ABCD$

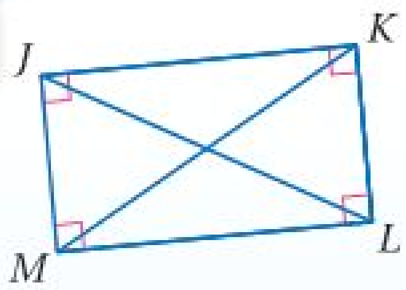
وبالإضافة إلى ذلك، قطرا المستطيل متطابقان، كما توضح النظرية الآتية:

نظرية 5.13 قطرا المستطيل

أضف إلى مطويتك

إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلًا، فإن قطريه متطابقان.

مثال: إذا كان $\square JKLM$ مستطيلًا، فإنّ $\overline{JL} \cong \overline{MK}$.



سوف تبرهن النظرية 5.13 في السؤال 33.

مثال 1 من واقع الحياة استعمال خصائص المستطيل

حدائق: حديقة مستطيلة الشكل تحتوي على ممرين كما في الشكل المجاور. إذا كان $PR = 200\ m$، فأوجد QT.

$\overline{QS} \cong \overline{PR}$	قطرا المستطيل متطابقان
$QS = PR$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$QS = 200$	بالتعويض

وبما أن $PQRS$ مستطيل، لذا فإن قطريه ينصِّف كل منهما الآخر؛ لذا

$$QT = \frac{1}{2} QS$$

$$QT = \frac{1}{2}(200) = 100 \quad \text{بالتعويض}$$

تحقق من فهمك

استعن بالشكل في المثال 1.

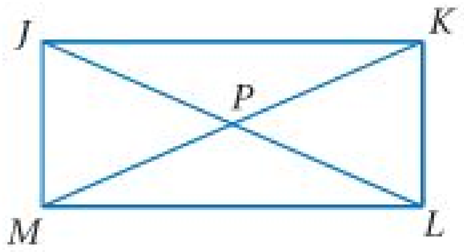
1A) إذا كان $TS = 120$، فأوجد PR.

1B) إذا كان $m\angle PRS = 64°$، فأوجد $m\angle SQR$.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

يمكنك استعمال خصائص المستطيل والجبر لإيجاد قيم مجهولة.

مثال 2 استعمال خصائص المستطيل والجبر



جبر: الشكل الرباعي $JKLM$ مستطيل. إذا كان $m\angle KJL = (2x+4)^\circ$ و $m\angle JLK = (7x+5)^\circ$، فأوجد قيمة x.

بما أن $JKLM$ مستطيل، فإن زواياه الأربع قوائم؛ إذن $m\angle MLK = 90^\circ$.
وبما أن $JKLM$ المستطيل متوازي أضلاع، فإن الأضلاع المتقابلة متوازية، والزوايا المتبادلة داخليًّا بالنسبة للقطر متطابقة.
لذا فإن $\angle JLM \cong \angle KJL$، ومن ذلك $m\angle JLM = m\angle KJL$.

$m\angle JLM + m\angle JLK = m\angle MLK$	مسلمة جمع الزوايا
$m\angle KJL + m\angle JLK = 90^\circ$	بالتعويض
$(2x+4)^\circ + (7x+5)^\circ = 90^\circ$	بالتعويض
$(9x+9)^\circ = 90^\circ$	بجمع الحدود المتشابهة
$9x^\circ = 81^\circ$	بطرح 9 من كلا الطرفين
$x = 9$	بقسمة كلا الطرفين على 9

تحقق من فهمك

2) استعن بالشكل في المثال 2. إذا كان $JP = 3y - 5$, $MK = 5y + 1$، فأوجد قيمة y.

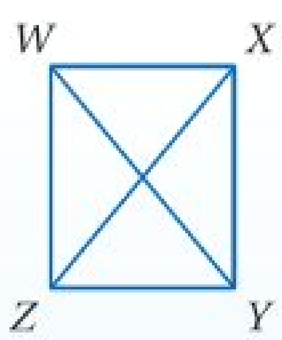
إثبات أنّ متوازي أضلاع يكون مستطيلًا: عكس النظرية 5.13 صحيح أيضًا.

نظرية 5.14

أضف إلى مطويتك

إذا كان قطرا متوازي أضلاع متطابقين فإنّه مستطيل.

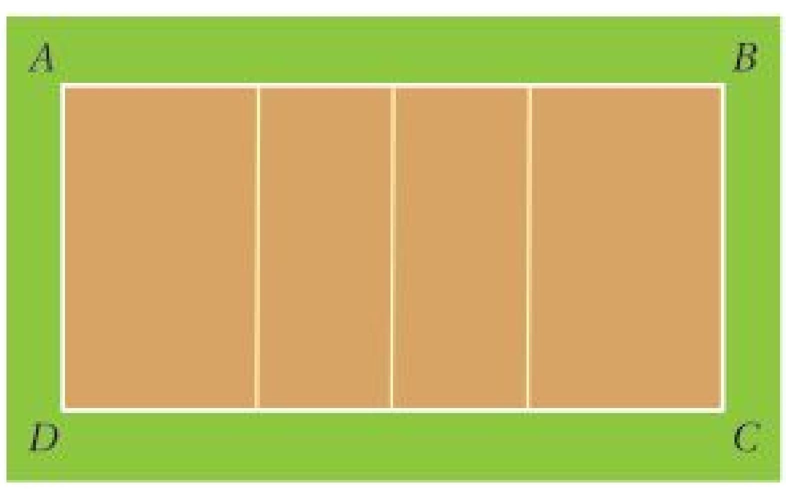
مثال: في $\square WXYZ$، إذا كان $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$، فإنّ $\square WXYZ$ مستطيل.



سوف تبرهن هذه النظرية في السؤال 34.

مثال 3 من واقع الحياة إثبات علاقات في المستطيل

كرة طائرة: أنشأ نادٍ رياضي ملعبًا لكرة الطائرة، وللتأكد من أنه يحقق المواصفات المطلوبة، قاس المشرفون أطوال أضلاع الملعب وقطريه، فإذا كان $AB = 60$ ft, $BC = 30$ ft, $CD = 60$ ft, $AD = 30$ ft، $AC = 67$ ft، $BD = 67$ ft، فكيف يمكنهم التحقق من أنه مستطيل.



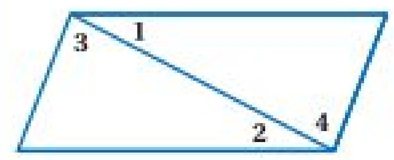
بما أن $AB = CD, BC = AD, AC = BD$، فإنّ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{BC} \cong \overline{AD}$, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$، وبما أن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{BC} \cong \overline{AD}$، فإنّ $ABCD$ متوازي أضلاع. ولأن $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ قطران متطابقان في $\square ABCD$، فإنّ $\square ABCD$ مستطيل.

إرشادات للدراسة

الزوايا القوائم: تذكّر من النظرية 5.6 أنّه إذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع قائمة، فإن زواياه الأربع قوائم.

إرشادات للدراسة

الزاويتان المتبادلتان داخليًّا بالنسبة لقطر: درست سابقًا في نظرية الزاويتان المتبادلتان داخليًا أنّه إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين، فإنّ كلّ زاويتين متبادلتين داخليًا متطابقتان، وينطبق هذا على الزاويتين المتبادلتين بالنسبة لقطر متوازي الأضلاع.



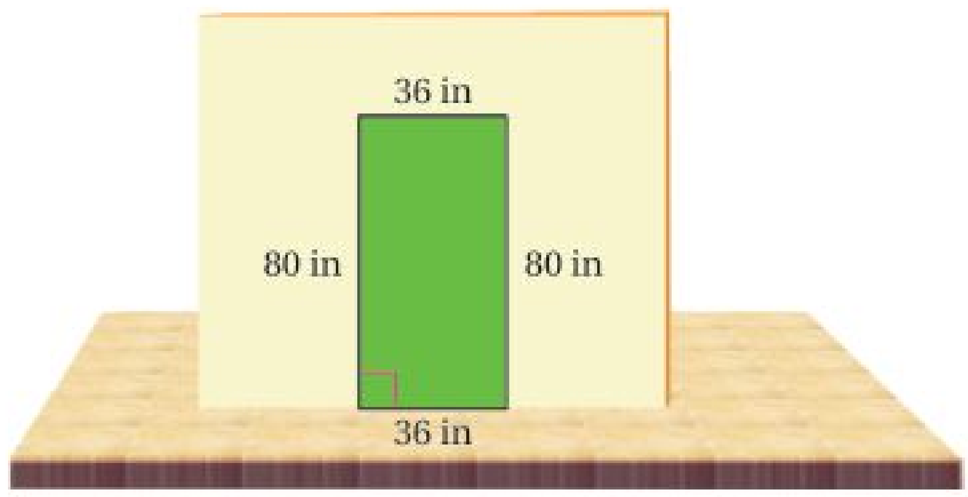
مثال: $\angle 1 \cong \angle 2$, $\angle 3 \cong \angle 4$

الربط مع الحياة

كرة الطائرة هي رياضة جماعية يتنافس فيها فريقان، لكل منهما ستة لاعبين، أما الكرة المستخدمة في هذه اللعبة، فهي متوسطة الحجم وأصغر من كرة القدم وأخف منها وزنًا.

تحقق من فهمك

3) **تصميم:** بالرجوع إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. قاس أحمد أبعاد المنطقة التي قام بطلائها كما في الشكل أدناه. وباستعمال زاوية النجارين تحقق من أن الزاوية عند الركن الأيسر السفلي قائمة. فهل يمكنه استنتاج أن المنطقة مستطيلة الشكل؟ وضِّح إجابتك.



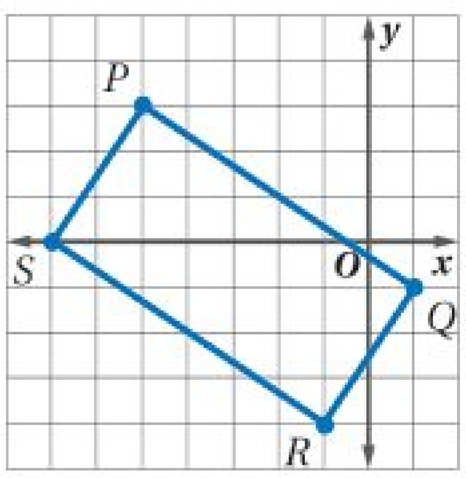
الربط مع الحياة

زاوية النجارين: عبارة عن ضلع خشبي سميك ومسطرة معدنية مثبتة معه بحيث يصنعان زاوية $90°$، وتُصنع من المعدن أو الخشب، وتستخدم لقياس وتحديد الزوايا القائمة، ورسم خطوط عمودية على الأحرف.

يمكنك أيضًا استعمال خصائص المستطيل لإثبات أنّ شكلًا رباعيًّا مرسومًا في المستوى الإحداثي عُلمت إحداثيات رؤوسه هو مستطيل.

مثال 4 المستطيل والهندسة الإحداثيّة

هندسة إحداثيّة: إذا كانت إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي $PQRS$ هي $P(-5, 3), Q(1, -1), R(-1, -4), S(-7, 0)$. فهل $PQRS$ مستطيل؟ استعمل صيغة المسافة بين نقطتين.



الخطوة 1: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لتحدد ما إذا كان $PQRS$ متوازي أضلاع، وذلك بالتحقق من أن أضلاعه المتقابلة متطابقة.

$$PQ = \sqrt{(-5-1)^2 + [3-(-1)]^2} = \sqrt{52}$$

$$RS = \sqrt{[-1-(-7)]^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{52}$$

$$PS = \sqrt{[-5-(-7)]^2 + (3-0)^2} = \sqrt{13}$$

$$QR = \sqrt{[1-(-1)]^2 + [-1-(-4)]^2} = \sqrt{13}$$

بما أن أضلاع $PQRS$ المتقابلة متساوية الطول، فإنّها متطابقة؛ لذا فإن $PQRS$ متوازي أضلاع.

الخطوة 2: هل قطرا $\square PQRS$ متطابقان؟

$$PR = \sqrt{[-5-(-1)]^2 + [3-(-4)]^2} = \sqrt{65}$$

$$QS = \sqrt{[1-(-7)]^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{65}$$

بما أن للقطرين الطول نفسه، فإنّهما متطابقان؛ لذا فإن $\square PQRS$ مستطيل.

إرشادات للدراسة

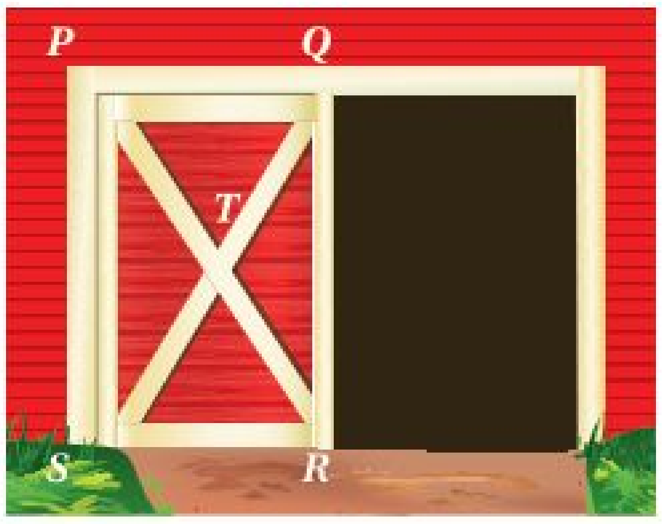
المستطيل ومتوازي الأضلاع: كل مستطيل متوازي أضلاع، ولكن ليس كل متوازي أضلاع مستطيلًا.

تحقق من فهمك

4) إذا كانت إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي $JKLM$ هي $J(-10, 2), K(-8, -6), L(5, -3), M(2, 5)$ فهل $JKLM$ مستطيل؟ استعمل صيغة الميل.

تأكـــد

المثال 1



زراعة: الشكل المجاور يبيّن بوّابة مخزن حبوب مستطيلة الشكل، فيها الدعامتان المتقاطعتان تقويان دفة البوّابة، وتحفظانها من الالتواء مع مرور الزمن.

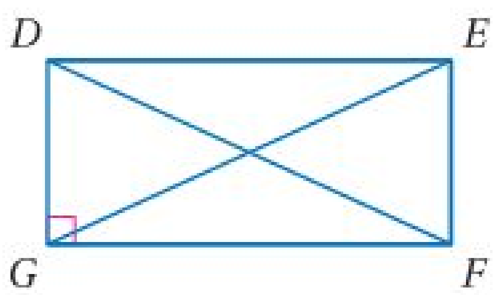
إذا كان $PS = 7\text{ ft}, ST = 3\frac{13}{16}\text{ ft}, m\angle PTQ = 67°$،

فأوجد كلًّا مما يأتي :

(1 QR **(2** SQ

(3 $m\angle TQR$ **(4** $m\angle TSR$

المثال 2

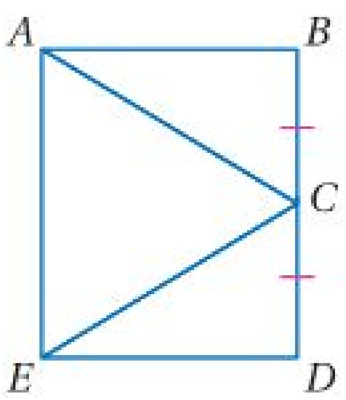


جبر: استعن بالمستطيل **DEFG** المبيَّن جانبًا.

(5 إذا كان $FD = 3x - 7$, $EG = x + 5$، فأوجد EG .

(6 إذا كان $m\angle EFD = (2x - 3)°$, $m\angle DFG = (x + 12)°$، فأوجد $m\angle EFD$.

المثال 3



(7 **برهان:** إذا كان $ABDE$ مستطيلًا، و $\overline{BC} \cong \overline{DC}$، فأثبت أنّ $\overline{AC} \cong \overline{EC}$.

المثال 4

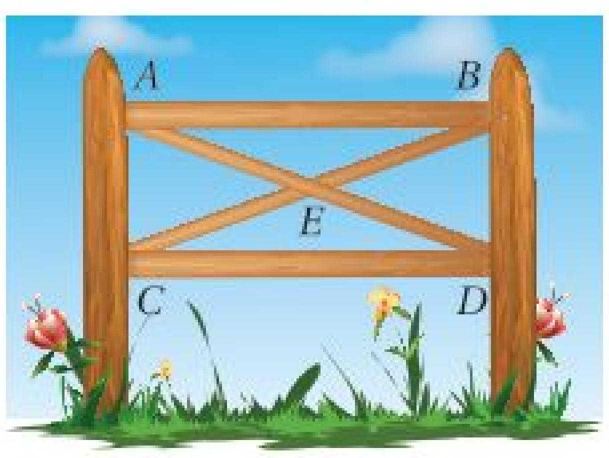
هندسة إحداثية: مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل من السؤالين الآتيين، وحدِّد ما إذا كان مستطيلًا أم لا. برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال.

(8 $W(-4, 3), X(1, 5), Y(3, 1), Z(-2, -2)$ ، صيغة الميل.

(9 $A(4, 3), B(4, -2), C(-4, -2), D(-4, 3)$ ، صيغة المسافة.

تدرب وحل المسائل

المثال 1



سياج: سياج مستطيل الشكل تُستعمل فيه دعائم متقاطعة لتقوية السياج.

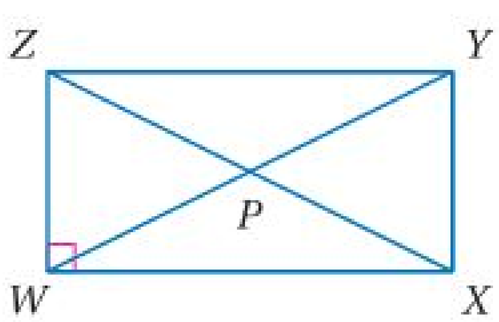
إذا كان $AB = 6\text{ ft}, AC = 2\text{ ft}, m\angle CAE = 65°$،

فأوجد كلًّا مما يأتي :

(10 BD **(11** CB

(12 $m\angle DEB$ **(13** $m\angle ECD$

المثال 2



جبر: استعن بالمستطيل **WXYZ** المبيَّن جانبًا.

(14 إذا كان $ZY = 2x + 3$, $WX = x + 4$، فأوجد WX.

(15 إذا كان $PY = 3x - 5$, $WP = 2x + 11$، فأوجد ZP.

(16 إذا كان $m\angle ZYW = (2x - 7)°$, $m\angle WYX = (2x + 5)°$، فأوجد $m\angle ZYW$.

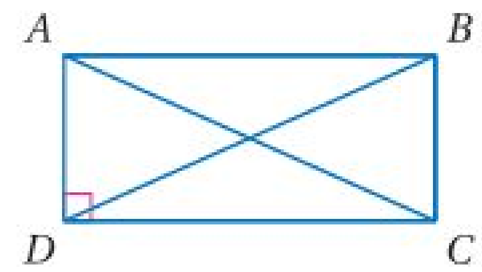
(17 إذا كان $ZP = 4x - 9$, $PY = 2x + 5$، فأوجد ZX.

(18 إذا كان $m\angle XZY = (3x + 6)°$, $m\angle XZW = (5x - 12)°$، فأوجد $m\angle YXZ$.

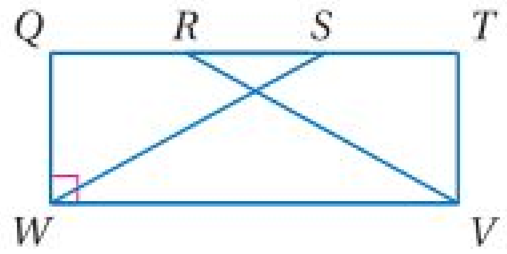
(19 إذا كان $m\angle ZXW = (x - 11)°$, $m\angle WZX = (x - 9)°$، فأوجد $m\angle ZXY$.

المثال 3 **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين في كل مما يأتي:

20) **المعطيات:** $ABCD$ مستطيل.
المطلوب: $\triangle ADC \cong \triangle BCD$



21) **المعطيات:** $QTVW$ مستطيل.
$\overline{QR} \cong \overline{ST}$
المطلوب: $\triangle SWQ \cong \triangle RVT$



المثال 4 **هندسة إحداثيّة:** مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي، وحدد ما إذا كان مستطيلًا أم لا. برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال.

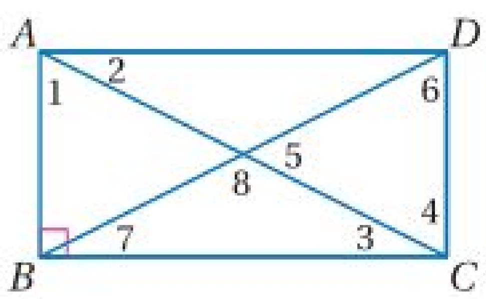
22) $W(-2, 4), X(5, 5), Y(6, -2), Z(-1, -3)$ ، صيغة الميل.

23) $J(3, 3), K(-5, 2), L(-4, -4), M(4, -3)$ ، صيغة المسافة بين نقطتين.

24) $Q(-2, 2), R(0, -2), S(6, 1), T(4, 5)$ ، صيغة المسافة بين نقطتين.

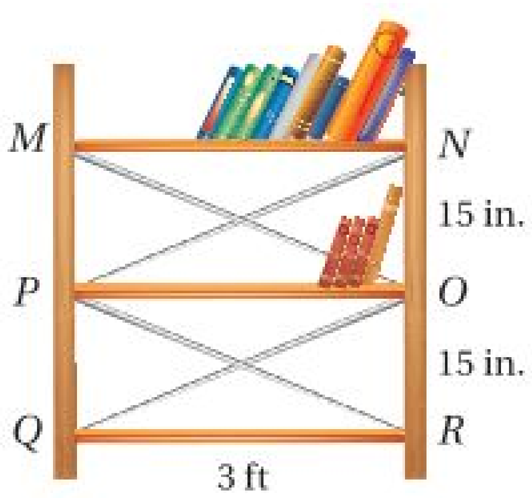
25) $G(1, 8), H(-7, 7), J(-6, 1), K(2, 2)$ ، صيغة الميل.

في المستطيل $ABCD$ ، إذا كان $m\angle 2 = 40°$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي :



26) $m\angle 1$
27) $m\angle 7$
28) $m\angle 3$
29) $m\angle 5$
30) $m\angle 6$
31) $m\angle 8$

32) **مكتبات:** أضاف زيد رفًّا جديدًا لمكتبته ودعائم معدنية متقاطعة كما في الشكل المجاور . كم يجب أن يكون طول كل من الدعائم المعدنية بحيث تكون الرفوف عمودية على الجانبين؟ وضّح إجابتك.
(إرشاد: $12\,\text{in} = 1\,\text{ft}$)



برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات النظرية في كل من السؤالين الآتيين :

33) النظريّة 5.13
34) النظريّة 5.14

35) **رياضة:** قام سلمان بعمل التخطيط الخارجي لملعب كرة قدم. وضّح كيف يمكنه التحقق من أن الملعب مستطيل الشكل باستعمال شريط القياس فقط.

الربط مع الحياة

حددت رابطة كرة القدم الدولية (IFAP) الأبعاد القياسية لملعب كرة القدم في البطولات الرسمية الدولية فكانت 105m طولا، و 68m عرضًا.

36) **تمثيلات متعدّدة:** سوف تستقصي في هذه المسألة خصائص متوازيات أضلاع خاصّة.

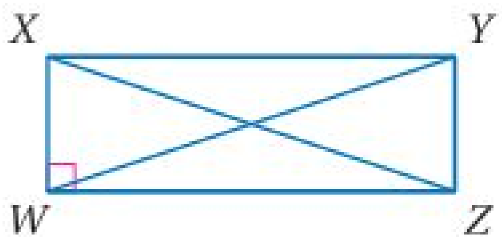
a) **هندسيًّا:** ارسم ثلاثة متوازيات أضلاع كل منها أضلاعه الأربعة متطابقة وسمِّها $ABCD, MNOP, WXYZ$. ثم ارسم قطري كل منها وسمِّ نقطة تقاطعهما R.

b) **جدوليًّا:** استعمل المنقلة لقياس الزوايا وأكمل الجدول الآتي .

متوازي الأضلاع	$ABCD$		$MNOP$		$WXYZ$	
الزاوية	$\angle ARB$	$\angle BRC$	$\angle MRN$	$\angle NRO$	$\angle WRX$	$\angle XRY$
قياس الزاوية						

c) **لفظيًّا:** اكتب تخمينًا حول قطري متوازي الأضلاع المتطابق الأضلاع.

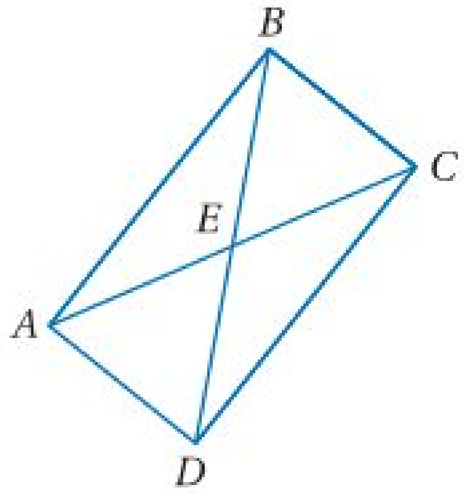
جبر: استعن بالمستطيل $WXYZ$ المبيَّن جانبًا.



37) إذا كان $XW = 3,\ WZ = 4$ ، فأوجد YW.

38) إذا كان $ZY = 6,\ XY = 8$ ، فأوجد WY.

مسائل مهارات التفكير العليا



39) **تحدٍّ:** في المستطيل $ABCD$، إذا كان $m\angle EAB = (4x + 6)^\circ$، $m\angle DEC = (10 - 11y)^\circ,\ m\angle EBC = 60^\circ$، فأوجد قيمة كل من x, y.

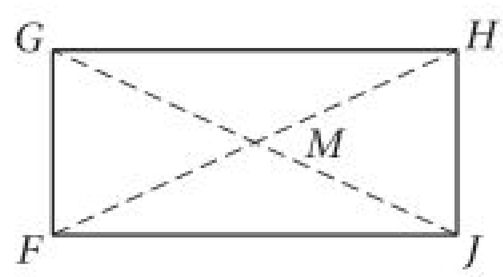
40) **اكتشف الخطأ:** قالت بسمة: إنّ أيّ مثلثين حادَّي الزوايا ومتطابقين يمكن ترتيبهما ليشكّلا مستطيلًا. وقالت شيماء: إنّ المثلثين القائمي الزاوية المتطابقين هما فقط اللذان يمكن ترتيبهما ليشكّلا مستطيلًا. هل أي منهما على صواب؟ وضّح تبريرك.

41) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلات أربعة مستقيمات بحيث تكون نقاط تقاطعها رؤوس مستطيل. تحقق من إجابتك باستعمال الهندسة الإحداثيّة.

42) **اكتب:** وضّح لِمَ تُعدّ جميع المستطيلات متوازيات أضلاع، بينما لا تُعد جميع متوازيات الأضلاع مستطيلات.

تدريب على اختبار

43) في الشكل الرباعي $FGHJ$ ، إذا كان $FJ = -3x + 5y$، $FM = 3x + y,\ GH = 11,\ GM = 13$، فما قيمة كل من x, y اللتين تجعلان $FGHJ$ مستطيلًا؟



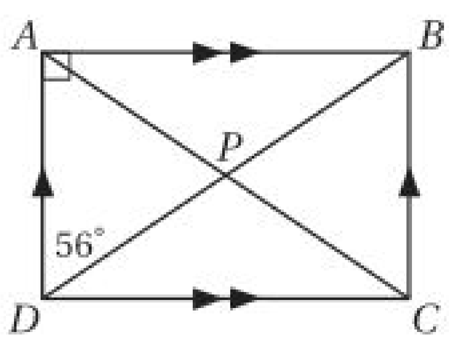
A $x = 3, y = 4$

B $x = 4, y = 3$

C $x = 7, y = 8$

D $x = 8, y = 7$

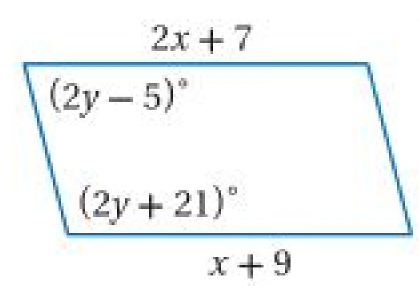
44) **إجابة قصيرة:** ما قياس $\angle APB$؟



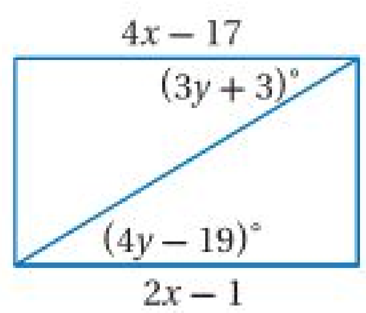
مراجعة تراكمية

جبر: أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع: (الدرس 3-5)

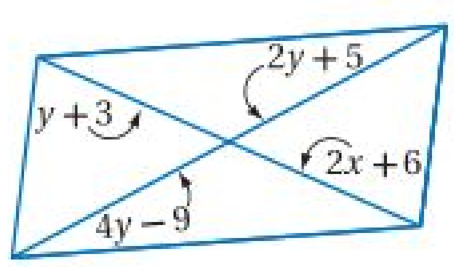
45)



46)



47)



48) **هندسة إحداثية:** أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: $A(1, 3), B(6, 2), C(4, -2), D(-1, -1)$ (الدرس 2-5)

استعد للدرس اللاحق

أوجد المسافة بين النقطتين في كلٍّ مما يأتي:

49) $(4, 2), (2, -5)$

50) $(0, 6), (-1, -4)$

51) $(-4, 3), (3, -4)$

5-5 المعيّن والمربع
Rhombus and Square

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ تحديد ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع أو مستطيلًا.

(الدرس 5-4)

والآن:

- أتعرّف خصائص المعيّن والمربّع وأطبّقها.
- أحدّد ما إذا كان الشكل الرباعي مستطيلًا أو معيّنًا أو مربعًا.

المفردات:

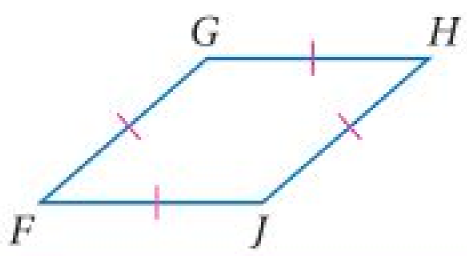
المعيّن
rhombus

المربّع
square

لماذا؟

تصمم الألماسات باستعمال أنماط متكررة من الأشكال الهندسية. إذا صمم فنان الألماسة المجاورة، بحيث تكوّنت من أنماط متكررة من مثلثات وأشكال رباعية، كيف يمكن تحديد نوع الأشكال الرباعية المحددة باللون الأحمر في الألماسة؟

خصائص المعيّن والمربّع:

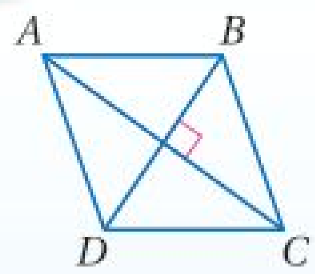


المعيّن هو متوازي أضلاع جميع أضلاعه متطابقة. وللمعيّن جميع خصائص متوازي الأضلاع علاوة على الخاصيتين الواردتين في النظريتين الآتيتين :

نظريات — قطرا المعيّن

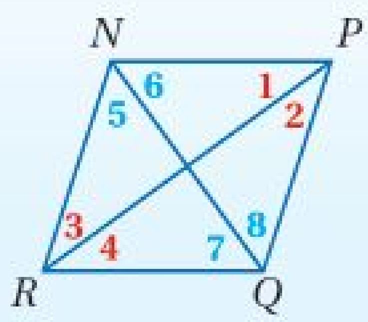
أضف إلى مطويتك

5.15 **إذا كان متوازي أضلاع معيّنًا، فإنّ قطريه متعامدان.**



مثال: إذا كان $\square ABCD$ معيّنًا، فإنّ $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

5.16 **إذا كان متوازي أضلاع معيّنًا فإنّ كل قطر فيه ينصّف كلًّا من الزاويتين اللتين يصل بين رأسيهما.**

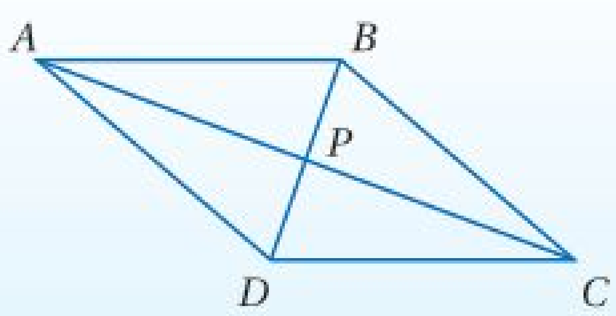


مثال: إذا كان $\square NPQR$ معيّنًا، فإنّ
$\angle 1 \cong \angle 2$, $\angle 3 \cong \angle 4$, $\angle 5 \cong \angle 6$, $\angle 7 \cong \angle 8$

سوف تبرهن النظرية **5.16** في السؤال **28**

برهان — نظريّة 5.15

أكتب برهانًا حرًّا للنظرية **5.15**



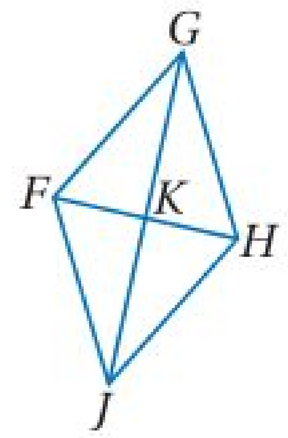
المعطيات: $ABCD$ معيّن.

المطلوب: $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

البرهان:

بما أنّ $ABCD$ معيّن، فإنّ $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ بحسب التعريف.
وبما أن المعيّن متوازي أضلاع، وقطري متوازي الأضلاع ينصّف كل منهما الآخر، فإنّ $\overline{BD}$ ينصّف $\overline{AC}$ عند P؛ لذا فإن $\overline{AP} \cong \overline{PC}$. وكذلك $\overline{BP} \cong \overline{BP}$ بحسب خاصية الانعكاس؛ إذن $\triangle APB \cong \triangle CPB$ بحسب SSS.
وبما أن العناصر المتناظرة في المثلثات المتطابقة تكون متطابقة، فإنّ $\angle APB \cong \angle CPB$.
وكذلك $\angle APB$, $\angle CPB$ متجاورتان على مستقيم، والزاويتان المتطابقتان المتجاورتان على مستقيم تكونان قائمتين. وبما أن $\angle APB$ قائمة، فإن $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ بحسب تعريف المستقيمين المتعامدين.

مثال 1 استعمال خصائص المعيّن



استعن بالمعيّن $FGHJ$ المبيَّن جانبًا.

a) إذا كان $m\angle FJH = 82°$، فأوجد $m\angle KHJ$.

بما أن $FGHJ$ معيّن، فإنّ القطر $\overline{JG}$ ينصِّف $\angle FJH$.

لذا فإن $m\angle KJH = \frac{1}{2}\, m\angle FJH$. إذن $m\angle KJH = \frac{1}{2}(82°) = 41°$

وبما أن قطري المعيّن متعامدان، فإنّ $m\angle JKH = 90°$ بحسب تعريف المستقيمين المتعامدين.

$m\angle KJH + m\angle JKH + m\angle KHJ = 180°$	نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث
$41° + 90° + m\angle KHJ = 180°$	بالتعويض
$131° + m\angle KHJ = 180°$	بالتبسيط
$m\angle KHJ = 49°$	بطرح $131°$ من كلا الطرفين

b) **جبر:** إذا كان $GH = x + 9$, $JH = 5x - 2$ ، فأوجد قيمة x.

$\overline{GH} \cong \overline{JH}$	تعريف المعين
$GH = JH$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$x + 9 = 5x - 2$	بالتعويض
$9 = 4x - 2$	بطرح x من كلا الطرفين
$11 = 4x$	بجمع 2 لكلا الطرفين
$2.75 = x$	بقسمة كلا الطرفين على 4

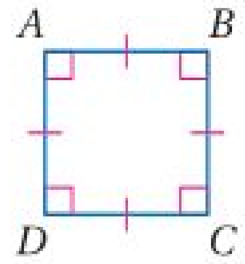
✓ تحقق من فهمك

استعن بالمعيّن $FGHJ$ أعلاه.

1A) إذا كان $FK = 5, FG = 13$، فأوجد KJ.

1B) **جبر:** إذا كان $m\angle JFK = (6y + 7)°$, $m\angle KFG = (9y - 5)°$، فأوجد قيمة y.

المربّع هو متوازي أضلاع جميع أضلاعه متطابقة وجميع زواياه قوائم. تذكّر أن متوازي الأضلاع الذي زواياه الأربع قوائم يكون مستطيلًا، ومتوازي الأضلاع الذي أضلاعه الأربعة متطابقة يكون معيّنًا؛ لذا فعندما يكون متوازي الأضلاع معيّنًا وإحدى زواياه قائمة فإنّه يكون مربّعًا أيضًا، وعليه فإن المربع هو متوازي أضلاع ومستطيل ومعيّن.



المربع $ABCD$

ويلخص شكل ڤن الآتي العلاقة بين متوازي الأضلاع والمعيّن والمربّع والمستطيل.

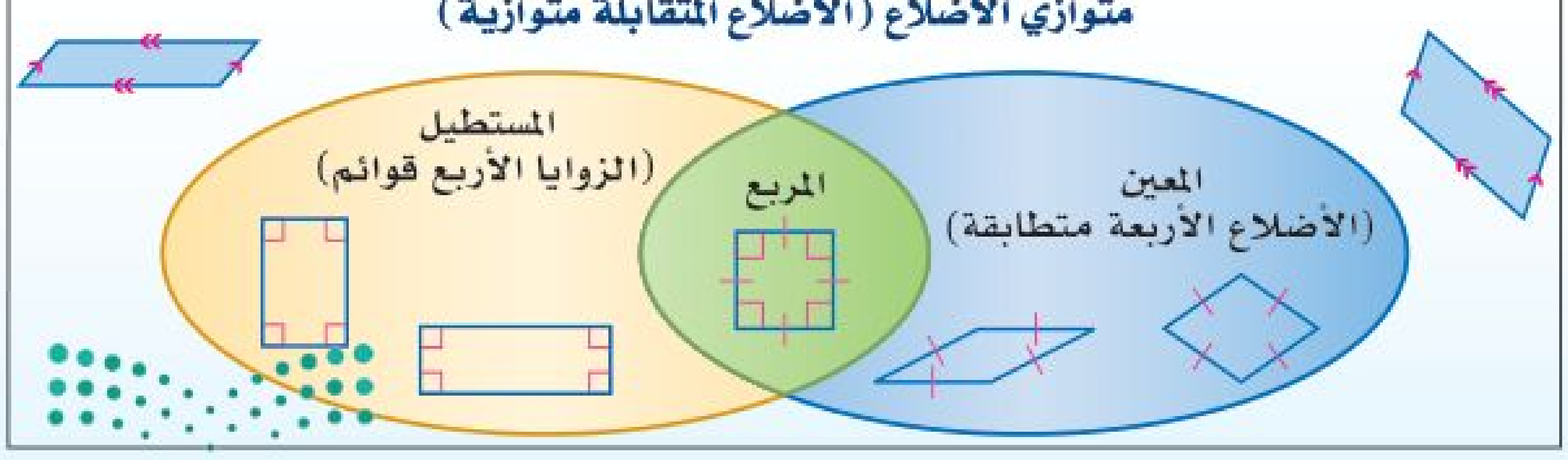
إرشادات للدراسة

المربّع والمعيّن: كل مربّع معيّن، ولكن ليس كل معيّن مربعًا، وكل مربع مستطيل وليس كل مستطيل مربعًا.

ملخص المفهوم

أضف إلى مطويتك

متوازي الأضلاع



جميع خصائص متوازي الأضلاع والمستطيل والمعيّن تنطبق على المربّع. فمثلًا قطرا المربع ينصّف كل منهما الآخر (متوازي أضلاع)، وهما متطابقان (مستطيل)، ومتعامدان (معيّن).

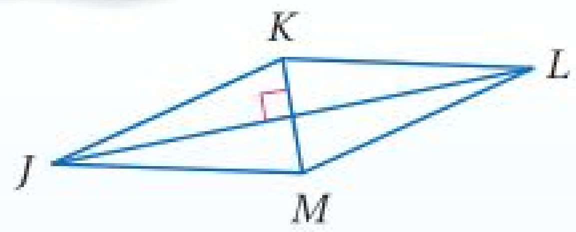
إثبات أنّ الشكل الرباعي معيّن أو مربع: تُحدِّد النظريات الآتية الشروط الكافية للمعيّن والمربّع.

نظريات — الشروط الكافية للمعيّن والمربّع

أضف إلى مطويتك

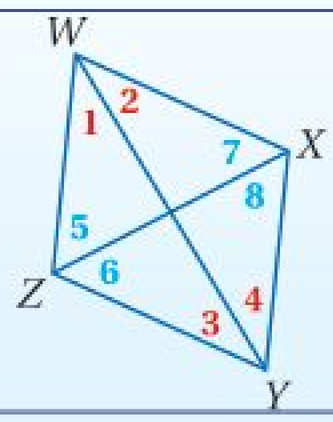
5.17 إذا كان قطرا متوازي أضلاع متعامدين فإنّه معيّن. (عكس النظرية 5.15)

مثال: إذا كان $JKLM$ متوازي أضلاع، وكان $\overline{JL} \perp \overline{KM}$ ، فإنّ $\square JKLM$ معيّن.



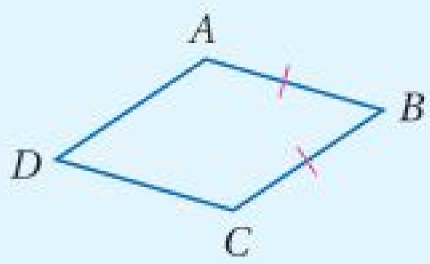
5.18 إذا نصَّف قطر متوازي أضلاع كلًّا من الزاويتين اللتين يصل بين رأسيهما، فإن متوازي الأضلاع يكون معيّنًا. (عكس النظرية 5.16)

مثال: إذا كان $WXYZ$ متوازي أضلاع، وكانت $\angle 4 \cong \angle 3$, $\angle 2 \cong \angle 1$،
أو $\angle 8 \cong \angle 7$, $\angle 6 \cong \angle 5$ ،
فإنّ $\square WXYZ$ معيّن.



5.19 إذا كان ضلعان متتاليان في متوازي الأضلاع متطابقين فإنّه معيّن.

مثال: إذا كان $ABCD$ متوازي أضلاع، وكان $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ ، فإنّ $\square ABCD$ معيّن.



5.20 إذا كان الشكل الرباعي مستطيلًا ومعيّنًا فإنه مربّع.

سوف تبرهن النظريات 5.17 إلى 5.20 في الأسئلة 32–29 على الترتيب.

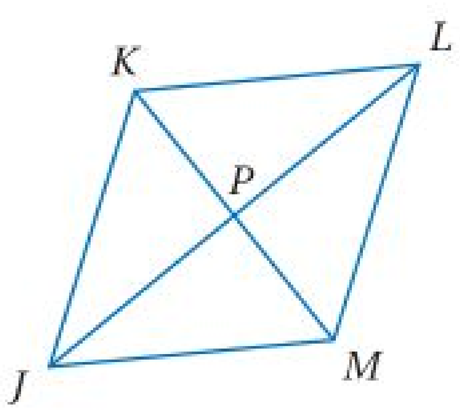
يمكنك استعمال خصائص المعيّن والمربع في البراهين.

مثال 2 استعمال خصائص المعيّن والمربّع في البراهين

اكتب برهانًا حرًّا.

المعطيات: $JKLM$ متوازي أضلاع.
$\triangle JKL$ متطابق الضلعين.

المطلوب: $\square JKLM$ معيّن.



برهان حرّ:

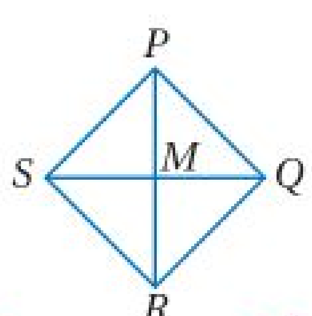
بما أنّ $\triangle JKL$ متطابق الضلعين، فإنّ $\overline{KL} \cong \overline{JK}$ بحسب التعريف، وهذان الضلعان متتاليان في متوازي الأضلاع $JKLM$ ، لذا وبحسب النظرية 1.19، يكون $\square JKLM$ معيّنًا.

تحقق من فهمك

2) اكتب برهانًا حرًّا.

المعطيات: $\overline{SQ}$ عمود منصّف لـ $\overline{PR}$.
$\overline{PR}$ عمود منصّف لـ $\overline{SQ}$.
$\triangle RMS$ متطابق الضلعين.

المطلوب: $PQRS$ مربّع.



تنبيه !

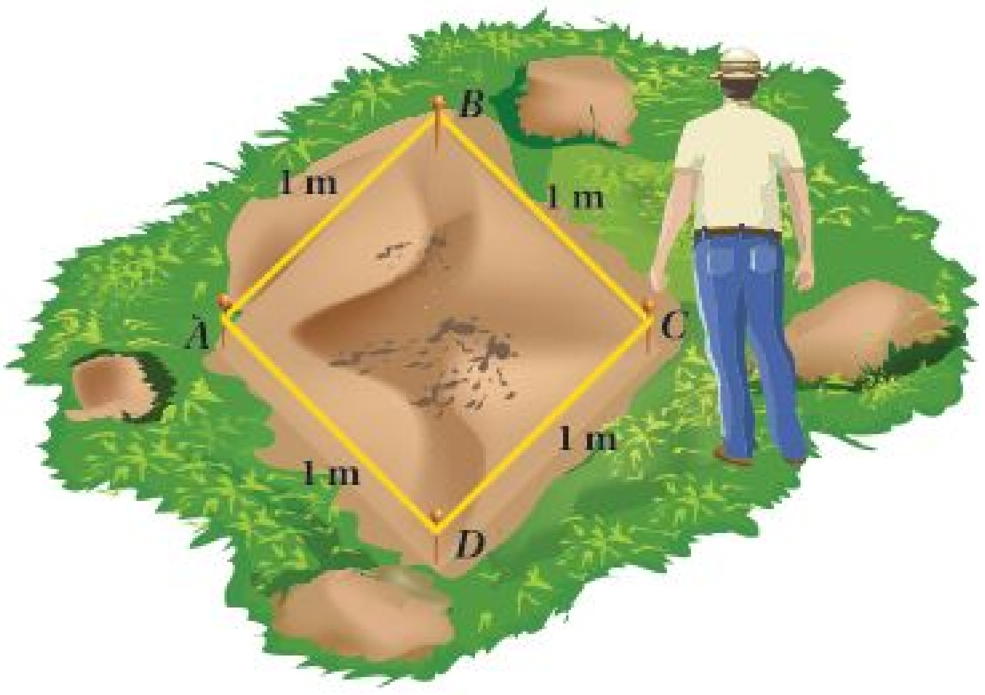
أخطاء شائعة
يخطئ البعض فيستعمل النظريات 5.17, 5.18, 5.19 مع أي شكل رباعي، وهذا غير صحيح؛ لأن هذه النظريات تكون صحيحة فقط إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

إرشادات للدراسة

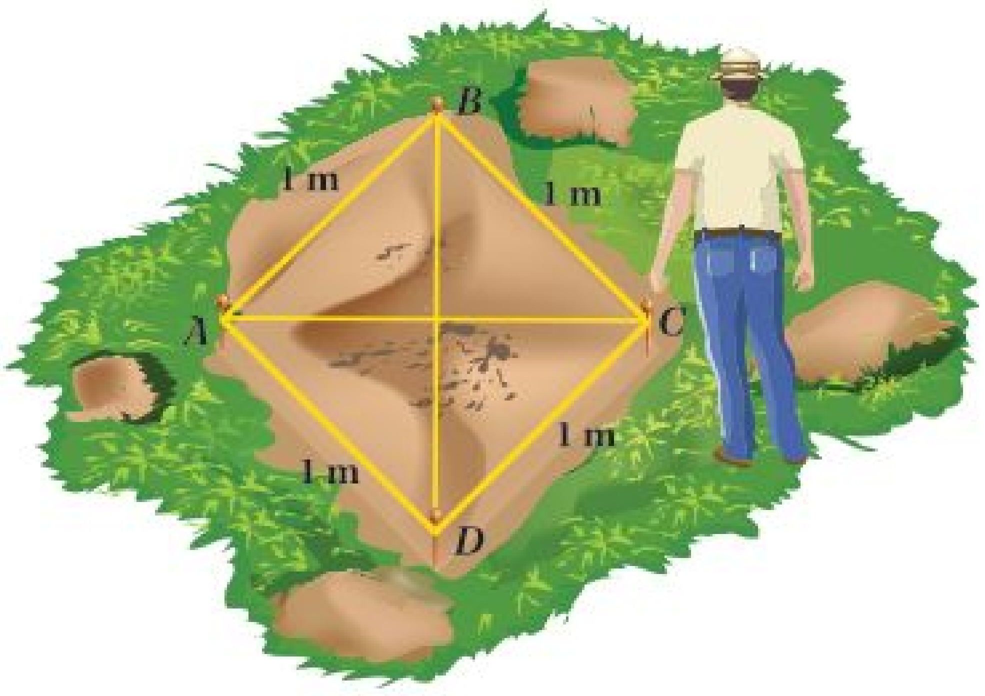
المثلثات المتطابقة
بما أن للمعيّن أربعة أضلاع متطابقة، فإن كلًّا من قطريه يقسمه إلى مثلثين متطابقي الضلعين ومتطابقين. وإذا رُسم القطران فإنهما يقسمان المعيّن إلى أربعة مثلثات قائمة ومتطابقة.

مثال 3 من واقع الحياة استعمال المعيَن والمربع

علم الآثار: مفتاح الكشف الناجح عن الآثار هو وضع خريطة دقيقة لموقع البحث. كيف يمكن لعالم الآثار في الصورة أدناه أن يتحقق من أن منطقة بحثه هي مربع طول ضلعه **1 m** مستعملًا الحبل وشريط القياس فقط؟



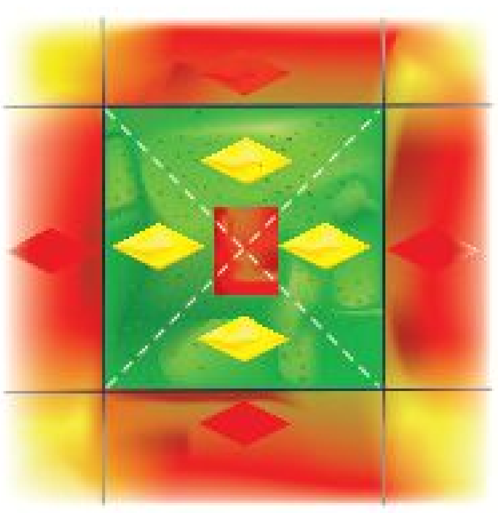
طول كل من أضلاع الشكل الرباعي $ABCD$ يساوي $1\,\text{m}$. وبما أن كل ضلعين متقابلين متطابقان، فإنّ $ABCD$ متوازي أضلاع. وبما أن أضلاع $ABCD$ المتتالية متطابقة فإنّه معيّن. وإذا استطاع عالم الآثار بيان أنّ $\square ABCD$ مستطيل أيضًا فإنّه بحسب النظرية 5.20، يكون مربعًا.



إذا كان قطرا متوازي الأضلاع متطابقين فإنّه مستطيل؛ لذا يمكن لعالم الآثار استعمال الحبل لقياس طولي القطرين، فإذا وجدهما متساويين، فإن $\square ABCD$ يكون مربّعًا.

تحقق من فهمك

3) **خياطة:** خاطت كوثر غطاء طاولة باستعمال قطع ملونة من القماش كما في الرسم المجاور.



A) رسمت كوثر قطري كل من القطع الصفراء فوجدت أنهما متعامدان، هل يمكنها استنتاج أن كل قطعة صفراء معيّن؟وضِّح إجابتك.

B) إذا كانت الزوايا الأربع للقطعة الخضراء متساوية القياس، والضلعان الأيسر والسفلي متساويي الطول، فهل يمكنها استنتاج أن القطعة الخضراء مربّع؟ وضِّح إجابتك.

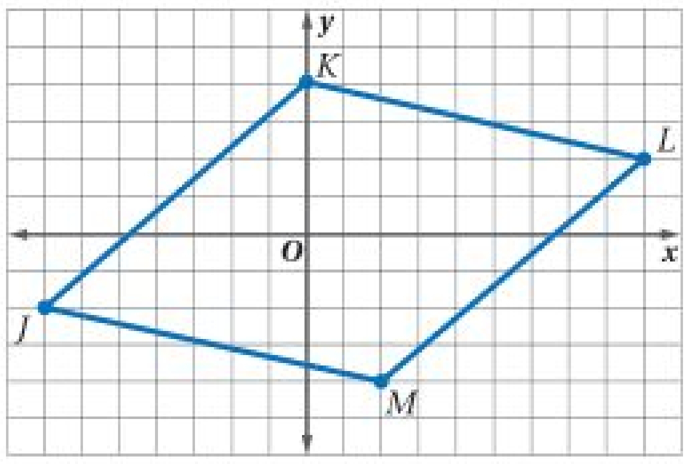
الربط مع الحياة

علم الآثار هو دراسة أعمال الإنسان في العصور القديمة كي يزودنا بمعلومات حول حياته ونشاطاته. وساعد اكتشاف الإنسان للكتابة منذ 5000 عام تقريبًا على فهم أسرار أزمنة ما بعد هذا التاريخ.

استعملت الهندسة الإحداثيّة سابقًا لتصنيف المثلثات. ويمكن استعمال الهندسة الإحداثيّة لتصنيف الأشكال الرباعية أيضًا.

مثال 4 تصنيف الأشكال الرباعيّة باستعمال الهندسة الإحداثيّة

هندسة إحداثيّة : حدد ما إذا كان $\square JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه $J(-7, -2)$، $K(0, 4)$، $L(9, 2)$، $M(2, -4)$ معيّنًا أو مستطيلًا أو مربعًا. اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. وضّح إجابتك.



افهم : **المعطيات :** $\square JKLM$ إحداثيات رؤوسه: $J(-7, -2)$، $K(0, 4)$، $L(9, 2)$، $M(2, -4)$.

المطلوب : إثبات أن $\square JKLM$ هو معين أو مستطيل أو مربع.

خطط : عيّن الرؤوس على المستوى الإحداثي وصل بينها.

يظهر من الرسم أن أضلاع $\square JKLM$ متطابقة. ولكنّ زواياه ليست قوائم؛ لذا يبدو أنّه معيّن وليس مربّعًا أو مستطيلًا.

إذا كان قطرا متوازي الأضلاع متطابقين فإنّه مستطيل. وإذا كانا متعامدين فإنّه معيّن. وإذا كانا متطابقين ومتعامدين فإنه مستطيل ومعيّن؛ أيّ أنّه مربّع.

حل : أولًا: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين للمقارنة بين طولي القطرين.

$$KM = \sqrt{(2-0)^2 + (-4-4)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

$$JL = \sqrt{[9-(-7)]^2 + [2-(-2)]^2} = \sqrt{272} = 4\sqrt{17}$$

بما أن $2\sqrt{17} \neq 4\sqrt{17}$، فإن القطرين ليسا متطابقين؛ لذا $\square JKLM$ ليس مستطيلًا. وبما أنه ليس مستطيلًا فإنّه ليس مربّعًا أيضًا.

ثانيًا: استعمل صيغة الميل لتحديد ما إذا كان القطران متعامدين.

ميل $\overline{KM}$: $\frac{-4-4}{2-0} = \frac{-8}{2} = -4$

ميل $\overline{JL}$: $\frac{2-(-2)}{9-(-7)} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

وبما أن حاصل ضرب الميلين يساوي -1، فإن القطرين متعامدان؛ لذا فإن $\square JKLM$ معيّن.

تحقق : $JK = \sqrt{[4-(-2)]^2 + [0-(-7)]^2} = \sqrt{85}$

$KL = \sqrt{(9-0)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{85}$

لذا فإن $\square JKLM$ معيّن بحسب النظرية 1.20 .

ميل $\overline{JK}$: $\frac{4-(-2)}{0-(-7)} = \frac{6}{7}$ ، وميل $\overline{KL}$: $\frac{2-4}{9-0} = -\frac{2}{9}$

وبما أن حاصل ضرب هذين الميلين لا يساوي -1، فإن الضلعين المتتاليين $\overline{JK}$ و $\overline{KL}$ غير متعامدين؛ لذا فإن $\angle JKL$ ليست قائمة؛ إذن $\square JKLM$ ليس مستطيلًا ولا مربّعًا. ✔

إرشادات للدراسة

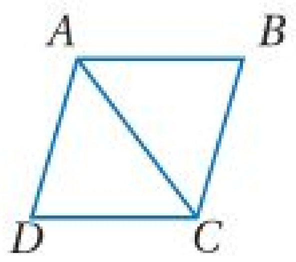
تمثيل الشكل بيانيًا : عند تحليل شكل رباعي باستعمال الهندسة الإحداثيّة، مثّله بيانيًا لمساعدتك على وضع تخمين، ثم تحقق من تخمينك جبريًا.

تحقق من فهمك

4) حدّد ما إذا كان $\square JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه $J(5, 0)$, $K(8, -11)$, $L(-3, -14)$, $M(-6, -3)$ معيّنًا أو مستطيلًا أو مربّعًا ؟ اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. وضّح إجابتك.

تأكــد

المثال 1



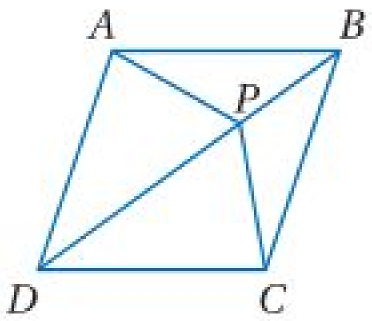
جبر: استعن بالمعين $ABCD$ المبيَّن جانبًا.

1) إذا كان $m\angle BCD = 114°$، فأوجد $m\angle BAC$.

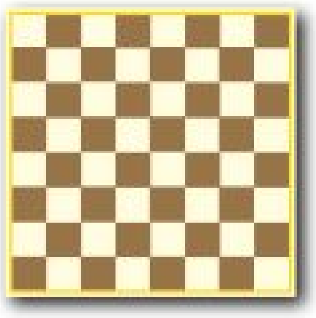
2) إذا كان $AB = 2x + 3$, $BC = x + 7$، فأوجد CD.

المثالان 2, 3

3) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أنّه إذا كان $ABCD$ معيّنًا وكان $\overline{DB}$ قطرًا فيه، فإنّ $\overline{AP} \cong \overline{CP}$.



4) **بلاط:** تتكون الأرضية أدناه من 64 بلاطة مربعة متطابقة. استعمل هذه المعطيات لإثبات أن الأرضية نفسها مربّعة.



المثال 4

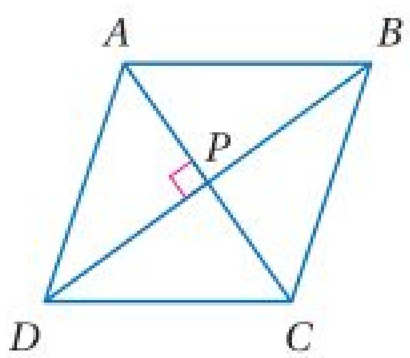
هندسة إحداثيّة: حدِّد ما إذا كان $\square QRST$ المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي معينًا أو مستطيلًا أو مربعًا. اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. وضِّح إجابتك.

5) $Q(1, 2), R(-2, -1), S(1, -4), T(4, -1)$

6) $Q(-2, -1), R(-1, 2), S(4, 1), T(3, -2)$

تدرب وحل المسائل

المثال 1



جبر: استعن بالمعين $ABCD$ المبيَّن جانبًا.

7) إذا كان $AB = 14$، فأوجد BC.

8) إذا كان $m\angle BCD = 118°$، فأوجد $m\angle BAC$.

9) إذا كان $AP = 3x - 1$ و $PC = x + 9$، فأوجد AC.

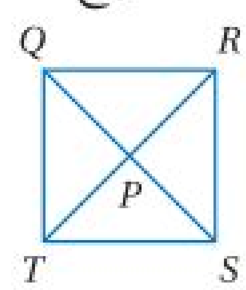
10) إذا كان $m\angle ABC = (2x - 7)°$ و $m\angle BCD = (2x + 3)°$، فأوجد $m\angle DAB$.

11) إذا كان $m\angle DPC = (3x - 15)°$، فأوجد قيمة x.

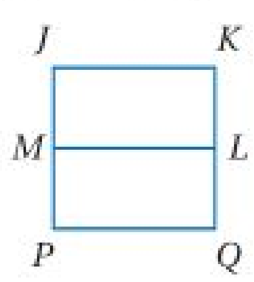
المثال 2

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين في كل مما يأتي :

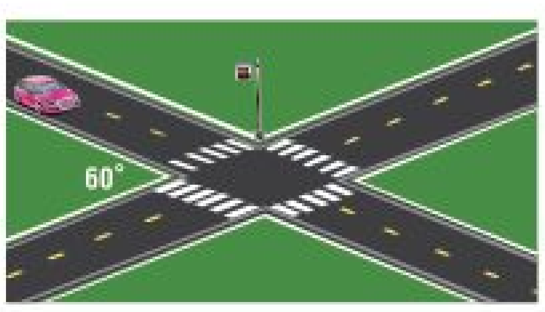
12) **المعطيات:** $QRST$ متوازي أضلاع.
$\overline{TR} \cong \overline{QS}, m\angle QPR = 90°$
المطلوب: $QRST$ مربّع.



13) **المعطيات:** $JKQP$ مربّع.
$\overline{ML}$ تنصِّف كلًّا من $\overline{JP}$ و $\overline{KQ}$.
المطلوب: $JKLM$ متوازي أضلاع.

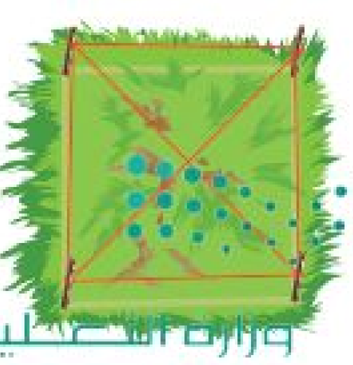


14) **طرق:** يتقاطع طريقان كما في الشكل. إذا كانت ممرّات المشاة لها الطول نفسه، فصنّف الشكل الرباعيّ المكوّن من هذه الممرات. ووضّح تبريرك.



المثال 3

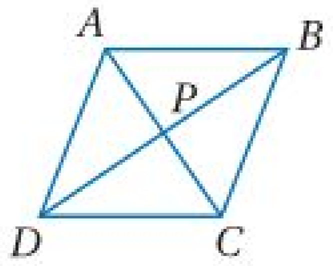
15) **زراعة:** حدّد مزارع حقلًا بأوتاد وحبال كما في الشكل المجاور . إذا كانت أضلاع الشكل الرباعي المتشكل متساوية الطول، وقطراه متعامدين، فهل هذه المعلومات كافية كي تتحقق من أنّ الحقل مربع ؟ وضِّح تبريرك.



المثال 4 **هندسة إحداثيّة:** حدِّد ما إذا كان $\square JKLM$ المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي معينًا أو مستطيلًا أو مربعًا. اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. ووضِّح إجابتك.

16) $J(-4, -1), K(1, -1), L(4, 3), M(-1, 3)$ **17)** $J(-3, -2), K(2, -2), L(5, 2), M(0, 2)$

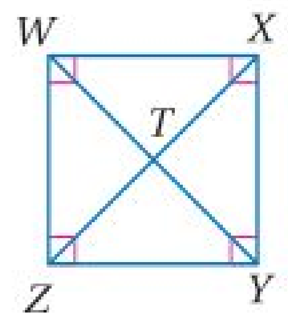
18) $J(-2, -1), K(-4, 3), L(1, 5), M(3, 1)$ **19)** $J(-1, 1), K(4, 1), L(4, 6), M(-1, 6)$



في المعين $ABCD$، إذا كان $PB = 12, AB = 15, m\angle ABD = 24°$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

20) AP **21)** CP

22) $m\angle BDA$ **23)** $m\angle ACB$



في المربع $WXYZ$، إذا كان $WT = 3$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

24) ZX **25)** XY

26) $m\angle WTZ$ **27)** $m\angle WYX$

برهان: اكتب برهانًا حرًّا لكل مما يأتي:

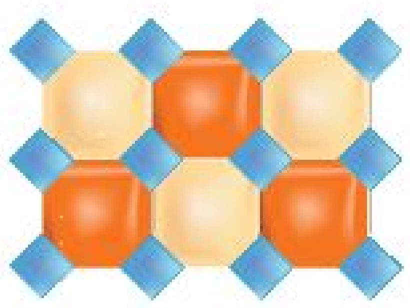
28) النظريّة 5.16 **29)** النظريّة 5.17 **30)** النظريّة 5.18

31) النظريّة 5.19 **32)** النظريّة 5.20

برهان: اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة في كل من السؤالين الآتيين:

33) قطرا المربّع متعامدان.

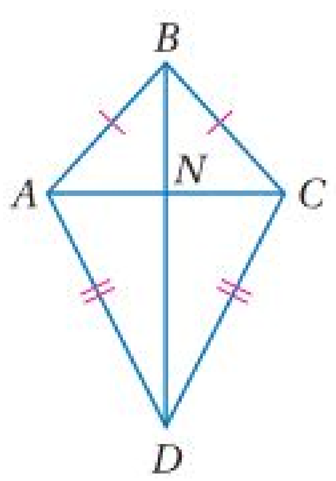
34) تشكّل القطع المستقيمة الواصلة بين منتصفات أضلاع مستطيل معيّنًا.



35) **تصميم:** يتكون نمط الفسيفساء المبين جانبًا من قطع ثمانيّة منتظمة وأخرى رباعيّة. صنِّف الأشكال الرباعيّة في النمط، ووضِّح تبريرك.

الربط مع الحياة

الفسيفساء صور تُشكَل باستعمال أنماط من أحجار أو زجاج أو قرميد أو أي مواد أخرى. والفسيفساء في الصورة أعلاه فسيفساء إغريقيّة قديمة من الصخر البلوري (الكوارتز). استعمل الإغريق قطعًا صغيرة أو أشكالًا منتظمة من المواد منذ 200 سنة قبل الميلاد بدلًا من الصخر البلوري في أعمال الفسيفساء.



36) **تمثيلات متعدّدة:** سوف تستقصي في هذه المسألة إحدى خصائص شكل الطائرة الورقيّة، وهو شكل رباعي يتكون من زوجين متمايزين من الأضلاع المتجاورة والمتطابقة.

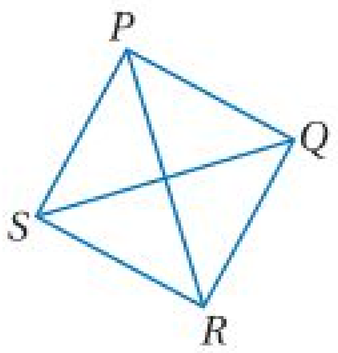
a) هندسيًّا: ارسم قطعةً مستقيمةً، ثم افتح الفرجار وثبته عند أحد طرفيها وارسم قوسًا فوقها، ومن دون تغيير فتحة الفرجار، ثبّت رأس الفرجار عند الطرف الآخر للقطعة المستقيمة، وارسم قوسًا يقطع القوس السابق. غيّر فتحة الفرجار وارسم قوسين أسفل القطعة المستقيمة كما فعلت سابقًا.
استعمل المسطرة وصل بين طرفَي القطعة والأقواس، وسينتج لك شكل طائرة ورقية سمّها $ABCD$. ثم كرِّر ذلك مرتين، وسمِّ شكلي الطائرتين الورقيتين، $PQRS$، $WXYZ$، ثم ارسم قطري كل منهما، ولتكن نقطة تقاطع قطري كل منها N.

b) جدوليًّا: استعمل مسطرة لقياس المسافة من N إلى كل رأس. وسجِّل النتائج في جدول على النحو الآتي.

الشكل	المسافة من N إلى كل رأس على القطر الأقصر		المسافة من N إلى كل رأس على القطر الأطول	
$ABCD$				
$PQRS$				
$WXYZ$				

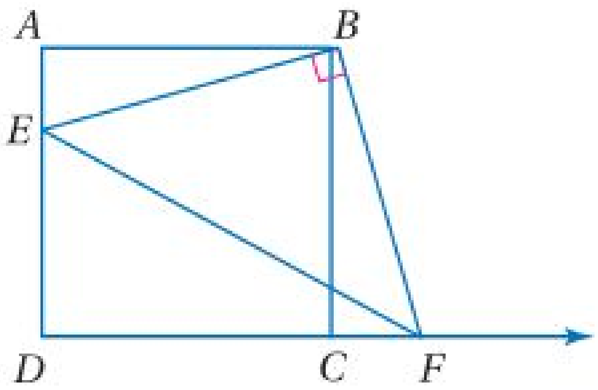
c) لفظيًّا: اكتب تخمينًا حول قطري شكل الطائرة الورقيّة.

مسائل مهارات التفكير العليا



37) **اكتشف الخطأ:** في الشكل الرباعي $SRQP$ المبيَّن جانبًا، $\overline{PR} \cong \overline{QS}$.
قال محمد: إن الشكل مربّع. بينما قال إبراهيم: إنه معيّن.
هل أي منهما على صواب؟ وضّح تبريرك.

38) **تبرير:** حدِّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أم خطأً؟ ثم اكتب عكسها ومعكوسها ومعاكسها الإيجابي، وحدِّد قيمة الصواب لكل منها. وضّح تبريرك.
إذا كان الشكل الرباعي مربّعًا، فإنّه مستطيل.



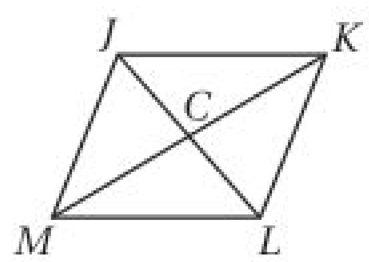
39) **تحدٍّ:** مساحة المربّع $ABCD$ المجاور تساوي 36 وحدة مربّعة. ومساحة $\triangle EBF$ تساوي 20 وحدة مربّعة. إذا كانت $\overline{EB} \perp \overline{BF}$، وطول $\overline{AE}$ يساوي وحدتين، فأوجد طول $\overline{CF}$.

40) **مسألة مفتوحة:** أوجد إحداثيات رؤوس مربّع قطراه محتويان في المستقيمين $y = x$, $y = -x + 6$. وضّح تبريرك.

41) **اكتب:** قارن بين جميع خصائص الأشكال الرباعيّة الآتية: متوازي الأضلاع، المستطيل، المعيّن، المربّع.

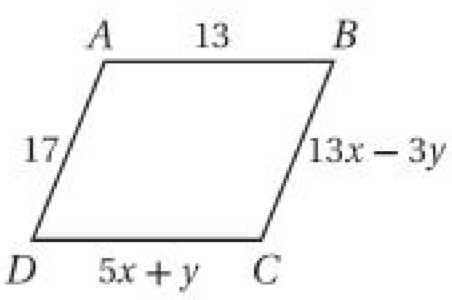
تدريب على اختبار

42) في المعين $JKLM$، إذا كان $CK = 8$ ، $JK = 10$ ، فأوجد JC.



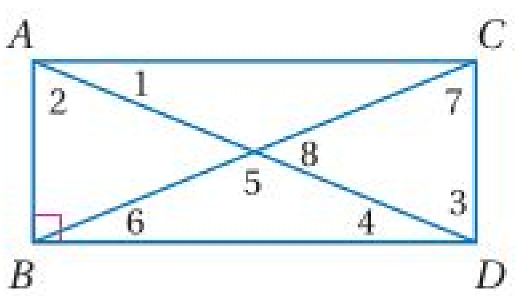
A 4
B 6
C 8
D 10

43) **جبر:** ما قيمة كل من x , y بحيث يكون $ABCD$ متوازي أضلاع؟



A $x = 3, y = 2$
B $x = \frac{3}{2}, y = -1$
C $x = 2, y = 3$
D $x = 3, y = -1$

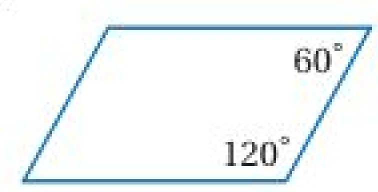
مراجعة تراكمية

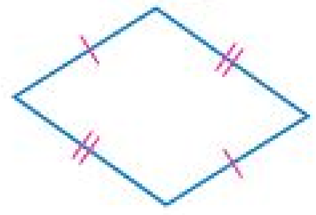


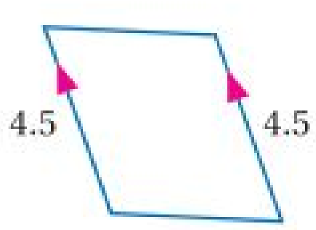
في المستطيل $ABDC$، إذا كان $m\angle 1 = 38°$. فأوجد كلًّا من القياسات الآتية: (الدرس 4-5)

44) $m\angle 2$ 45) $m\angle 5$ 46) $m\angle 6$

حدِّد ما إذا كان الشكل الرباعي في كل مما يأتي متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك. (الدرس 3-5)

47)


48)


49)


50) **قياسات:** قال مروان: إنّ الحديقة الخلفيّة لمنزله على شكل مثلث أطوال أضلاعه 22 ft, 23 ft, 45 ft.
فهل ترى أنّ هذه القياسات صحيحة؟ وضّح تبريرك. (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

حل كل معادلة مما يأتي:

51) $\frac{1}{2}(5x + 7x - 1) = 11.5$

52) $\frac{1}{2}(10x + 6x + 2) = 7$

53) $\frac{1}{4}(12x + 6 - 8x + 7) = 9$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

5-6 شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقيّة
Trapezoid and Kite

فيما سبق:

درستُ استعمال خصائص أنواع خاصة من متوازي الأضلاع.

(الدرس 5-5)

والآن:

- أتعرّف خصائص شبه المنحرف وأطبّقها.
- أتعرّف خصائص شكل الطائرة الورقيّة وأطبّقها.

المفردات:

شبه المنحرف
trapezoid

قاعدتا شبه المنحرف
bases

ساقا شبه المنحرف
legs of a trapezoid

زاويتا القاعدة
base angles

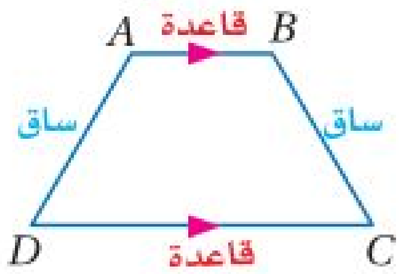
شبه المنحرف المتطابق الساقين
isosceles trapezoid

القطعة المتوسطة لشبه المنحرف
midsegment of a trapezoid

شكل الطائرة الورقيّة
kite

لماذا؟

تستعمل في رياضات القفز، صناديق ذات أجزاء متداخلة مصنوعة من الإسفنج ذي الضغط العالي، وتتخذ منصّات وثب ودرجات صعود، وتمثّل جوانب كل من الأجزاء شبه منحرف.



خصائص شبه المنحرف: **شبه المنحرف** هو شكل رباعي فيه ضلعان فقط متوازيان يُسميان **قاعدتي شبه المنحرف**. ويُسمّى الضلعان غير المتوازيين **ساقي شبه المنحرف**. و **زاويتا القاعدة** مكوّن كل منهما من قاعدة وأحد ضلعي الساقين. ففي شبه المنحرف $ABCD$ المبيَّن جانبًا، $\angle A, \angle B$ زاويتا القاعدة $\overline{AB}$، وكذلك $\angle C, \angle D$ زاويتا القاعدة $\overline{DC}$.

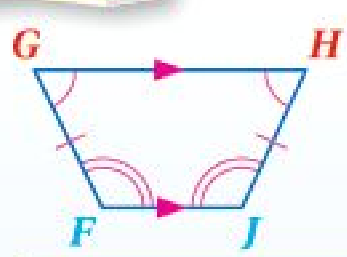
إذا كان ساقا شبه المنحرف متطابقين فإنه يسمى **شبه منحرف متطابق الساقين**.

نظريات

أضف إلى مطويتك

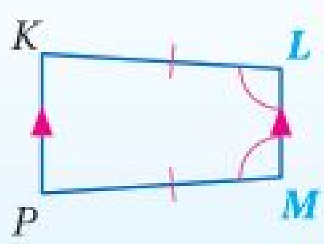
شبه المنحرف المتطابق الساقين

5.21 إذا كان شبه المنحرف متطابق الساقين، فإنّ زاويتي كل قاعدة متطابقتان.



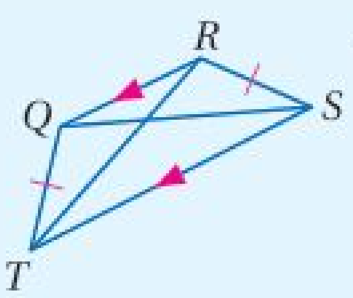
مثال: إذا كان شبه المنحرف $FGHJ$ متطابق الساقين، فإنّ $\angle J \cong \angle F$, $\angle H \cong \angle G$.

5.22 إذا كانت زاويتا قاعدة في شبه المنحرف متطابقتين، فإنّه متطابق الساقين.



مثال: إذا كان $KLMP$ شبه منحرف، فيه $\angle M \cong \angle L$ فإنه متطابق الساقين.

5.23 يكون شبه المنحرف متطابق الساقين، إذا وفقط إذا كان قطراه متطابقين.

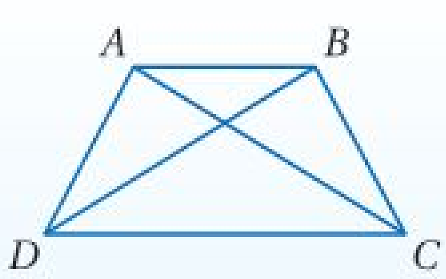


مثال: إذا كان شبه المنحرف $QRST$ متطابق الساقين، فإنّ $\overline{RT} \cong \overline{QS}$. وكذلك إذا كان $QRST$ شبه منحرف، فيه $\overline{RT} \cong \overline{QS}$ فإنّه متطابق الساقين.

سوف تبرهن النظريات 5.23 , 5.22 , 5.21 في الأسئلة 21 ,20 ,19 على الترتيب.

برهان

الحالة الأولى من النظريّة 5.23



المعطيات: $ABCD$ شبه منحرف متطابق الساقين.

المطلوب: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

$ABCD$ شبه منحرف متطابق الساقين.
معطى

$\angle ADC \cong \angle BCD$
زاويتا قاعدة شبه المنحرف المتطابق الساقين متطابقتان.

$\overline{AD} \cong \overline{BC}$
تعريف شبه المنحرف المتطابق الساقين

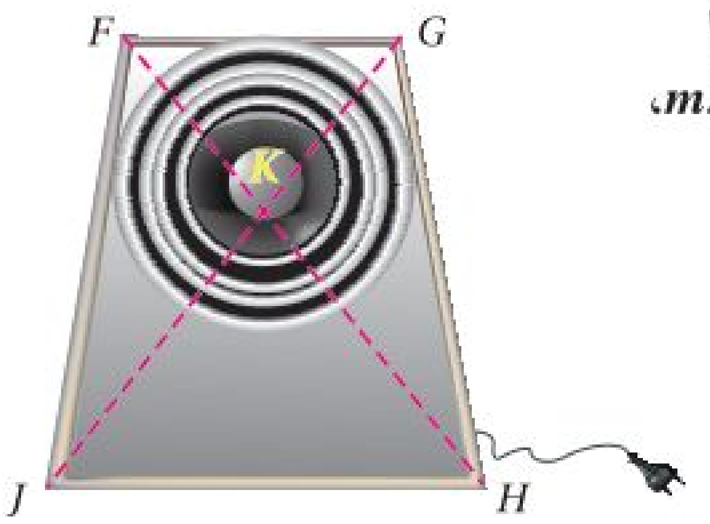
$\overline{DC} \cong \overline{CD}$
خاصية الانعكاس للتطابق

$\triangle ADC \cong \triangle BCD$
SAS

$\overline{AC} \cong \overline{BD}$
ضلعان متناظران في مثلثين متطابقين

مثال 1 من واقع الحياة: استعمال خصائص شبه المنحرف المتطابق الساقين

مكبرات الصوت: المنظر الأمامي لمكبِّر الصوت المبيّن جانبًا على شكل شبه منحرف متطابق الساقين. إذا كان $m\angle FJH = 85^\circ$، $FK = 8\,\text{in}, JG = 19\,\text{in}$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي :



a) $m\angle FGH$

بما أنّ $FGHJ$ شبه منحرف متطابق الساقين، فإنّ $\angle FJH$ و $\angle GHJ$ زاويتا قاعدة متطابقتان؛ لذا فإن $m\angle GHJ = m\angle FJH = 85^\circ$.

وبما أنّ $FGHJ$ شبه منحرف، فإنّ $\overline{FG} \parallel \overline{JH}$.

$m\angle FGH + m\angle GHJ = 180^\circ$	نظرية الزاويتين المتحالفتين
$m\angle FGH + 85^\circ = 180^\circ$	بالتعويض
$m\angle FGH = 95^\circ$	بطرح 85 من كلا الطرفين

b) KH

بما أنّ $FGHJ$ شبه منحرف متطابق الساقين، فإنّ القطرين $\overline{FH}$ و $\overline{JG}$ متطابقان.

$FH = JG$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$FK + KH = JG$	مسلمة جمع القطع المستقيمة
$8 + KH = 19$	بالتعويض
$KH = 11\text{ in}$	بطرح 8 من كلا الطرفين

إرشادات للدراسة

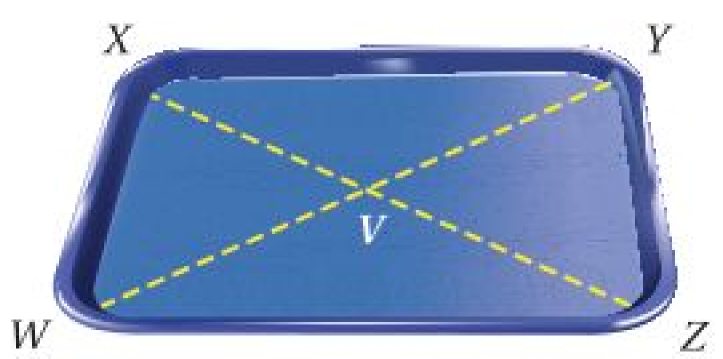
شبه المنحرف المتطابق الساقين: تكون زاويتا كل قاعدة في شبه المنحرف متطابقتين فقط إذا كان شبه المنحرف متطابق الساقين.

الربط مع الحياة

مكبِّرات الصوت هي مضخِّمات تُكثِّف الأمواج الصوتية حتى تصبح مسموعة بدرجة أكبر. ويحتوي كل من المذياع والتلفاز والحاسوب مضخمات صوتية.

✓ تحقق من فهمك

1) مطاعم: لاستغلال مساحة الطاولات المربعة، تستعمل في مطعمٍ أطباقٌ على شكل شبه منحرف كما في الشكل المجاور. إذا كان $WXYZ$ شبه منحرف متطابق الساقين، وكان $m\angle YZW = 85^\circ$, $WV = 15\text{ cm}$، $VY = 10\text{ cm}$، فأوجد كلًّا مما يأتي :

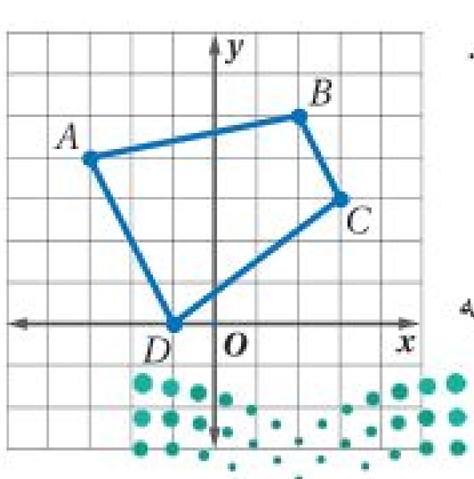


A) $m\angle XWZ$ **B)** $m\angle WXY$ **C)** XZ

يمكنك استعمال الهندسة الإحداثيّة لتحديد ما إذا كان شبه المنحرف متطابق الساقين أم لا.

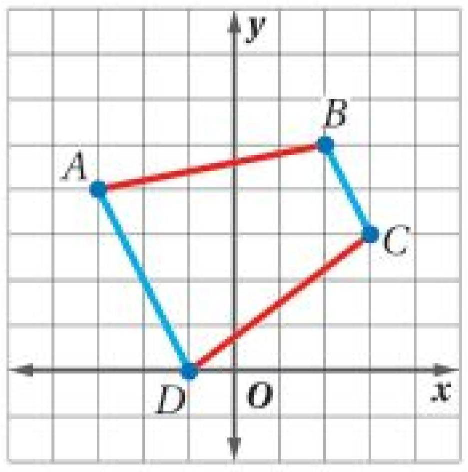
مثال 2: شبه المنحرف المتطابق الساقين والهندسة الإحداثيَّة

هندسة إحداثيَّة: رؤوس الشكل الرباعي $ABCD$ هي $A(-3, 4), B(2, 5), C(3, 3), D(-1, 0)$. بيّن أن $ABCD$ شبه منحرف، وحدّد ما إذا كان متطابق الساقين. ووضِّح إجابتك.



ارسم الشكل الرباعي $ABCD$ في مستوى إحداثي.

الخطوة 1: استعمل صيغة الميل لمقارنة ميلي الضلعين المتقابلين $\overline{BC}, \overline{AD}$ وكذلك الضلعين المتقابلين $\overline{AB}, \overline{DC}$. فالشكل الرباعي يكون شبه منحرف إذا كان فيه ضلعان فقط متقابلان متوازيين.



الضلعان المتقابلان $\overline{BC}$, $\overline{AD}$:

ميل $\overline{BC}$:　$\frac{3-5}{3-2} = \frac{-2}{1} = -2$

ميل $\overline{AD}$:　$\frac{0-4}{-1-(-3)} = \frac{-4}{2} = -2$

بما أن ميلي $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ متساويان، فإنّ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

الضلعان المتقابلان $\overline{AB}$, $\overline{DC}$:

ميل $\overline{AB}$:　$\frac{5-4}{2-(-3)} = \frac{1}{5}$

ميل $\overline{DC}$:　$\frac{0-3}{-1-3} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$

بما أنّ ميلي $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$ ليسا متساويين، فإنّ $\overline{AB} \nparallel \overline{DC}$. وبما أن $ABCD$ فيه ضلعان فقط متوازيان، فإنّه شبه منحرف.

الخطوة 2: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين للمقارنة بين طولي الساقين $\overline{AB}$, $\overline{DC}$ وتحديد ما إذا كان شبه المنحرف $ABCD$ متطابق الساقين.

$$AB = \sqrt{(-3-2)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{26}$$

$$DC = \sqrt{(-1-3)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

بما أنّ $AB \neq DC$ ، فإنّ شبه المنحرف $ABCD$ ليس متطابق الساقين.

قراءة الرياضيات

رمز التوازي: تذكّر أنّ الرمز $\parallel$ يعني يوازي، والرمز $\nparallel$ يعني لا يوازي.

تحقق من فهمك

2) رؤوس الشكل الرباعي $QRST$ هي $Q(-8, -4), R(0, 8), S(6, 8), T(-6, -10)$.
بيّن أن $QRST$ شبه منحرف، وحدِّد ما إذا كان متطابق الساقين. ووضِّح إجابتك.

القطعة المتوسطة لشبه المنحرف هي قطعة مستقيمة تصل بين منتصفي ساقيه. وتبين النظرية الآتية العلاقة بين القطعة المتوسطة وقاعدتي شبه المنحرف.

قراءة الرياضيات

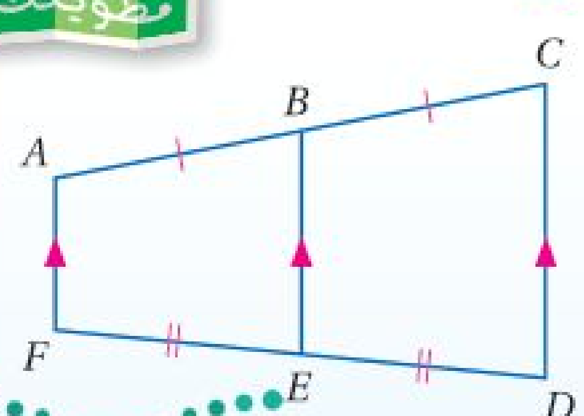
القطعة المتوسطة: تسمى القطعة المتوسطة لشبه المنحرف أيضًا القطعة المنصّفة.

نظرية 5.24　نظريّة القطعة المتوسطة لشبه المنحرف

أضف إلى مطويتك

القطعة المتوسطة لشبه المنحرف توازي كلًّا من القاعدتين، وطولها يساوي نصف مجموع طولي القاعدتين.

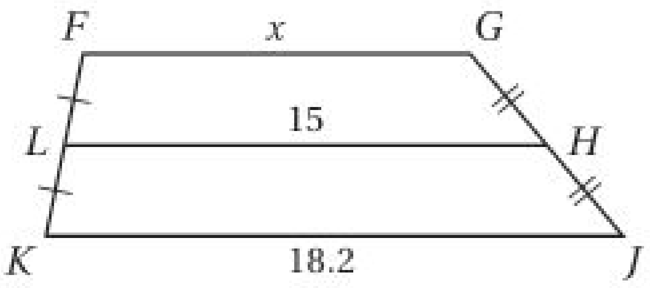
مثال: إذا كانت $\overline{BE}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف $ACDF$ ، فإنّ $\overline{AF} \parallel \overline{BE}$, $\overline{CD} \parallel \overline{BE}$ ، $BE = \frac{1}{2}(AF + CD)$.



سوف تبرهن النظريّة 5.24 في السؤال 25 .

مثال 3 من اختبار

في الشكل المجاور، $\overline{LH}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف $FGJK$. ما قيمة x؟



اقرأ سؤال الاختبار

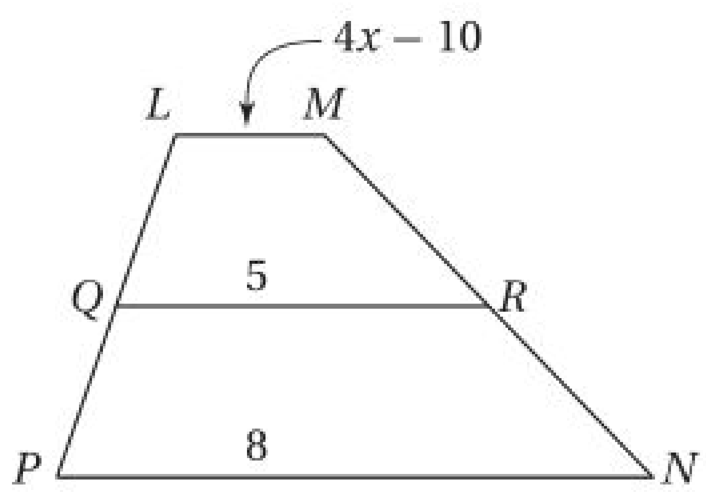
أُعطيت في السؤال طول القطعة المتوسطة لشبه المنحرف وطول إحدى قاعدتيه. ويطلب إليك إيجاد طول القاعدة الأخرى.

حل سؤال الاختبار

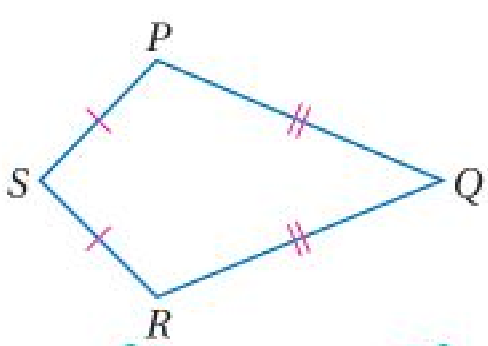
$LH = \frac{1}{2}(FG + KJ)$	نظرية القطعة المتوسطة لشبه المنحرف
$15 = \frac{1}{2}(x + 18.2)$	بالتعويض
$30 = x + 18.2$	بضرب كلا الطرفين في 2
$11.8 = x$	بطرح 18.2 من كلا الطرفين

تحقق من فهمك

3) في الشكل أدناه، $\overline{QR}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف $LMNP$. ما قيمة x؟



خصائص شكل الطائرة الورقيّة: **شكل الطائرة الورقيّة** هو شكل رباعي يتكون من زوجين متمايزين من الأضلاع المتجاورة المتطابقة. وعلى عكس متوازي الأضلاع، كل ضلعين متقابلين في شكل الطائرة الورقيّة ليسا متطابقين ولا متوازيين.

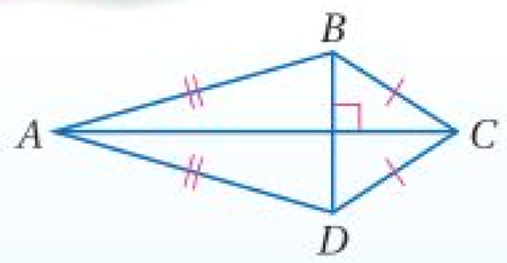


نظريات

أضف إلى مطويتك

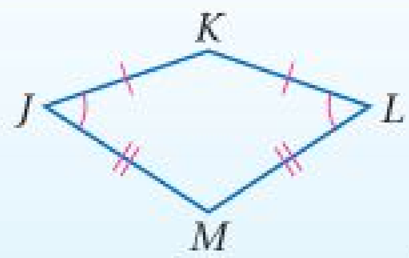
شكل الطائرة الورقيّة

5.25 قطرا شكل الطائرة الورقية متعامدان.



مثال: بما أن $ABCD$ شكل طائرة ورقيّة ، فإنّ $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

5.26 يوجد في شكل الطائرة الورقية زوج واحد فقط من الزوايا المتقابلة المتطابقة، هما الزاويتان المحصورتان بين كل ضلعين متجاورين غير متطابقين.



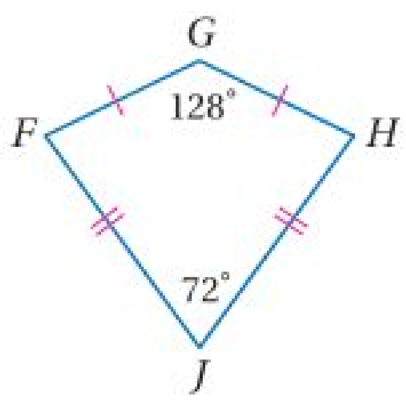
مثال: بما أن $JKLM$ شكل طائرة ورقيّة، فإنّ $\angle J \cong \angle L$ ، $\angle K \ncong \angle M$.

سوف تبرهن النظريتين 5.26 , 5.25 في السؤالين 23 ,22 على الترتيب.

يمكنك استعمال النظريتين أعلاه ونظرية فيثاغورس ونظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع لإيجاد القياسات المجهولة في شكل الطائرة الورقيّة.

مثال 4 استعمال خصائص شكل الطائرة الورقيّة

a) إذا كان $FGHJ$ شكل طائرة ورقيّة، فأوجد $m\angle F$.

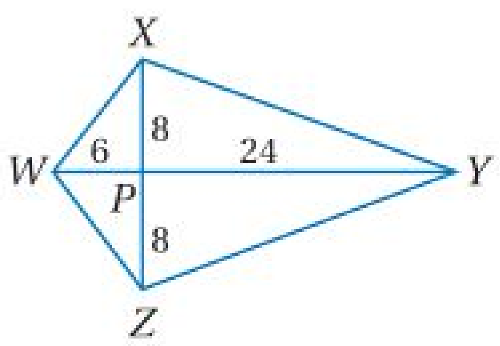


في شكل الطائرة الورقيّة زوج واحد فقط من الزوايا المتقابلة المتطابقة، وبما أن $\angle G \ncong \angle J$ ، فإنّ $\angle F \cong \angle H$؛ لذلك $m\angle F = m\angle H$.

اكتب معادلة وحلّها لإيجاد $m\angle F$.

$m\angle F + m\angle G + m\angle H + m\angle J = 360°$	نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع
$m\angle F + 128° + m\angle F + 72° = 360°$	بالتعويض
$2m\angle F + 200° = 360°$	بالتبسيط
$2m\angle F = 160°$	بطرح 200 من كلا الطرفين
$m\angle F = 80°$	بقسمة كلا الطرفين على 2

b) إذا كان $WXYZ$ شكل طائرة ورقيّة، فأوجد ZY .



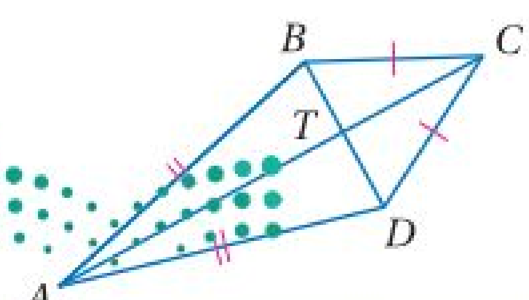
بما أن قطري شكل الطائرة الورقيّة متعامدان فإنهما يقسمانه إلى أربعة مثلثات قائمة الزاوية. استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد ZY ، وهو طول وتر المثلث القائم الزاوية $\triangle YPZ$.

$PZ^2 + PY^2 = ZY^2$	نظرية فيثاغورس
$8^2 + 24^2 = ZY^2$	بالتعويض
$640 = ZY^2$	بالتبسيط
$\sqrt{640} = ZY$	بأخذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين
$8\sqrt{10} = ZY$	بالتبسيط

الربط مع الحياة

أقصى سرعة مسجّلة لطائرة ورقيّة 120 mi/h. وأقصى ارتفاع مسجّل لطائرة ورقيّة 12471 ft.

تحقق من فهمك



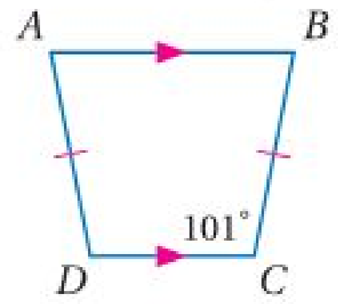
4A) إذا كان $ABCD$ شكل طائرة ورقية، فيه: $m\angle BCD = 50°$, $m\angle BAD = 38°$ ، فأوجد $m\angle ADC$.

4B) إذا كان $TC = 8$, $BT = 5$ ، فأوجد CD.

تأكد

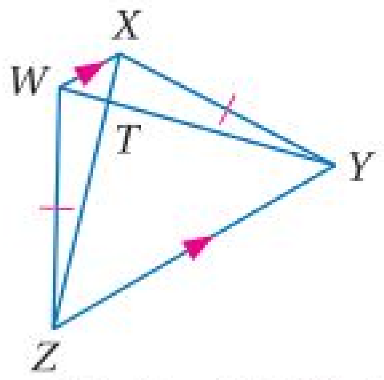
المثال 1 أوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

1) $m\angle D$



2) WT، إذا كان:

$ZX = 20,\ TY = 15$

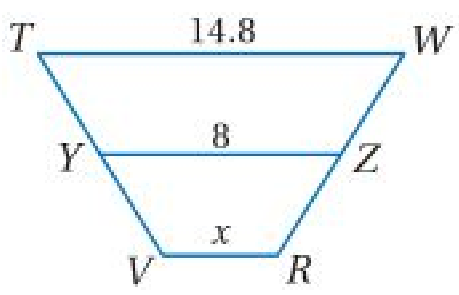


المثال 2 **هندسة إحداثية:** رؤوس الشكل الرباعي $ABCD$ هي $A(-4, -1), B(-2, 3), C(3, 3), D(5, -1)$.

3) بيّن أنّ $ABCD$ شبه منحرف.

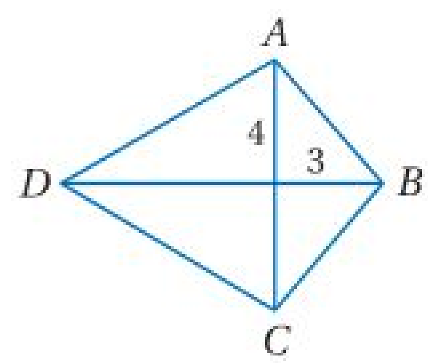
4) حدّد ما إذا كان $ABCD$ شبه منحرف متطابق الساقين؟ وضِّح إجابتك.

المثال 3 5) **إجابة قصيرة:** في الشكل المجاور: $\overline{YZ}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف $TWRV$. أوجد قيمة x.

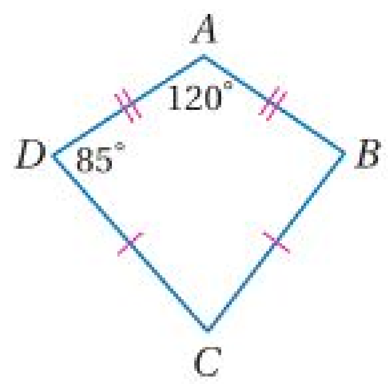


المثال 4 إذا كان $ABCD$ على شكل طائرة ورقيّة، فأوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

6) AB



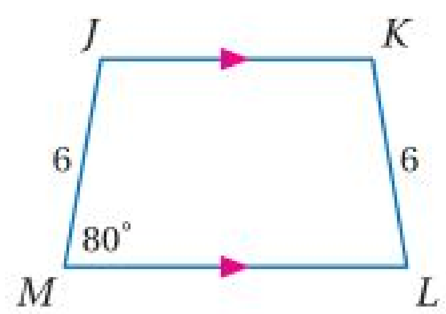
7) $m\angle C$



تدرب وحل المسائل

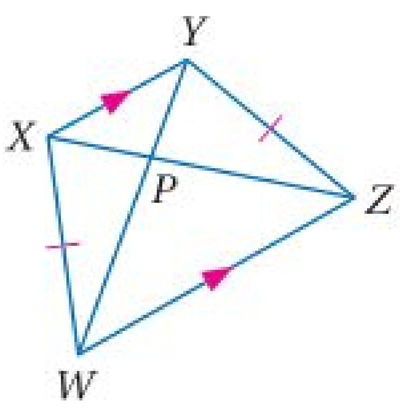
المثال 1 أوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

8) $m\angle K$



9) PW، إذا كان:

$XZ = 18,\ PY = 3$



المثال 2 **هندسة إحداثية:** بيّن أن الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي شبه منحرف، وحدِّد ما إذا كان متطابق الساقين؟

10) $A(-2, 5), B(-3, 1), C(6, 1), D(3, 5)$

11) $J(-4, -6), K(6, 2), L(1, 3), M(-4, -1)$

12) $Q(2, 5), R(-2, 1), S(-1, -6), T(9, 4)$

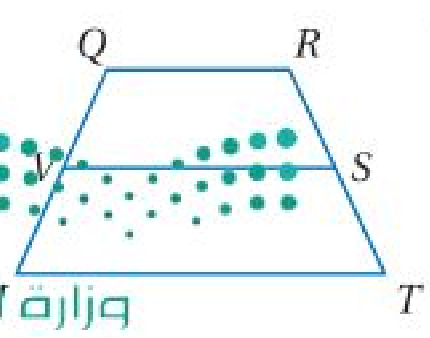
13) $W(-5, -1), X(-2, 2), Y(3, 1), Z(5, -3)$

المثال 3 في الشكل المجاور، S, V نقطتا منتصفي الساقين لشبه المنحرف $QRTU$.

14) إذا كان $QR = 12$, $UT = 22$ ، فأوجد VS.

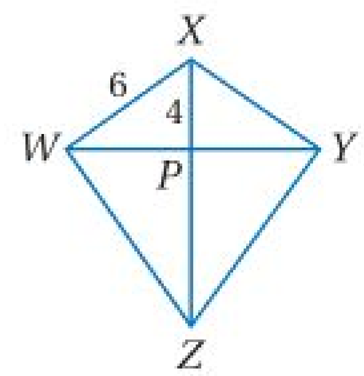
15) إذا كان $VS = 9$, $UT = 12$ ، فأوجد QR.

16) إذا كان $RQ = 5$, $VS = 11$ ، فأوجد UT.

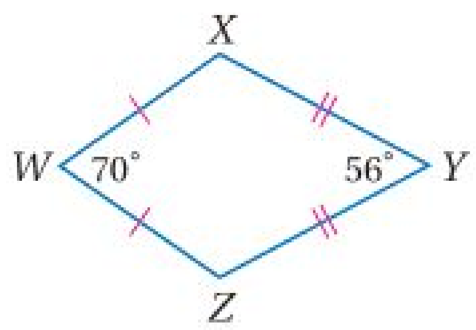


المثال 4 إذا كان $WXYZ$ شكل طائرة ورقيّة، فأوجد القياس المطلوب في كل مما يأتي:

17) WP



18) $m\angle X$

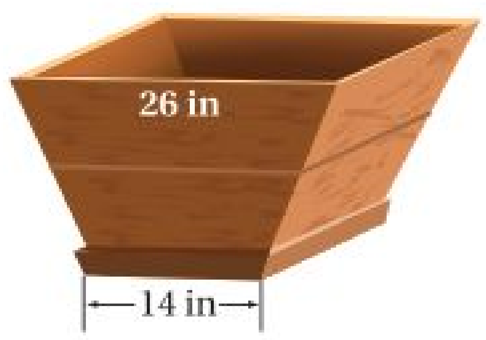


برهان: اكتب برهانًا حرًّا لكلٍّ من النظريات الآتية:

19) النظريّة 5.21 **20)** النظريّة 5.22 **21)** النظريّة 5.23

22) النظريّة 5.25 **23)** النظريّة 5.26

24) نباتات: اشترى مشاري أصيصًا زراعيًّا أوجهه الأربعة على شكل شبه منحرف أبعاده كما في الشكل المجاور. إذا أراد مشاري وضع رف أفقي عند منتصف الأصيص؛ لتستند إليه النبتة، فكم يكون عرض هذا الرفّ؟



الربط مع الحياة

تمتاز الأصص الفخارية بالمسامية والتهوية وصرف المياه الزائدة، ما يسمح بنمو جيد للجذور، وهي من أفضل الأصص الزراعية.

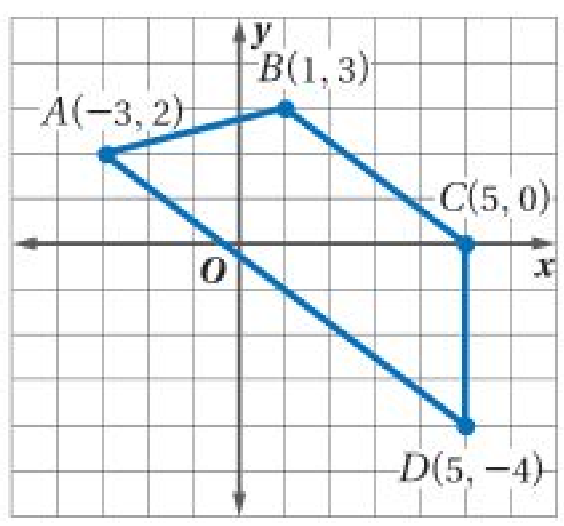
25) برهان: اكتب برهانًا إحداثيًّا للنظريّة 5.24.

26) هندسة إحداثيّة: استعن بالشكل الرباعي $ABCD$ المجاور.

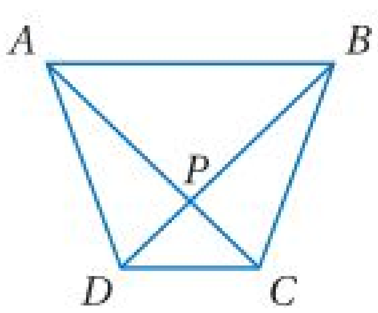
a) بيِّن أن $ABCD$ شبه منحرف. وحدِّد ما إذا كان متطابق الساقين. وضّح إجابتك.

b) هل القطعة المتوسطة محتواة في المستقيم الذي معادلته $y = -x + 1$؟ برّر إجابتك.

c) أوجد طول القطعة المتوسطة.



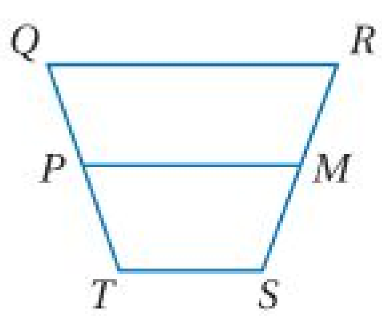
جبر: في الشكل المجاور، $ABCD$ شبه منحرف. أوجد قيمة x بحيث يكون متطابق الساقين في كلٍّ ممَّا يأتي:



27) إذا كان $AC = 3x - 7$, $BD = 2x + 8$

28) إذا كان $m\angle ABC = (4x + 11)^\circ$, $m\angle DAB = (2x + 33)^\circ$

جبر: في الشكل المجاور، M , P نقطتا منتصفي الساقين لشبه المنحرف $QRST$.



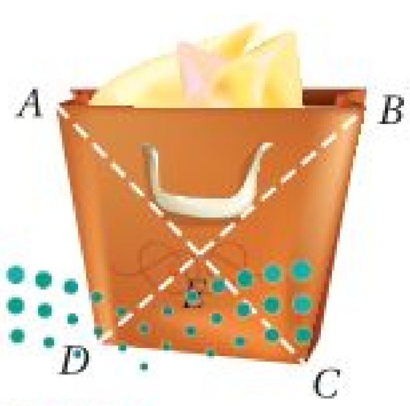
29) إذا كان $QR = 16, PM = 12, TS = 4x$ ، فأوجد قيمة x.

30) إذا كان $TS = 2x, PM = 20, QR = 6x$ ، فأوجد قيمة x.

31) إذا كان $PM = 2x, QR = 3x, TS = 10$ ، فأوجد PM.

32) إذا كان $TS = 2x + 2, QR = 5x + 3, PM = 13$ ، فأوجد TS.

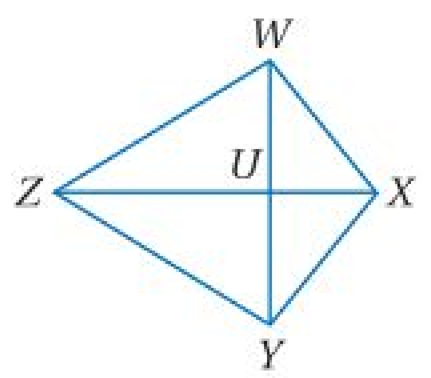
تسوّق: الوجه الجانبي لحقيبة التسوّق المبيّنة جانبًا على شكل شبه منحرف متطابق الساقين. إذا كان $EC = 9$ **in**, $DB = 19$ **in** ، $m\angle ABE = 40^\circ$, $m\angle EBC = 35^\circ$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي:



33) AE **34)** AC

35) $m\angle BCD$ **36)** $m\angle EDC$

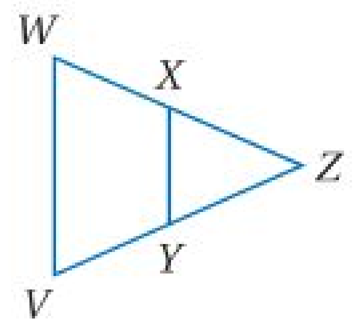
جبر: في الشكل المجاور، ***WXYZ*** شكل طائرة ورقيّة.



37) إذا كان $m\angle WXY = 120^\circ,\ m\angle WZY = (4x)^\circ$ ، $m\angle ZWX = (10x)^\circ$ ، فأوجد $m\angle ZYX$.

38) إذا كان $m\angle WXY = (13x + 24)^\circ,\ m\angle WZY = 35^\circ$ ، $m\angle ZWX = (13x + 14)^\circ$، فأوجد $m\angle ZYX$.

برهان: **اكتب برهانًا ذا عمودين.**



39) **المعطيات:** $\angle W \cong \angle ZXY$, $\overline{WZ} \cong \overline{ZV}$ ، $\overline{XY}$ تنصِّف كلًّا من $\overline{WZ}$ و $\overline{ZV}$.

المطلوب: $WXYV$ شبه منحرف متطابق الساقين.

40) **طائرة ورقيّة:** استعن بالطائرة الورقيّة في الشكل المجاور . اكتب باستعمال خصائص شكل الطائرة الورقية برهانًا ذا عمودين لبيان أنّ $\triangle MNR$ يطابق $\triangle PNR$.

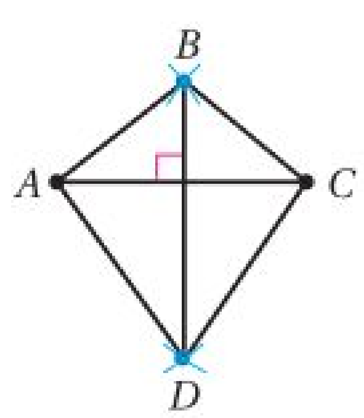
41) **أشكال ڤن:** ارسم شكل ڤن يوضح جميع الأشكال الرباعيّة متضمنًا شبه المنحرف المتطابق الساقين، وشكل الطائرة الورقيّة وعموم الأشكال الرباعيّة التي لا أسماء خاصة لها.

هندسة إحداثيّة: **حدد ما إذا كان الشكل المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي شبه منحرف، أم متوازي أضلاع، أم مستطيلًا، أم مربعًا، أم معينًا، أم هو شكل رباعي فحسب؟ اختر أكثر المسمّيات تحديدًا، ووضِّح إجابتك.**

42) $A(-1, 4), B(2, 6), C(3, 3), D(0, 1)$

43) $W(-3, 4), X(3, 4), Y(5, 3), Z(-5, 1)$

44) **تمثيلات متعدِّدة:** سوف تستقصي في هذه المسألة إحدى خصائص شكل الطائرة الورقيّة.



a) **هندسيًّا:** ارسم قطعة مستقيمة. وأنشئ عمودًا منصفًا لها لا تنصفه القطعة المستقيمة ولا تساويه طولًا. ثم صِلْ أطراف القطعتين المستقيمتين لتكوِّن الشكل الرباعي $ABCD$ كما في الشكل المجاور. كرّر هذه العملية مرتين، وسمِّ الشكلين الرباعيين الجديدين $WXYZ$, $PQRS$.

b) **جدوليًّا:** انقل الجدول الآتي وأكمله.

الشكل	الضلع	الطول	الضلع	الطول	الضلع	الطول	الضلع	الطول
$ABCD$	$\overline{AB}$		$\overline{BC}$		$\overline{CD}$		$\overline{DA}$	
$PQRS$	$\overline{PQ}$		$\overline{QR}$		$\overline{RS}$		$\overline{SP}$	
$WXYZ$	$\overline{WX}$		$\overline{XY}$		$\overline{YZ}$		$\overline{ZW}$	

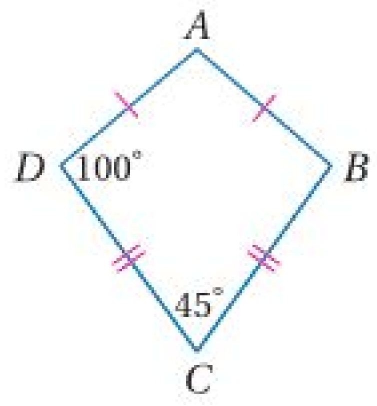
c) **لفظيًّا:** اكتب تخمينًا حول الشكل الرباعي الذي قطراه متعامدان وغير متطابقين، وأحدهما فقط ينصِّف الآخر.

برهان: **اكتب برهانًا إحداثيًّا لكل من العبارتين الآتيتين :**

45) قطرا شبه المنحرف المتطابق الساقين متطابقان.

46) القطعة المتوسطة لشبه المنحرف المتطابق الساقين توازي كلًّا من القاعدتين.

مسائل مهارات التفكير العليا



47) **اكتشف الخطأ:** أوجد كل من عادل وسعيد $m\angle A$ في شكل الطائرة الورقيّة $ABCD$ المجاور . هل إجابة أي منهما صحيحة؟ وضِّح إجابتك.

عادل	سعيد
$m\angle A = 115°$	$m\angle A = 45°$

48) **تحدٍّ:** إذا كان الضلعان المتوازيان في شبه منحرف محتويين في المستقيمين $y = x + 4, y = x - 8$ ، فما معادلة المستقيم الذي يحتوي القطعة المتوسطة لشبه المنحرف؟

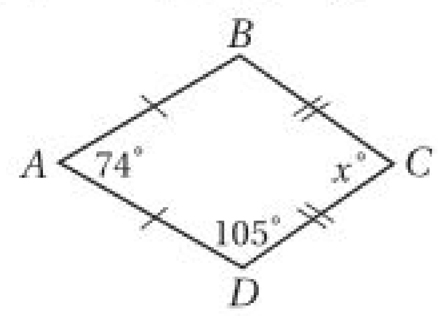
49) **تبرير:** هل العبارة " *المربع هو أيضًا شكل طائرة ورقيّة* " صحيحة أحيانًا أم دائمًا أم غير صحيحة أبدًا ؟ وضّح إجابتك.

50) **مسألة مفتوحة:** ارسم شبه المنحرف $ABCD$ ، وشبه المنحرف $FGHJ$ غير المتطابقين وفيهما $\overline{AC} \cong \overline{FH}$ و $\overline{BD} \cong \overline{GJ}$.

51) **اكتب:** قارن بين خصائص كلٍّ من: شبه المنحرف وشبه المنحرف المتطابق الساقين وشكل الطائرة الورقيّة.

تدريب على اختبار

52) إذا كان $ABCD$ شكل طائرة ورقيّة، فما قياس $\angle C$؟



53) ما الشكل الذي يمكن أن يكون مثالًا مضادًّا للتخمين الآتي؟
إذا كان قطرا شكل رباعي متطابقين فإنه مستطيل .

A المربّع

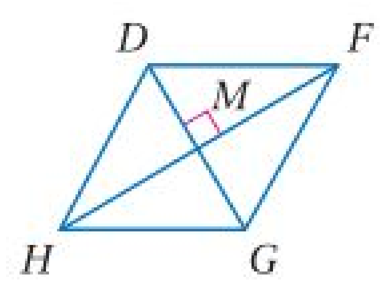
B المعين

C متوازي الأضلاع

D شبه المنحرف المتطابق الساقين

مراجعة تراكمية

جبر: استعن بالمعين $DFGH$ فيما يأتي: (الدرس 5-5)

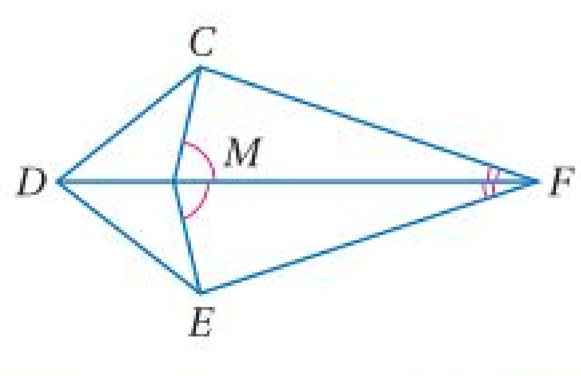


54) إذا كان $m\angle FGH = 118°$ ، فأوجد $m\angle MHG$.

55) إذا كان $DM = 4x - 3 , MG = x + 6$ ، فأوجد DG.

56) إذا كان $HD = 15 , HM = 12$ ، فأوجد MG.

57) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين. (الدرس 5-5)



المعطيات: $\angle CMF \cong \angle EMF$ ،
$\angle CFM \cong \angle EFM$

المطلوب: $\triangle DMC \cong \triangle DME$

استعد للدرس اللاحق

أوجد ميل القطعة المستقيمة المعطاة إحداثيات طرفيها في كل مما يأتي:

58) $(x, 4y), (-x, 4y)$

59) $(-x, 5x), (0, 6x)$

60) $(y, x), (y, y)$

الفصل 5 دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

زوايا المضلع (الدرس 5-1)

- يعطى مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع محدب بالصيغة $S = (n-2)\cdot 180°$، حيث n عدد الأضلاع .
- مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة لمضلع محدّب بأخذ زاوية واحدة عند كل رأس يساوي $360°$.

خصائص متوازي الأضلاع : (الدرسان 5-2 و 5-3)

- كل ضلعين متقابلين متطابقان.
- كل زاويتين متقابلتين متطابقتان.
- كل زاويتين متحالفتين متكاملتان.
- إذا كانت إحدى الزوايا قائمة، فإنّ الزوايا الأخرى قوائم.
- القطران ينصّف كل منهما الآخر.
- قطره يقسمه إلى مثلثين متطابقين.

خصائص المستطيل والمعين والمربع وشبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية (الدروس 5-4 إلى 5-6)

- للمستطيل جميع خصائص متوازي الأضلاع. وقطراه متطابقان. وزواياه الأربع قوائم.
- للمعين جميع خصائص متوازي الأضلاع. وجميع أضلاعه متطابقة، وقطراه متعامدان، وينصفان زواياه.
- للمربع جميع خصائص متوازي الأضلاع والمستطيل والمعين.
- زاويتا كل قاعدة في شبه المنحرف المتطابق الساقين متطابقتان، والقطران متطابقان أيضًا.
- قطرا شكل الطائرة الورقية متعامدان، ويوجد فيه زوج واحد فقط من الزوايا المتقابلة المتطابقة هما الزاويتان المحصورتان بين كل ضلعين متجاورين غير متطابقين.

المطويات منظم أفكار

تأكد من أن **المفاهيم الأساسية** مدونة في مطويتك.

المفردات الأساسيّة

- **القطر** (ص. 280)
- **متوازي الأضلاع** (ص. 289)
- **المستطيل** (ص. 306)
- **المعين** (ص. 312)
- **المربّع** (ص. 313)
- **شبه المنحرف** (ص. 320)
- **قاعدتا شبه المنحرف** (ص. 320)
- **ساقا شبه المنحرف** (ص. 320)
- **زاويتا القاعدة** (ص. 320)
- **شبه المنحرف المتطابق الساقين** (ص. 320)
- **القطعة المتوسطة لشبه المنحرف** (ص. 322)
- **شكل الطائرة الورقيّة** (ص. 323)

اختبار المفردات

بيّن ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحةٍ أو غير صحيحةٍ ، وإذا كانت غير صحيحةٍ فاستبدل بالكلمة التي تحتها خط كلمة من القائمة أعلاه؛ لتجعل الجملة صحيحة:

1) زاويتا قاعدة شبه المنحرف متطابقتان.

2) إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلًا، فإنّ قطريه متطابقان.

3) القطعة المتوسطة لشبه المنحرف تصل بين رأسين غير متتالين فيه.

4) قاعدة شبه المنحرف هي إحدى ضلعيه المتوازيين.

5) قطرا المعين متعامدان.

6) قطر شبه المنحرف قطعة مستقيمة تصل بين نقطتي منتصفي ساقيه.

7) المستطيل يكون دائمًا متوازي أضلاع.

8) الشكل الرباعي الذي فيه زوجٌ واحدٌ من الأضلاع المتوازية هو متوازي أضلاع.

9) المعين الذي إحدى زواياه قائمة مستطيل.

10) ساق شبه المنحرف هو أحد ضلعيه غير المتوازيين.

الفصل 5

دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

5-1 زوايا المضلع (ص 280–288)

أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة في كل من المضلعين المحدّبين الآتيين :

11) العشاري.

12) ذو 15 ضلعًا.

13) **زخرفة :** يمثّل نموذج الزخرفة المجاور شكلًا سداسيًّا منتظمًا. أوجد مجموع قياسات زواياه الداخليّة.

أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى قياس إحدى زواياه الداخلية في كل مما يأتي:

14) 135°

15) 168°

مثال 1

أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع محدّب عدد أضلاعه 22 ضلعًا.

$S = (n-2)\cdot 180^\circ$	بكتابة معادلة
$= (22-2)\cdot 180^\circ$	بالتعويض
$= 20\cdot 180^\circ$	بالطرح
$= 3600^\circ$	بالضرب

مثال 2

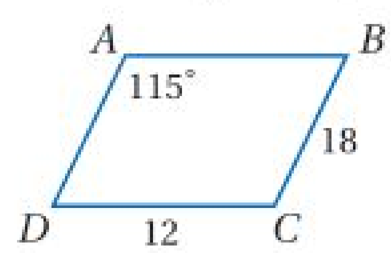
قياس زاوية داخليّة لمضلع منتظم 157.5. أوجد عدد أضلاعه.

$157.5n = (n-2)\cdot 180^\circ$	بكتابة المعادلة
$157.5^\circ n = 180^\circ n - 360^\circ$	خاصيّة التوزيع
$-22.5^\circ n = -360^\circ$	بالطرح
$n = 16$	بالقسمة

إذن عدد أضلاع المضلع 16 ضلعًا.

5-2 متوازي الأضلاع (ص 289–296)

استعمل $\square ABCD$ المبيَّن جانبًا لإيجاد كل مما يأتي :



16) $m\angle ADC$

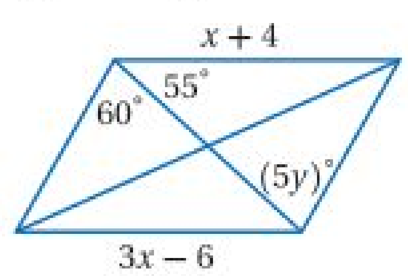
17) AD

18) AB

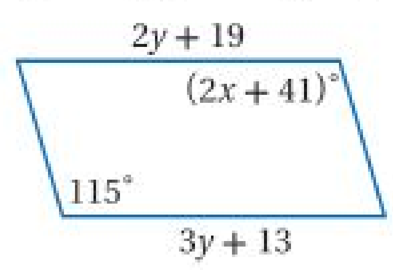
19) $m\angle BCD$

جبر: أوجد قيمتي y , x في كل من متوازيي الأضلاع الآتيين:

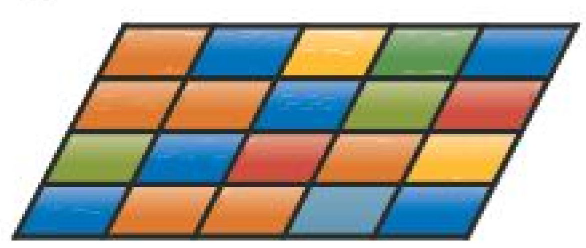
20)



21)

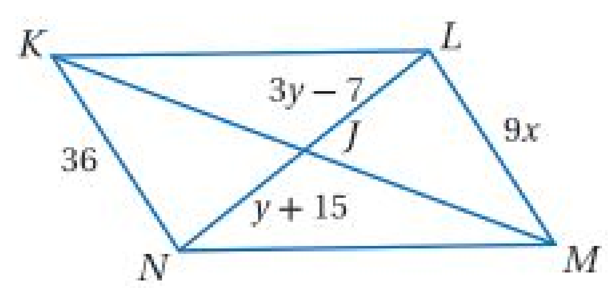


22) **تصميم:** ما المعطيات الضرورية لتحديد ما إذا كانت الأجزاء المكونة للنمط أدناه متوازيات أضلاع؟



مثال 3

جبر: إذا كان $KLMN$ متوازي أضلاع، فأوجد قيمة المتغير في كل مما يأتي :



a) x

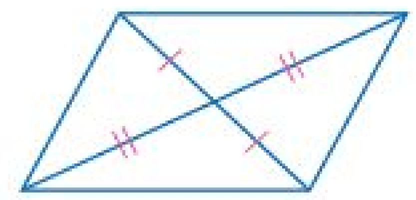
$\overline{KN} \cong \overline{LM}$	الأضلاع المتقابلة في $\square$ متطابقة
$KN = LM$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$36 = 9x$	بالتعويض
$4 = x$	بالقسمة

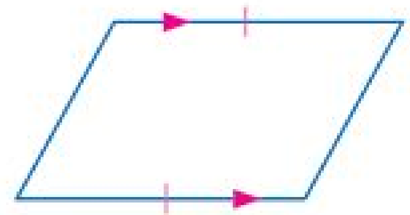
b) y

$\overline{NJ} \cong \overline{JL}$	قطرا $\square$ ينصّف كل منهما الآخر
$NJ = JL$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$y + 15 = 3y - 7$	بالتعويض
$-2y = -22$	بالطرح
$y = 11$	بالقسمة

5-3 تمييز متوازي الأضلاع (ص 297–304)

حدِّد ما إذا كان الشكل الرباعي في كل مما يأتي متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك.

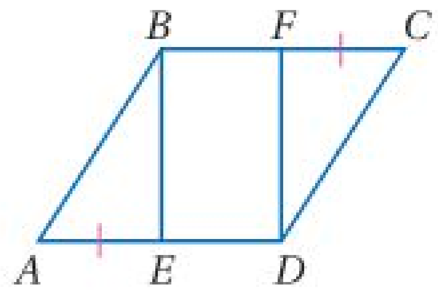
23) 

24) 

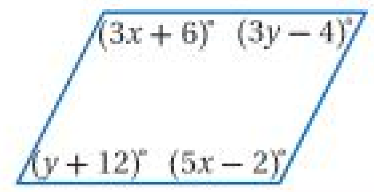
25) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.

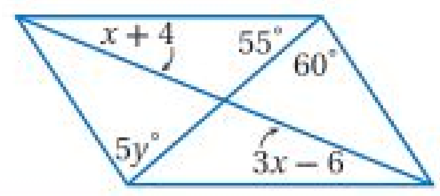
المعطيات: $\square ABCD$ ، $\overline{AE} \cong \overline{CF}$

المطلوب: $EBFD$ متوازي أضلاع.



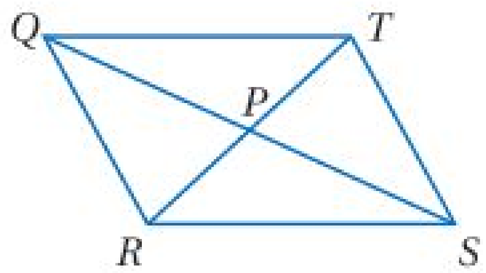
جبر: أوجد قيمتي y , x في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

26) 

27) 

مثال 4

إذا كان $TP = 4x + 2,\ QP = 6 - 2y,\ PS = 12 - 5y$، $PR = 6x - 4$، فأوجد قيمتي x, y بحيث يكون $QRST$ متوازي أضلاع.

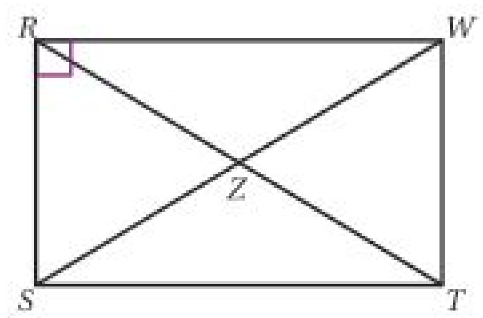


أوجد قيمة x بحيث تكون $\overline{TP} \cong \overline{PR}$ وقيمة y بحيث تكون $\overline{QP} \cong \overline{PS}$.

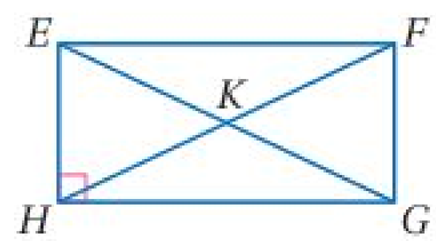
$TP = PR$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$4x + 2 = 6x - 4$	بالتعويض
$-2x = -6$	بالطرح
$x = 3$	بالقسمة
$QP = PS$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$6 - 2y = 12 - 5y$	بالتعويض
$3y = 6$	بالطرح
$y = 2$	بالقسمة

5-4 المستطيل (ص 306–311)

28) **جبر:** الشكل الرباعي $RSTW$ مستطيل، إذا كان $RZ = (2x+5)\text{in}$، $SW = (5x-20)\text{in}$، فأوجد x؟



جبر: استعن بالمستطيل $EFGH$ أدناه.



29) إذا كان $m\angle FEG = 57°$، فأوجد $m\angle GEH$.

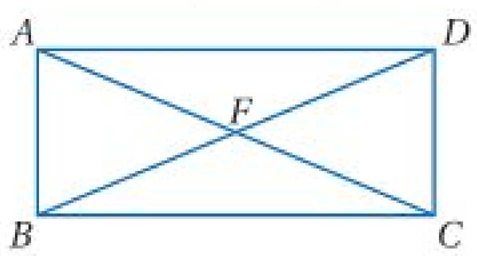
30) إذا كان $m\angle HGE = 13°$، فأوجد $m\angle FGE$.

31) إذا كان $FK = 32$ ft، فأوجد EG.

32) أوجد $m\angle HEF + m\angle EFG$.

مثال 5

جبر: في المستطيل $ABCD$ أدناه، إذا كان $m\angle ADB = (4x+8)°,\ m\angle DBA = (6x+12)°$، فأوجد قيمة x.



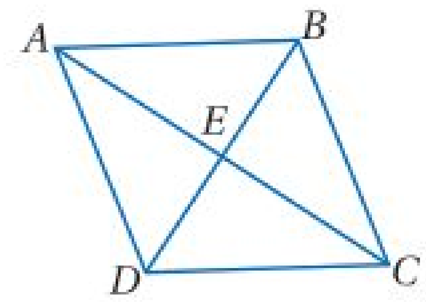
بما أنّ $ABCD$ مستطيل، فإنّ $m\angle ABC = 90°$. وبما أن الأضلاع المتقابلة في المستطيل متوازية، والزوايا المتبادلة داخليًّا بالنسبة للقطرين متطابقة، فإنّ $\angle DBC \cong \angle ADB$، ومن تعريف التطابق $m\angle DBC = m\angle ADB$.

$m\angle DBC + m\angle DBA = 90°$	مسلمة جمع الزوايا
$m\angle ADB + m\angle DBA = 90°$	بالتعويض
$(4x + 8)° + (6x + 12)° = 90°$	بالتعويض
$10x° + 20° = 90°$	بالجمع
$10x° = 70°$	بالطرح
$x = 7$	بالقسمة

دليل الدراسة والمراجعة

5-5 المعين والمربع (ص 312–319)

جبر: في المعين $ABCD$ ، إذا كان $EB = 9, AB = 12$ ، $m\angle ABD = 55°$، فأوجد كلًّا مما يأتي :



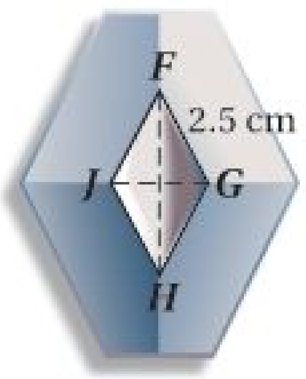
33) AE

34) $m\angle BDA$

35) CE

36) $m\angle ACB$

37) **شعار:** تتخذ شركة سيارات الشكل المجاور علامة تجارية لها. إذا كان شكل العلامة التجارية معينًا، فما طول $\overline{FJ}$؟



هندسة إحداثيّة : حدِّد ما إذا كان $\square QRST$ المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي معينًا أو مستطيلًا أو مربعًا. اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. ووضِّح إجابتك.

38) $Q(12, 0), R(6, -6), S(0, 0), T(6, 6)$

39) $Q(-2, 4), R(5, 6), S(12, 4), T(5, 2)$

مثال 6

يتقاطع قطرا المعين $QRST$ عند النقطة P. استعمل المعطيات لإيجاد المطلوب في كل مما يأتي:

a) **جبر:** إذا كان $QT = x + 7$, $TS = 2x - 9$، فأوجد قيمة x .

$\overline{QT} \cong \overline{TS}$	تعريف المعين
$QT = TS$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$x + 7 = 2x - 9$	بالتعويض
$-x = -16$	بالطرح
$x = 16$	بالقسمة

b) إذا كان $m\angle QTS = 76°$، فأوجد $m\angle TSP$.

بما أنّ $\overline{TR}$ تنصّف $\angle QTS$، فإنّ $m\angle PTS = \frac{1}{2} m\angle QTS$.

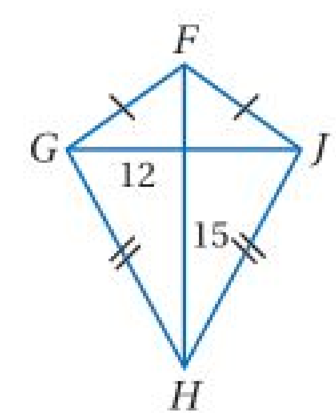
لذلك $m\angle PTS = \frac{1}{2}(76) = 38°$، وبما أنّ قطري المعين متعامدان، فإنّ $m\angle TPS = 90°$.

$m\angle PTS + m\angle TPS + m\angle TSP = 180°$	نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث
$38° + 90° + m\angle TSP = 180°$	بالتعويض
$128° + m\angle TSP = 180°$	بالجمع
$m\angle TSP = 52°$	بالطرح

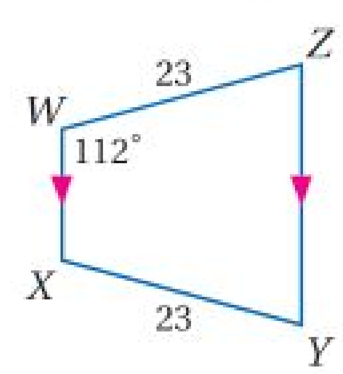
5-6 شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقيّة (ص 320–328)

أوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

40) GH



41) $m\angle Z$



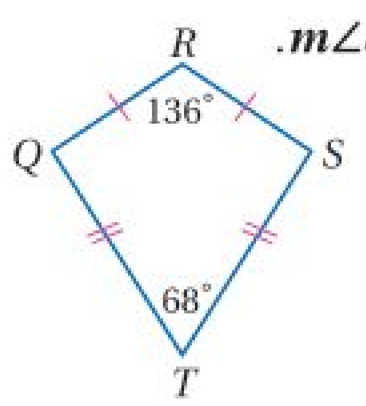
42) **تصميم:** استعن بقطعة البلاط المربعة الشكل المبينة جانبًا في السؤالين الآتيين:

a) صف طريقة لتحديد ما إذا كانت أشكال شبه المنحرف الظاهرة في البلاطة متطابقة الساقين؟

b) إذا كان محيط البلاطة 48 in، ومحيط المربّع الأحمر 16 in، فما محيط أحد أشكال شبه المنحرف ؟

مثال 7

إذا كان $QRST$ شكل طائرة ورقيّة، فأوجد $m\angle S$.



بما أنّ $\angle Q \cong \angle S$، فإنّ $m\angle Q = m\angle S$.

اكتب معادلة وحلّها لإيجاد $m\angle S$.

$m\angle Q + m\angle R + m\angle S + m\angle T = 360°$	نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع
$m\angle S + 136° + m\angle S + 68° = 360°$	بالتعويض
$2m\angle S + 204° = 360°$	بالتبسيط
$2m\angle S = 156°$	بالطرح
$m\angle S = 78°$	بالقسمة

الفصل 5 اختبار الفصل

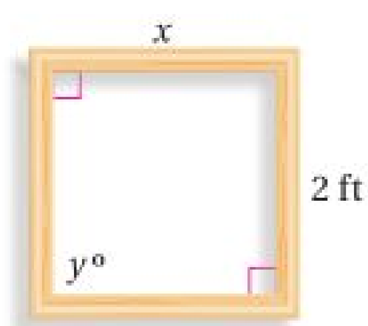
أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة في كل من المضلعين المحدبين الآتيين:

1) السداسي
2) ذو 16 ضلعًا

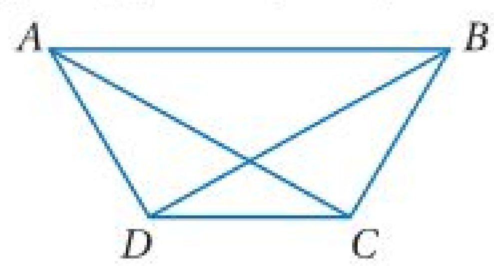
3) **فن:** تصنع جُمانة إطارًا لتبسط عليه قطعة قماش وترسم عليها بألوان زيتية. ثبتت جمانة أربع قطع من الخشب بعضها ببعض واعتقدت أنّها ستمثّل مربّـعًا.

a) كيف يمكنها التحقق من أنّ الإطار مربع؟

b) إذا كانت أبعاد الإطار كما في الشكل، فأوجد القياسات المجهولة.



الشكل الرباعي $ABCD$ شبه منحرف متطابق الساقين.



4) ما الزاوية التي تطابق $\angle C$؟

5) ما الضلع الذي يوازي $\overline{AB}$؟

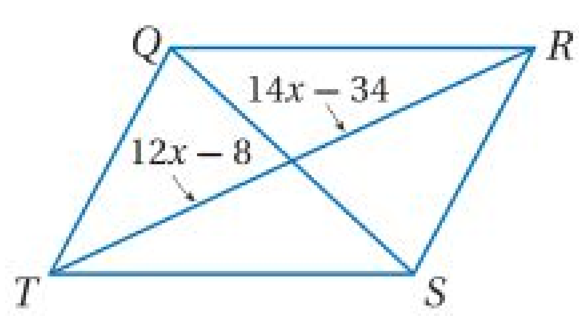
6) ما القطعة المستقيمة التي تطابق $\overline{AC}$؟

أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى مجموع قياسات زواياه في كل مما يأتي:

7) 900°
8) 1980°

9) 2880°
10) 5400°

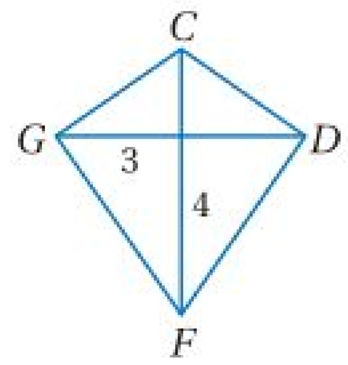
11) **اختيار من متعدِّد:** إذا كان $QRST$ متوازي أضلاع، فما قيمة x؟



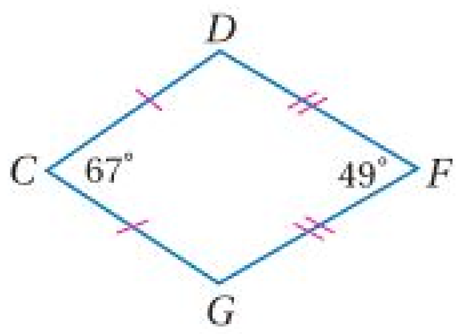
A 11
B 12
C 13
D 14

إذا كان $CDFG$ على شكل طائرة ورقيّة، فأوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

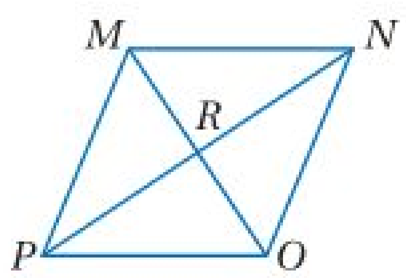
12) GF



13) $m\angle D$



جبر: **استعن بالمعين $MNOP$، للإجابة عن الأسئلة الآتية:**



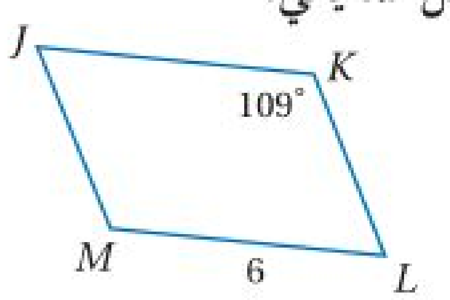
14) $m\angle MRN$

15) إذا كان $PR = 12$، فأوجد RN.

16) إذا كان $m\angle PON = 124^\circ$، فأوجد $m\angle POM$.

17) **إنشاءات:** تبني عائلة صالح ملحقًا للمنزل، وتركت فتحة لنافذة جديدة. فإذا قاس صالح الأضلاع المتقابلة فوجدها متطابقة. وقاس القطرين فوجدهما متطابقين، فهل يمكنه القول: إن فتحة النافذة تمثّل مستطيلًا؟ وضّح إجابتك.

استعمل $\square JKLM$ المبيَّن جانبًا لإيجاد كل مما يأتي:

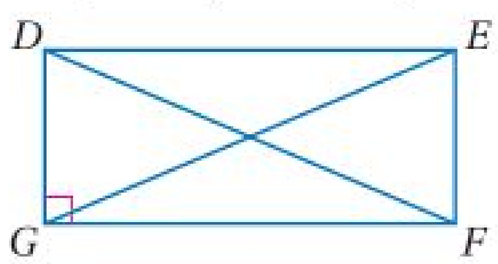


18) $m\angle JML$

19) JK

20) $m\angle KLM$

جبر: **استعن بالمستطيل $DEFG$ للإجابة عن الأسئلة الآتية:**



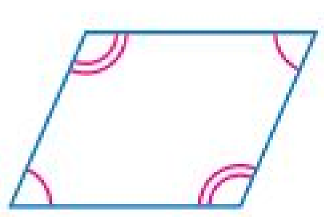
21) إذا كان $DF = 2(x + 5) - 7$, $EG = 3(x - 2)$، فأوجد EG.

22) إذا كان $m\angle EDF = (5x - 3)^\circ$, $m\angle DFG = (3x + 7)^\circ$، فأوجد $m\angle EDF$.

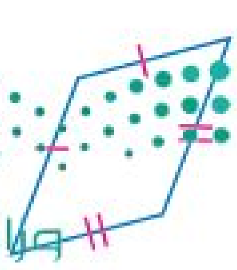
23) إذا كان $DE = 14 + 2x$, $GF = 4(x - 3) + 6$، فأوجد GF.

حدِّد ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع أم لا في كل مما يأتي. برّر إجابتك.

24)



25)



تطبيق التعريفات والخصائص

يتطلب حل كثير من المسائل الهندسيّة في الاختبارات تطبيق التعريفات والخصائص. استعمل هذه الصفحة والتي تليها للتدرّب على تطبيق التعريفات والخصائص عند حل أسئلة الهندسة ذات الإجابات المطولة.

استراتيجيات تطبيق التعريفات والخصائص

الخطوة 1

اقرأ نص السؤال بعناية.

- حدّد المطلوب في المسألة.
- ادرس الأشكال المعطاة في المسألة.
- **اسأل نفسك:** ما خصائص هذا الشكل التي يمكنني تطبيقها لحل المسألة؟

الخطوة 2

حل المسألة.

- حدّد التعريفات أو المفاهيم الهندسيّة التي يمكنك استعمالها لمساعدتك على إيجاد القيم المجهولة في المسألة.
- استعمل التعريفات وخصائص الأشكال لكتابة معادلة وحلها.

الخطوة 3

- تحقق من إجابتك.

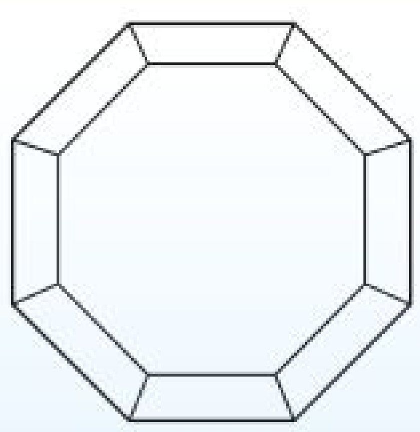
مثال

اقرأ المسألة جيدًا، وحدِّد المطلوب فيها. ثم استعمل المعطيات لحلها.

يصنع خالد إطارًا خشبيًّا على شكل ثماني منتظم محيطه 288 cm.

a) ما طول كل لوح خشبي يشكّل ضلعًا للإطار؟

b) ما الزاوية التي سيُقطع بها كل لوح عند طرفيه الخارجيين حتى تتلاءم الألواح بعضها مع بعض وتشكل الإطار؟ وضِّح إجابتك.



a) **طول كل ضلع من أضلاع الإطار أو طول كل لوح خشبي.**

الخطوة 1: اقرأ المسألة بعناية، علمت أن الألواح ستشكل ثمانيًّا منتظمًا محيطه 288 cm. والمطلوب إيجاد طول كل لوح خشبي.

الخطوة 2: حل المسألة، لإيجاد طول كل لوح، اقسم المحيط على عدد الألواح.

$$288 \div 8 = 36$$

إذن طول كل لوح يجب أن يكون 36 cm.

الخطوة 3: تحقق من حلك بإيجاد محيط المضلع: محيط المضلع المنتظم = عدد الأضلاع × طول الضلع الواحد

$$8 \times 36\,\text{cm} = 288\,\text{cm} \checkmark$$

b) **قياس الزاوية التي سيقطع بها كل لوح عند طرفيه الخارجيين حتى تتلاءم الألواح وتشكل الإطار.**

الخطوة 1: المطلوب إيجاد قياس الزاوية التي ستقطع بها الألواح عند أطرافها حتى يتلاءم بعضها مع بعض تمامًا.

الخطوة 2: حل المسألة، استعمل خاصيّة مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع المحدَّب لإيجاد قياس زاوية داخليّة للثماني المنتظم.

أوجد أولًا المجموع S لقياسات الزوايا الداخليّة.

$$\begin{aligned} S &= (n-2) \cdot 180^\circ \\ &= (8-2) \cdot 180^\circ \\ &= 1080^\circ \end{aligned}$$

إذن قياس الزاوية الداخليّة للثُّماني المنتظم يساوي $1080^\circ \div 8 = 135^\circ$. وبما أنّه سيُستعمل لوحان لتشكيل كل رأس للإطار، فإن كل طرف للألواح سيُقطع بزاوية قياسها $135^\circ \div 2 = 67.5^\circ$.

الخطوة 3: تحقق من حلك بالحل عكسيًّا

أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم (n) الذي قياس زاويته الداخلية 135°.

$$135^\circ = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$$

$$135^\circ n = 180^\circ n - 360^\circ$$

$$-45^\circ n = -360^\circ$$

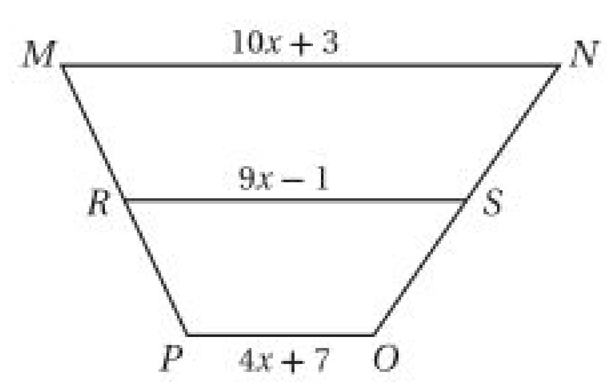
$$n = 8 \checkmark$$

تمارين ومسائل

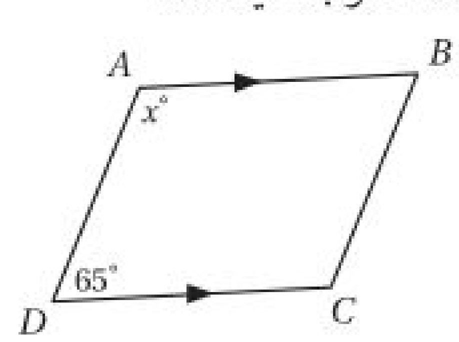
اقرأ كل مسألة مما يأتي، وحدِّد المطلوب. ثم استعمل المعطيات لحلها، وبيِّن خطوات حلك:

1) $\overline{RS}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف $MNOP$.

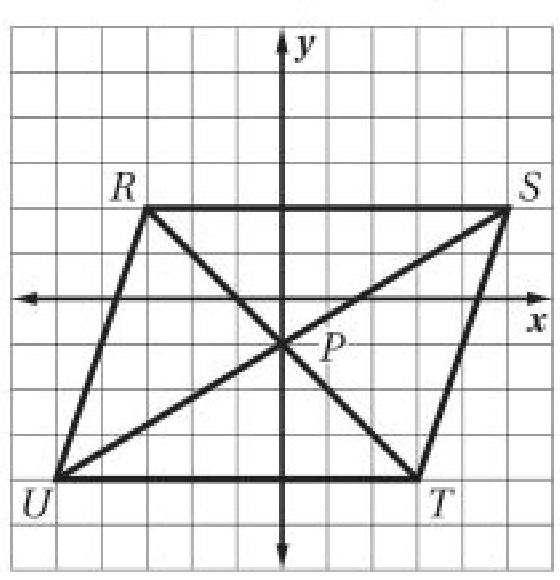
ما طول $\overline{RS}$؟



2) إذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$، فأوجد قيمة x.



3) استعن بالتمثيل البياني أدناه في كل من السؤالين الآتيين:



a) هل ينصّف قطرا الشكل الرباعي $RSTU$ كل منهما الآخر؟ استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لتتحقق من إجابتك.

b) ما نوع الشكل الرباعي $RSTU$؟ وضّح إجابتك باستعمال خصائص هذا النوع من الأشكال الرباعية أو تعريفه.

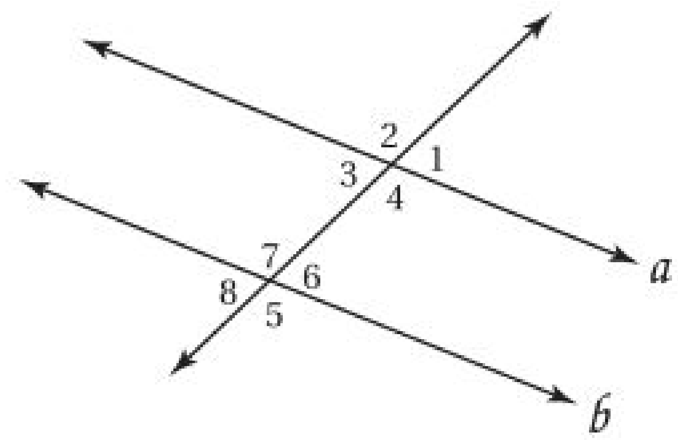
4) ما مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للثُّماني المنتظم؟

اختبار تراكمي

أسئلة الاختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال مما يأتي، ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة.

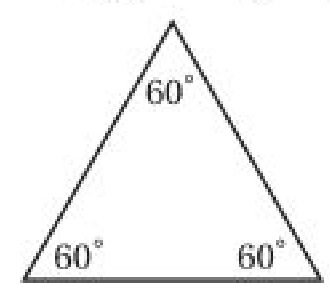
1) إذا كان $a \parallel b$ ، فأيّ العبارات الآتية ليست صحيحة؟



A $\angle 1 \cong \angle 3$ **C** $\angle 2 \cong \angle 5$

B $\angle 4 \cong \angle 7$ **D** $\angle 8 \cong \angle 2$

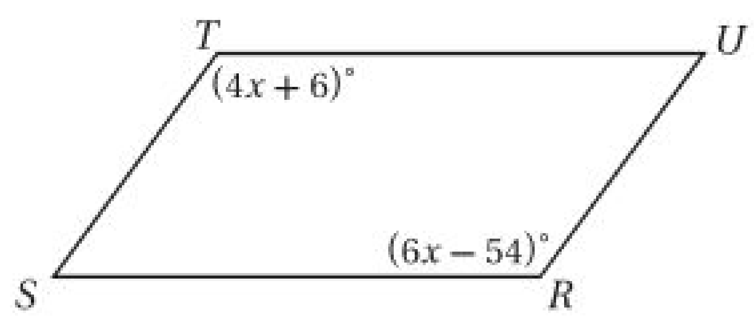
2) صنّف المثلث أدناه تبعًا لقياسات زواياه. اختر المصطلح الأنسب.



A حادّ الزوايا **C** منفرج الزاوية

B متطابق الزوايا **D** قائم الزاوية

3) أوجد قيمة x في متوازي الأضلاع $RSTU$.



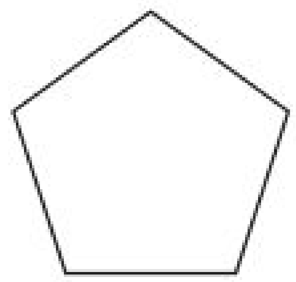
A 12 **C** 25

B 18 **D** 30

إرشادات للاختبار

السؤال 3: استعمل خصائص متوازي الأضلاع لحل المسألة. كل زاويتين متقابلتين متطابقتان.

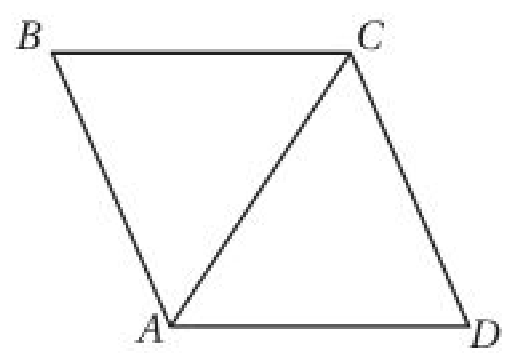
4) ما قياس كل زاوية داخلية في الخُماسي المنتظم؟



A 96° **C** 120°

B 108° **D** 135°

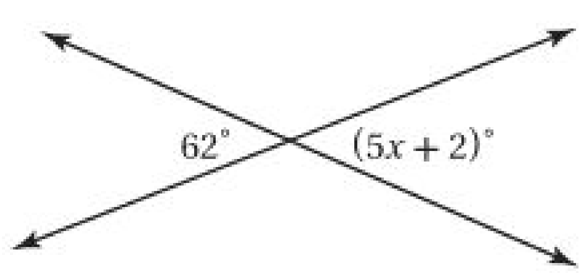
5) الشكل الرباعي $ABCD$ معين، فيه $m\angle BCD = 120^\circ$، أوجد $m\angle DAC$.



A 30° **C** 90°

B 60° **D** 120°

6) ما قيمة x في الشكل أدناه؟



A 10 **C** 14

B 12 **D** 15

7) $\overline{DT}, \overline{AE}$ قطران للمستطيل $DATE$ يتقاطعان في S. إذا كان $AE = 40, ST = x + 5$ ، فما قيمة x؟

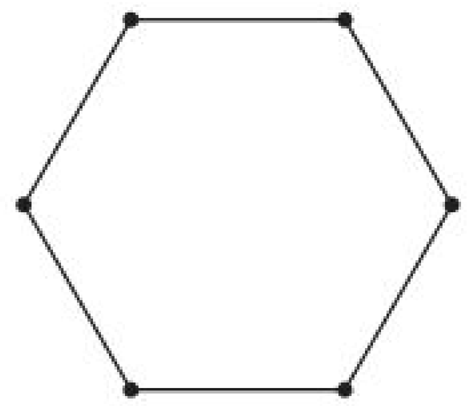
A 35 **C** 15

B 25 **D** 10

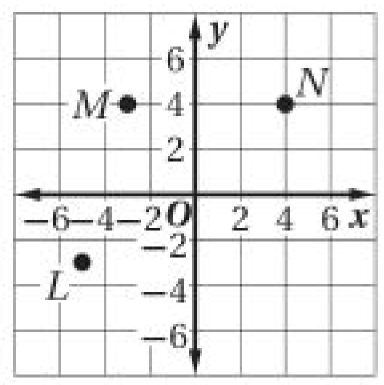
أسئلة ذات إجابات قصيرة

اكتب إجابتك في ورقة الإجابة.

8) تشكِّل أعمدة خيمة رؤوس سداسي منتظم، ما قياس الزاوية المتكوّنة عند أيّ من أركان الخيمة؟



9) ما إحداثيات الرأس الرابع لشبه المنحرف المتطابق الساقين $LMNJ$؟ بيّن خطوات الحل.



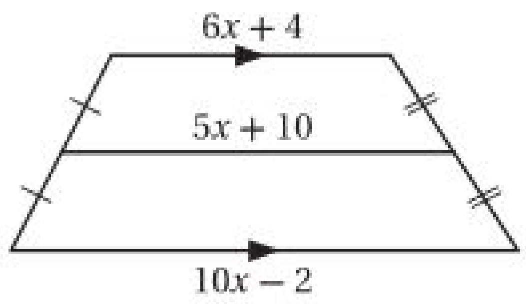
10) ماذا نسمي متوازي الأضلاع إذا كان قطراه متعامدين؟ وضّح إجابتك.

11) حدِّد ما إذا كانت النتيجة صحيحة أم لا فيما يأتي اعتمادًا على المعطيات. فسِّر تبريرك.

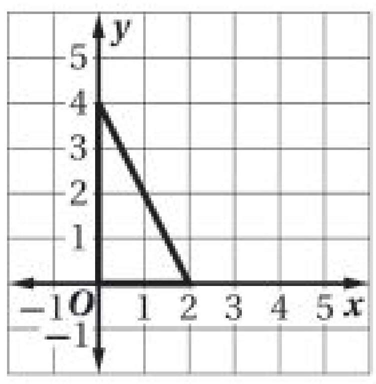
المعطيات: إذا كان العدد يقبل القسمة على 9، فإنّه يقبل القسمة على 3.
العدد 144 يقبل القسمة على 9.

النتيجة: العدد 144 يقبل القسمة على 3.

12) أوجد قيمة x في الشكل أدناه. وقرّب الإجابة إلى أقرب عُشر إن كان ذلك ضروريًّا.



13) ما إحداثيات مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث أدناه؟

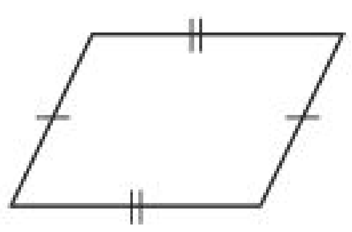


أسئلة ذات إجابات مطولة

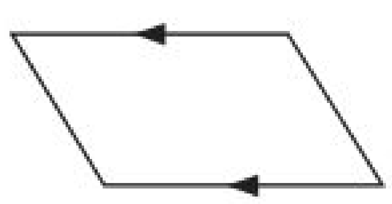
اكتب إجابتك في ورقة الإجابة مبينًا خطوات الحل.

14) هل يمكنك إثبات أنّ كل شكل مما يأتي متوازي أضلاع؟ إذا لم تستطع ذلك، فاذكر المعطيات الإضافية التي ستحتاج إليها لإثبات أنه متوازي أضلاع. ووضّح تبريرك.

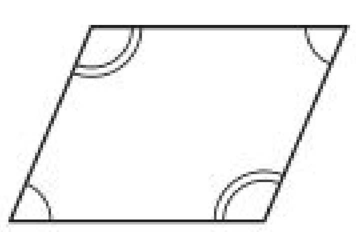
a)



b)



c)



هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

إذا لم تستطع الإجابة عن السؤال..	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
فعد إلى الدرس..	مهارة سابقة	مهارة سابقة	5-2	5-1	5-5	مهارة سابقة	5-4	5-1	5-6	5-5	مهارة سابقة	5-6	مهارة سابقة	5-3

مراجعة بعض المصطلحات والرموز

المصطلح باللغة العربية	الرمز في المرحلة المتوسطة	الرمز في المرحلة الثانوية
الإحداثي السيني	س	x
الإحداثي الصادي	ص	y
ارتفاع	ل	h
الجذر التربيعي	‾‾\	$\sqrt{}$
قياس زاوية	ق ∠ أ ب جـ	$m\angle ABC$
زاوية	∠	$\angle$
زوج مرتب	(أ ، ب)	(a, b)
قاعدة	ق	b
قطر دائرة	٢ نق	d
قطعة مستقيمة	$\overline{\text{أ ب}}$ قطعة مستقيمة طرفاها أ ، ب	$\overline{AB}$ قطعة مستقيمة طرفاها A, B
محيط الدائرة	مح	C
مركز الدائرة	م	C
مساحة	م	A
مستقيم	$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مستقيم يمر بالنقطتين أ وَ ب	$\overleftrightarrow{AB}$ مستقيم يمر بالنقطتين A, B
المسافة بين نقطتين	ف	d
نصف قطر الدائرة	نق	r
نصف مستقيم	$\overleftarrow{\text{أ ب}}$	$\overrightarrow{AB}$ نصف مستقيم يمر بالنقطة B وطرفه A
نقطة الأصل	م	o

الصيغ

الهندسة الإحداثية

نقطة المنتصف	على خط الأعداد: $M = \frac{a+b}{2}$ في المستوى الإحداثي: $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ في الفراغ: $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$	المسافة بين نقطتين	على خط الأعداد: $d = \lvert a-b \rvert$ في المستوى الإحداثي: $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$ في الفراغ: $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$
		الميل	$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, x_2 \neq x_1$

المحيط

المربع	$P = 4s$	الدائرة	$C = \pi d$ أو $C = 2\pi r$
المستطيل	$P = 2\ell + 2w$		

المساحة

المربع	$A = s^2$	المُعيَّن	$A = bh$ أو $A = \frac{1}{2}d_1 d_2$
المستطيل	$A = bh$ أو $A = \ell w$	المثلث	$A = \frac{1}{2}bh$
متوازي الأضلاع	$A = bh$	الدائرة	$A = \pi r^2$
شبه المنحرف	$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$	القطاع الدائري	$A = \frac{N}{360} \cdot \pi r^2$

المساحة الجانبية

المنشور	$L = Ph$	الهرم	$L = \frac{1}{2}P\ell$
الأسطوانة	$L = 2\pi rh$	المخروط	$L = \pi r\ell$

المساحة الكلية للسطح

المنشور	$T = Ph + 2B$	المخروط	$T = \pi r\ell + \pi r^2$
الأسطوانة	$T = 2\pi rh + 2\pi r^2$	الكرة	$T = 4\pi r^2$
الهرم	$T = \frac{1}{2}P\ell + B$		

الحجم

المكعب	$V = s^3$	الهرم	$V = \frac{1}{3}Bh$
متوازي المستطيلات	$V = \ell wh$	المخروط	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
المنشور	$V = Bh$	الكرة	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
الأسطوانة	$V = \pi r^2 h$		

الصيـغ

المعادلات في المستوى الإحداثي

معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع	$y = mx + b$	معادلة الدائرة	$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$
معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة	$y - y_1 = m(x - x_1)$	الصيغة التربيعية	$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

حساب المثلثات

قانون الجيب	$\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$	نظرية فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$
قانون جيب التمام	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$		

الرموز

a	العامِد
$\approx$	مساوٍ تقريبًا لـِ
$\widehat{AB}$	القوس الأصغر الذي طرفاه A وَ B
$\widehat{ABC}$	القوس الأكبر الذي طرفاه A وَ C
A	مساحة المضلع أو الدائرة أو القطاع الدائري
B	مساحة قاعدة المنشور أو الأسطوانة أو الهرم أو المخروط
$p \leftrightarrow q$	العبارة الشرطية الثنائية: p إذا وفقط إذا q
$\odot P$	دائرة مركزها P
C	محيط الدائرة
$p \to q$	العبارة الشرطية: إذا كان p فإن q
$\cong$	مطابق لـِ
$p \wedge q$	p وَ q
cos	جيب التمام
$^\circ$	درجة
$p \vee q$	p أو q
AB	المسافة بين النقطتين A وَ B
$=$	يساوي
$\neq$	لا يساوي
$>$	أكبر من
$\geq$	أكبر من أو يساوي
A'	صورة A
$<$	أقل من
$\leq$	أقل من أو يساوي
L	المساحة الجانبية
$m\widehat{AB}$	قياس القوس AB بالدرجات
M	نقطة المنتصف
$\sim p$	نفي العبارة p
(x, y, z)	الثلاثي المرتب
$\parallel$	موازٍ لـِ
$\nparallel$	ليس موازيًا لـِ
▱	متوازي أضلاع
P	المحيط
$\perp$	عمودي على
π	باي (ط) النسبة التقريبية
s	طول ضلع من مضلع
$\sim$	مشابه
sin	الجيب
ℓ	المستقيم ℓ ، طول المستطيل، طول القوس، الارتفاع الجانبي
m	الميل
tan	الظل
T	مساحة السطح الكلية
$\triangle$	المثلث
V	الحجم
w	عرض المستطيل

القسم الثالث

الفهرس

الفصل 6 التشابه

الفصل 7 التحويلات الهندسية و التماثل

الفهرس

الفصل 8 الدائرة

الفصل
6
التشابه
Similarity

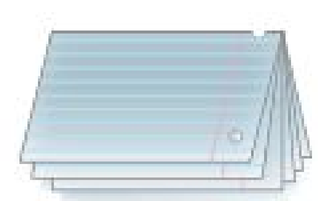
فيما سبق:
درستُ النسبة والتناسب وتطبيقاتهما الحياتية.

والآن:
- أتعرّف على المضلعات المتشابهة، وأستعمل النسبة والتناسب لحل المسائل.

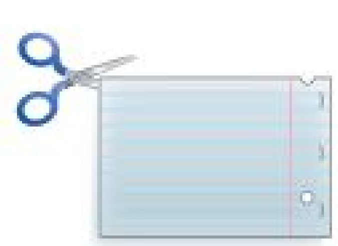
لماذا؟
تصميم: يتم تصميم بعض المجسمات والمباني لتشابه أشياء مشهورة بحيث يكون هناك تناسب بين الأطوال في تلك المجسمات ونظيراتها في الشكل الأصلي.

المطويات منظم أفكار
التشابه. اعمل هذه المطوية؛ لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول الفصل **6**، مبتدئًا بثلاث أوراق من دفتر الملاحظات.

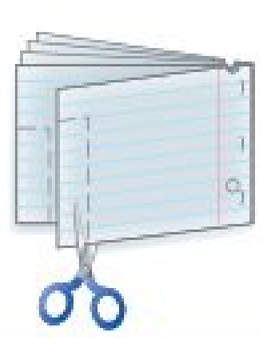
1. اطوِ كلًّا من الأوراق الثلاث من المنتصف.



2. قُصَّ الأوراق على طول خط الطيّ.



3. قُصَّ الجانب الأيسر لكل ورقة؛ لعمل شرائط فهرسة، ثم ثبِّت الحافة اليمنى؛ بحيث تشكل الأوراق دفترًا.



4. اكتب عنوان الفصل على الصفحة الأولى، وأرقام الدروس على الأشرطة، وخصص الصفحة الأخيرة للمفردات الجديدة.

التهيئة للفصل 6

تشخيص الاستعداد:

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

حل كلًّا من المعادلات الآتية:

1) $\frac{3x}{8} = \frac{6}{x}$

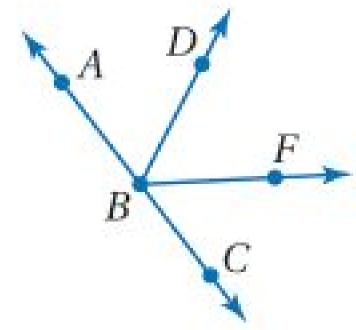
2) $\frac{7}{3} = \frac{x-4}{6}$

3) $\frac{x+9}{2} = \frac{3x-1}{8}$

4) $\frac{3}{2x} = \frac{3x}{8}$

5) **تعليم:** نسبة عدد الطلاب إلى عدد المعلمين في مدرسة هي 17 إلى 1. إذا كان عدد طلاب المدرسة 1088 طالبًا، فما عدد المعلمين؟

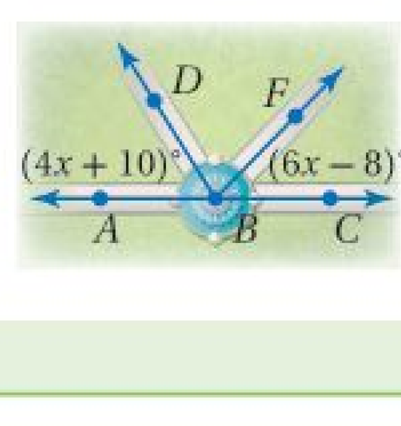
جبر: في الشكل أدناه، $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ نصفا مستقيمٍ متعاكسان، و $\overrightarrow{BD}$ ينصّف $\angle ABF$. **(مهارة سابقة)**



6) إذا كان: $m\angle ABD = (x+14)°$, $m\angle ABF = (3x-8)°$، فأوجد $m\angle ABD$.

7) إذا كان: $m\angle ABF = (10x-1)°$, $m\angle FBC = (2x+25)°$، فأوجد $m\angle DBF$.

8) **حدائق:** يخطط مهندس لإضافة ممرات تصل إلى نافورةٍ كما هو مبيّن أدناه، إذا كان $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ نصفي مستقيم متعاكسين و $\overrightarrow{BD}$ ينصّف $\angle ABF$، فأوجد $m\angle FBC$.



مراجعة سريعة

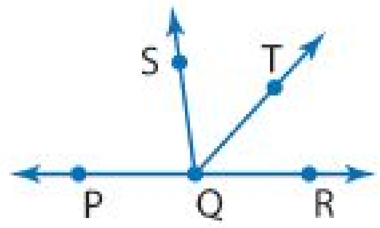
مثال 1

حل المعادلة: $\frac{4x-3}{5} = \frac{2x+11}{3}$.

$\frac{4x-3}{5} = \frac{2x+11}{3}$	المعادلة الأصليّة
$3(4x-3) = 5(2x+11)$	خاصية الضرب التبادلي
$12x - 9 = 10x + 55$	خاصيّة التوزيع
$2x = 64$	خاصية الجمع والطرح للمساواة
$x = 32$	خاصية القسمة للمساواة

مثال 2

في الشكل أدناه، $\overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{QR}$ نصفا مستقيم متعاكسان، و $\overrightarrow{QT}$ ينصّف $\angle SQR$، إذا كان: $m\angle SQR = (6x+8)°$، $m\angle TQR = (4x-14)°$، فأوجد $m\angle SQT$.



بما أنّ $\overrightarrow{QT}$ ينصّف $\angle SQR$، فإن:

$m\angle SQR = 2(m\angle TQR)$	تعريف منصّف الزاوية
$6x + 8 = 2(4x - 14)$	بالتعويض
$6x + 8 = 8x - 28$	خاصيّة التوزيع
$-2x = -36$	خاصية الطرح للمساواة
$x = 18$	خاصية القسمة للمساواة

وبما أنّ $\overrightarrow{QT}$ ينصّف $\angle SQR$، فإن:

$m\angle SQT = m\angle TQR$	تعريف منصّف الزاوية
$m\angle SQT = 4x - 14$	بالتعويض
$m\angle SQT = 58°$	بالتعويض عن $x = 18$ والتبسيط

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

6-1 المضلعات المتشابهة
Similar Polygons

فيما سبق:

درستُ استعمال التناسب لحل المسائل.

(مهارة سابقة)

والآن:

- أستعمل التناسب لتحديد المضلعات المتشابهة.
- أحل مسائل باستعمال خصائص المضلعات المتشابهة.

المفردات:

المضلعات المتشابهة
similar polygons

معامل التشابه
scale factor

نسبة التشابه
similarity ratio

لماذا؟


يزيّن بعض الأشخاص شاشات حواسيبهم باستعمال صور شخصية لهم، وذلك بوضع صورة بحجمها الأصلي في وسط الشاشة، أو بتكبيرها لتملأ الشاشة، إلَّا أن الطريقة الثانية تُظهر الصورة مشوّهةً؛ لأن الصورة الأصلية والصورة الجديدة لا تكونان متشابهتين هندسيًّا.

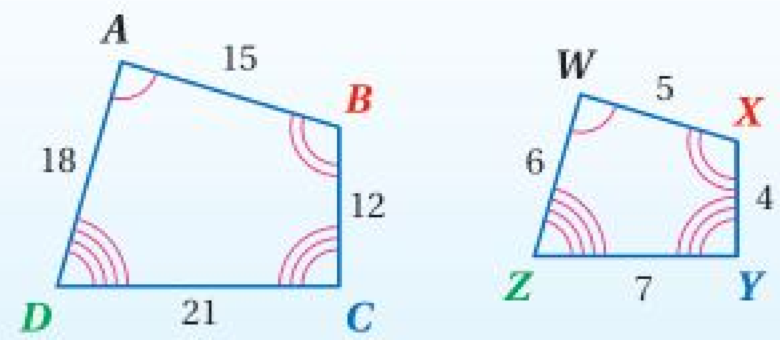
تحديد المضلعات المتشابهة: **المضلعات المتشابهة** لها الشكل نفسه، ولكن ليس بالضرورة أن يكون لها القياسات نفسها.

مفهوم أساسي — المضلعات المتشابهة

أضف إلى مطويتك

يتشابه مضلعان إذا وفقط إذا كانت زواياهما المتناظرة متطابقة، وأطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة.

مثال: في الشكل أدناه، $ABCD$ يشابه $WXYZ$.



الزوايا المتطابقة:

$\angle A \cong \angle W,\ \angle B \cong \angle X,\ \angle C \cong \angle Y,\ \angle D \cong \angle Z$

التناسب:

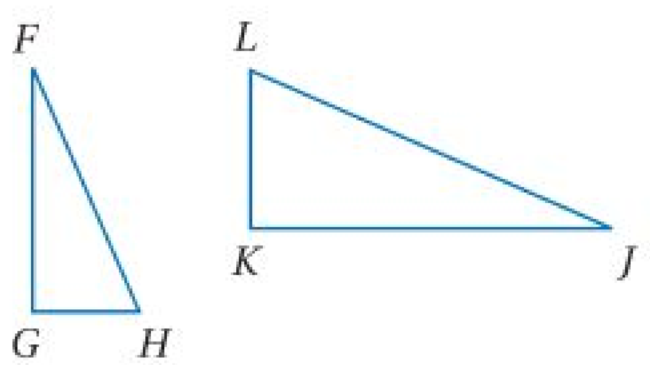
$$\frac{AB}{WX} = \frac{BC}{XY} = \frac{CD}{YZ} = \frac{DA}{ZW} = \frac{3}{1}$$

الرموز: $ABCD \sim WXYZ$

وكما هو الحال في عبارة التطابق، فإن ترتيب الرؤوس في عبارة التشابه مثل $ABCD \sim WXYZ$ مهمٌّ جدًّا؛ لأنّه يحدّد الزوايا المتناظرة والأضلاع المتناظرة.

مثال 1 استعمال عبارة التشابه

إذا كان $\triangle FGH \sim \triangle JKL$ ، فاكتب جميع أزواج الزوايا المتطابقة، واكتب تناسبًا يربط بين الأضلاع المتناظرة.



استعمل عبارة التشابه.

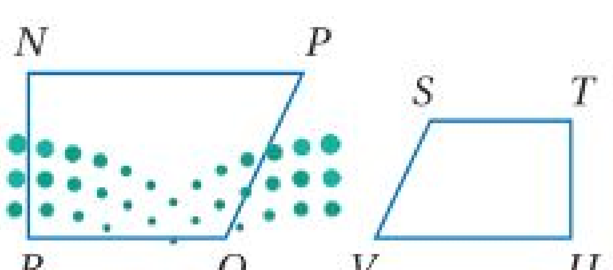
$\triangle FGH \sim \triangle JKL$

الزوايا المتطابقة: $\angle F \cong \angle J,\ \angle G \cong \angle K,\ \angle H \cong \angle L$

التناسب: $\frac{FG}{JK} = \frac{GH}{KL} = \frac{HF}{LJ}$

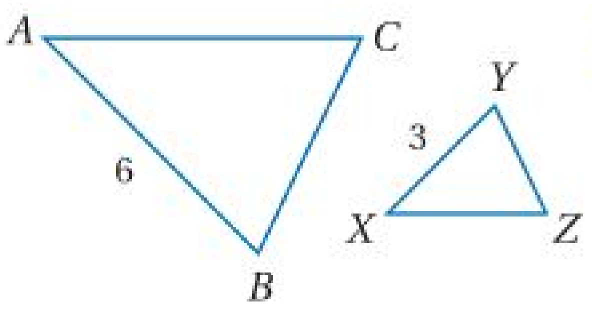
تحقق من فهمك

1) إذا كان $NPQR \sim UVST$ ، فاكتب جميع أزواج الزوايا المتطابقة، واكتب تناسبًا يربط بين الأضلاع المتناظرة.



قراءة الرياضيات

الرمزان $\nsim$ و $\sim$:
يُقرأ الرمز $\sim$ يشابه، ويقرأ الرمز $\nsim$ لايشابه، أو ليس مشابهًا لِـ.



النسبة بين طولي ضلعين متناظرين لمضلعين متشابهين تُسمىّ **معامل التشابه** أو (عامل المقياس). ويعتمد معامل التشابه على ترتيب المقارنة.

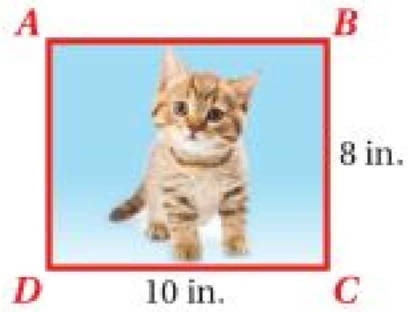
ففي الشكل المجاور $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$

ومعامل تشابه $\triangle ABC$ إلى $\triangle XYZ$ يساوي $\frac{6}{3}$ أو 2

بينما معامل تشابه $\triangle XYZ$ إلى $\triangle ABC$ يساوي $\frac{3}{6}$ أو $\frac{1}{2}$

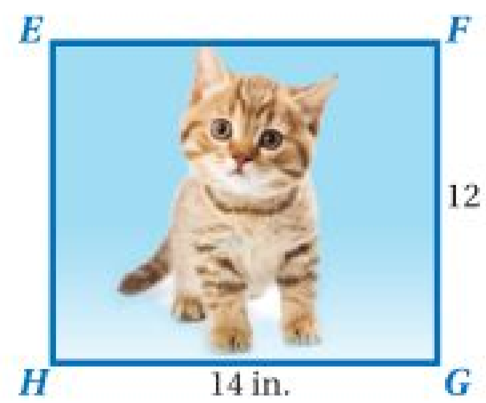
معامل التشابه بين مضلَّعَين متشابهين يسمى **نسبة التشابه** أحياناً

مثال 2 من واقع الحياة — تحديد المضلعات المتشابهة

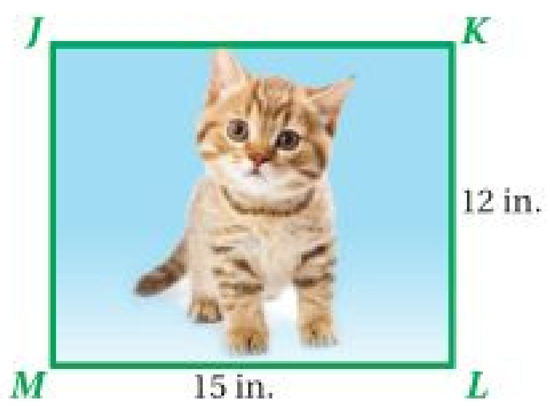


صور: **يريد كمال أن يستعمل الصورة المستطيلة الشكل المجاورة خلفيّة لشاشة الحاسوب، ولكنه يحتاج لتغيير أبعادها، حدّد ما إذا كانت كلٌّ من الصورتين المستطيلتين الآتيتين مشابهةً لها أم لا؟ وإذا كانت كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه. وضّح إجابتك.**

(a



(b



a) **الخطوة 1:** قارن الزوايا المتناظرة.

بما أن جميع زوايا المستطيل قوائم، والزوايا القوائم متطابقة، فإن الزوايا المتناظرة متطابقة.

الخطوة 2: قارن النسب بين أطوال الأضلاع المتناظرة.

$$\frac{DC}{HG} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7} \qquad \frac{BC}{FG} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

وحيث إن $\frac{2}{3} \neq \frac{5}{7}$، فإن الأضلاع المتناظرة غير متناسبة، وعليه فإنّ $ABCD \nsim EFGH$

إذن فالصورتان غير متشابهتين.

b) **الخطوة 1:** بما أنّ $ABCD$, $JKLM$ مستطيلان، فإن الزوايا المتناظرة متطابقة.

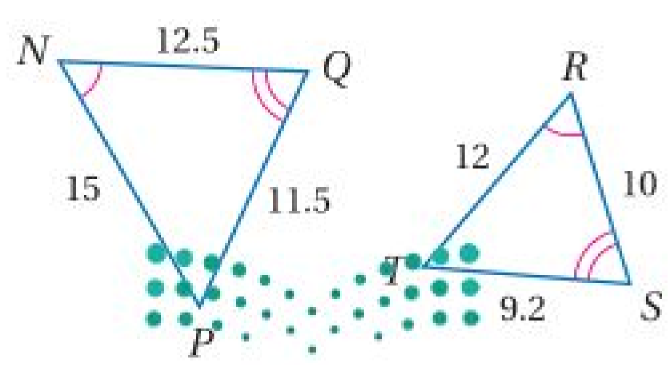
الخطوة 2: قارن النسب بين أطوال الأضلاع المتناظرة.

$$\frac{DC}{ML} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \qquad \frac{BC}{KL} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

وحيث إن $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$، فإن الأضلاع المتناظرة متناسبة، وعليه فإن $ABCD \sim JKLM$؛ إذن فالصورتان متشابهتان ومعامل تشابه $ABCD$ إلى $JKLM$ يساوي $\frac{2}{3}$

تحقق من فهمك

2) حدّد ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا؟ وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه، ووضّح إجابتك.



إرشادات للدراسة

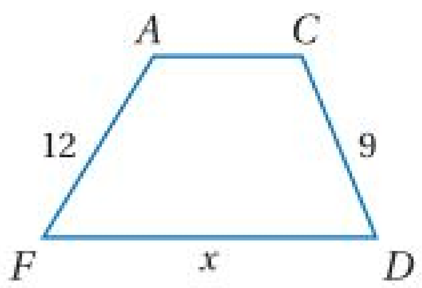
تناسب المستطيلات: لاختبار تناسب أضلاع مستطيلين، يكفي اختبار تناسب ضلعين متتالين من المستطيل الأول مع الضلعين المناظرين لهما في المستطيل الثاني؛ لأن المستطيل فيه كلُّ ضلعين متقابلين متطابقان.

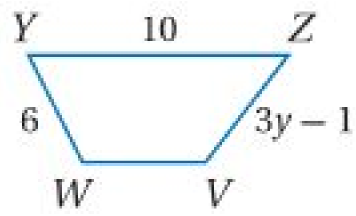
إرشادات للدراسة

التحقق من صحة الحل: للتحقق من معامل التشابه، أوجد النسبة بين طولي ضلعين متناظرين آخرين.

استعمال الأشكال المتشابهة: يمكنك استعمال معاملات التشابه والتناسبات، لحل مسائل تتضمن أشكالًا متشابهة.

مثال 3 استعمال الأشكال المتشابهة لإيجاد القيم المجهولة





في الشكل المجاور، $ACDF \sim VWYZ$.

a) أوجد قيمة x.

استعمل أطوال الأضلاع المتناظرة لكتابة تناسب

$\frac{CD}{WY} = \frac{DF}{YZ}$ الأضلاع المتناظرة متناسبة

$\frac{9}{6} = \frac{x}{10}$ $CD = 9, WY = 6, DF = x, YZ = 10$

$9(10) = 6(x)$ خاصيّة الضرب التبادلي

$90 = 6x$ بالضرب

$15 = x$ بقسمة كلا الطرفين على 6

b) أوجد قيمة y.

$\frac{CD}{WY} = \frac{FA}{ZV}$ الأضلاع المتناظرة متناسبة

$\frac{9}{6} = \frac{12}{3y-1}$ $CD = 9, WY = 6, FA = 12, ZV = 3y - 1$

$9(3y - 1) = 6(12)$ خاصية الضرب التبادلي

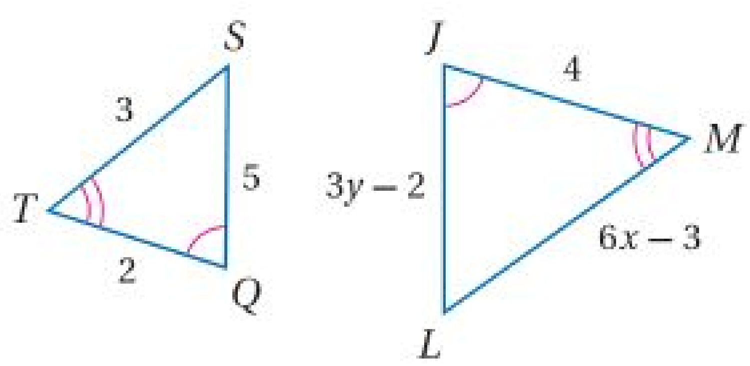
$27y - 9 = 72$ بالضرب

$27y = 81$ بإضافة 9 لكلا الطرفين

$y = 3$ بقسمة كلا الطرفين على 27

تحقق من فهمك

إذا كان $\triangle JLM \sim \triangle QST$، فأوجد قيمة المتغير في كلٍّ مما يأتي:



3A) x

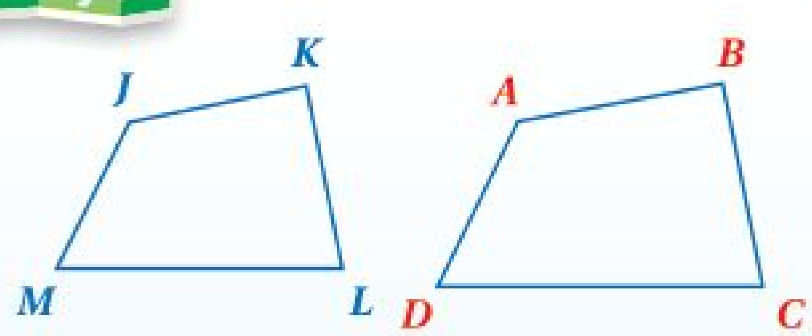
3B) y

النسبة بين أيِّ طولين متناظرين في المضلعين المتشابهين تساوي معامل التشابه بينهما. ويؤدي هذا إلى النظرية الآتية حول محيطي المضلعين المتشابهين.

نظرية 6.1 محيطا المضلعين المتشابهين

أضف إلى مطويتك

إذا تشابه مضلعان، فإنّ النسبة بين محيطيهما تساوي معامل التشابه بينهما.



مثال: إذا كان $ABCD \sim JKLM$، فإنّ:

$$\frac{AB}{JK} = \frac{BC}{KL} = \frac{CD}{LM} = \frac{DA}{MJ} = \frac{AB + BC + CD + DA}{JK + KL + LM + MJ}$$

ستبرهن النظريّة 6.1 الخاصة بحالة المثلثات في السؤال 34

إرشادات للدراسة

التشابه والتطابق: إذا كان المضلعان متطابقين فإنهما متشابهان أيضًا. وتكون جميع الزوايا المتناظرة متطابقة، وأطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة، والنسبة بين طولَي كل ضلعين متناظرين هي 1:1 .

إرشادات للدراسة

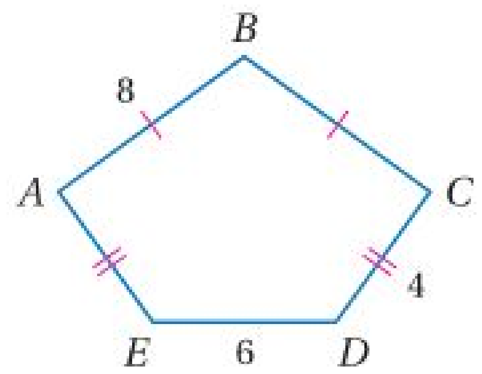
تحديد المثلثات المتشابهة: عندما تُعطى زوجين من الزوايا المتناظرة المتطابقة في مثلثين، تذكر أنّه يمكنك استعمال نظرية الزاوية الثالثة؛ لإثبات أن الزاويتين المتناظرتين الباقيتين متطابقتان أيضًا.

تنبيه !

المحيط: تذكّر أن المحيط هو المسافة حول الشكل، وعندما تُريد إيجاد محيط مضلع، احرص على أن تجد مجموع أطوال جميع أضلاعه، وقد تستعمل قوانين هندسيّة؛ لإيجاد أطوال الأضلاع غير المعطاة.

مثال 4 استعمال معامل التشابه لإيجاد المحيط

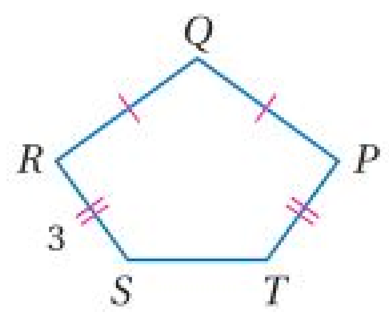
إذا كان $ABCDE \sim PQRST$ ، فأوجد معامل تشابه $ABCDE$ إلى $PQRST$ ومحيط كل مضلّع.



معامل تشابه $ABCDE$ إلى $PQRST$ يساوي $\frac{CD}{RS}$ أي $\frac{4}{3}$.

وبما أنّ: $\overline{BC} \cong \overline{AB}, \overline{AE} \cong \overline{CD}$ ،

فإنّ محيط $ABCDE$ يساوي $4 + 6 + 4 + 8 + 8$ أي 30 .



استعمل محيط $ABCDE$ ، ومعامل التشابه لكتابة تناسب.

افترض أن محيط $PQRST$ يساوي x .

$\frac{\text{محيط } ABCDE}{\text{محيط } PQRST} = \frac{4}{3}$ النظرية 6.1

$\frac{30}{x} = \frac{4}{3}$ بالتعويض

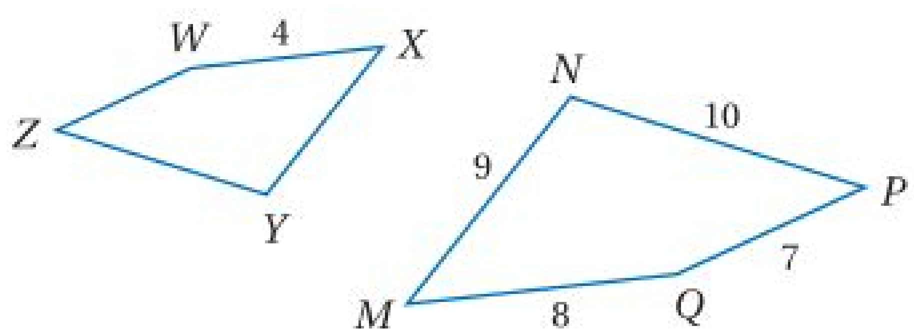
$(3)(30) = 4x$ خاصية الضرب التبادلي

$22.5 = x$ بقسمة كلا الطرفين على 4

إذن محيط $PQRST$ يساوي 22.5 .

تحقق من فهمك

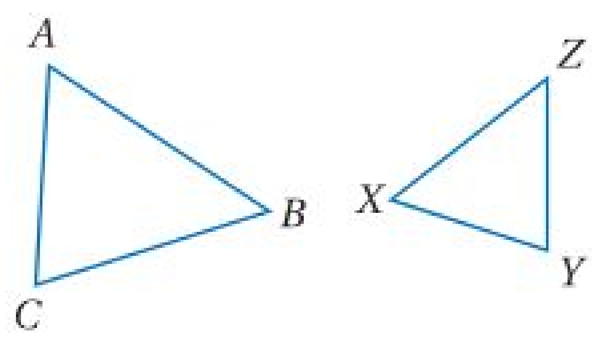
4) إذا كان $MNPQ \sim XYZW$ ، فأوجد معامل تشابه $MNPQ$ إلى $XYZW$ ، ومحيط كل مضلع.



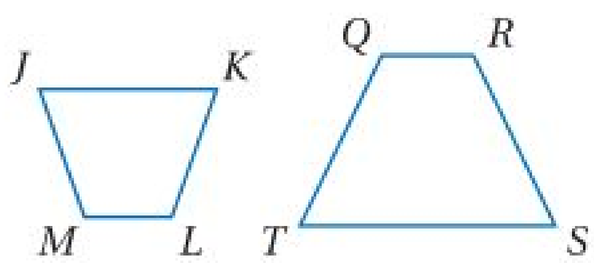
تأكـد

المثال 1 اكتب جميع الزوايا المتطابقة، واكتب تناسبًا يربط بين الأضلاع المتناظرة في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $\triangle ABC \sim \triangle ZYX$

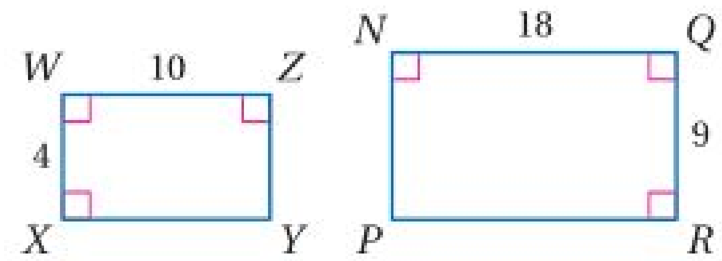


2) $JKLM \sim TSRQ$

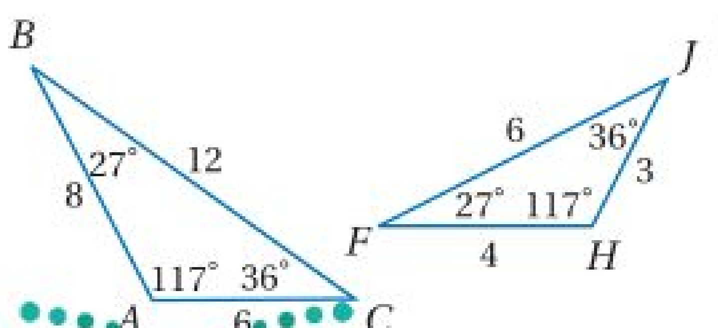


المثال 2 حدّد ما إذا كان المضلعان في كلٍّ من السؤالين الآتيين متشابهين أم لا، وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه، وضِّح إجابتك.

3)

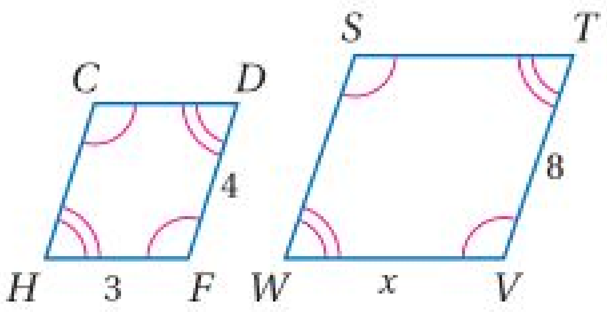


4)

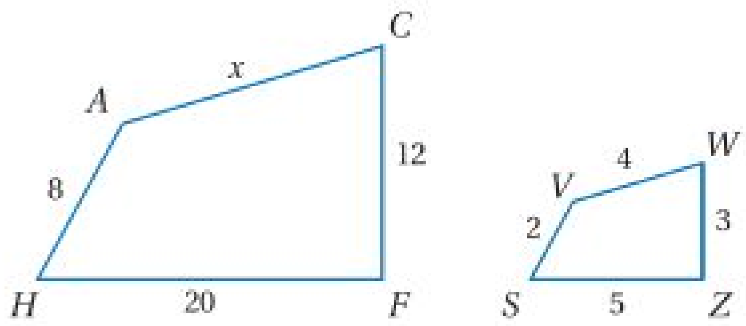


المثال 3 في كلٍّ ممَّا يأتي، إذا كان المضلعان متشابهين، فأوجد قيمة x .

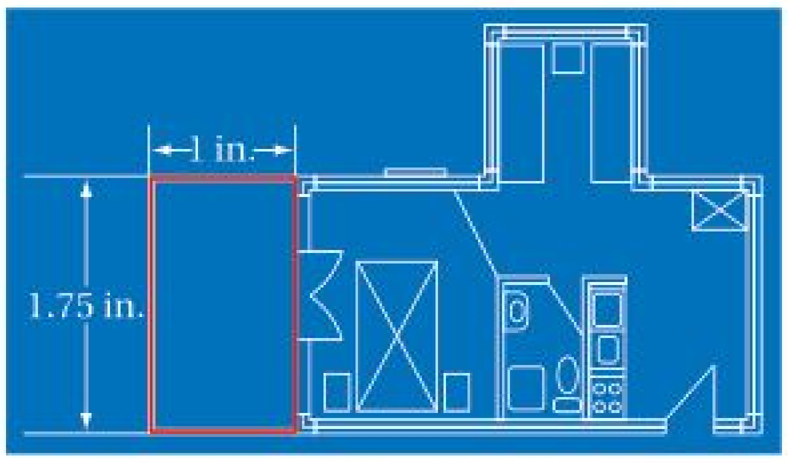
5)



6)



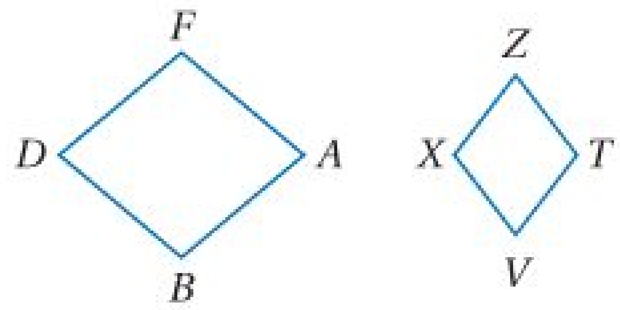
المثال 4 7) **تصميم:** في مخطط الشقّة المجاور، عرض الشّرفة 1 in وطولها 1.75 in. إذا كان طول الشّرفة الحقيقي 15 ft، فما محيطها؟



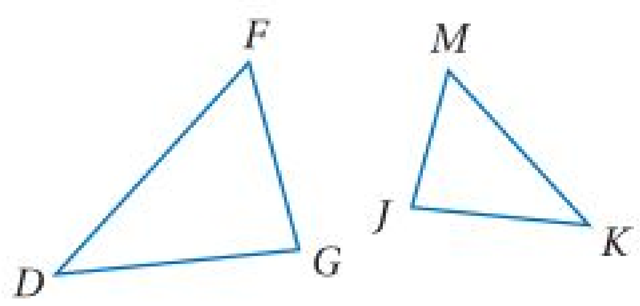
تدرب وحل المسائل

المثال 1 اكتب جميع الزوايا المتطابقة، ثم اكتب تناسبًا يربط الأضلاع المتناظرة للمضلعين في كلٍّ ممَّا يأتي:

8) $ABDF \sim VXZT$

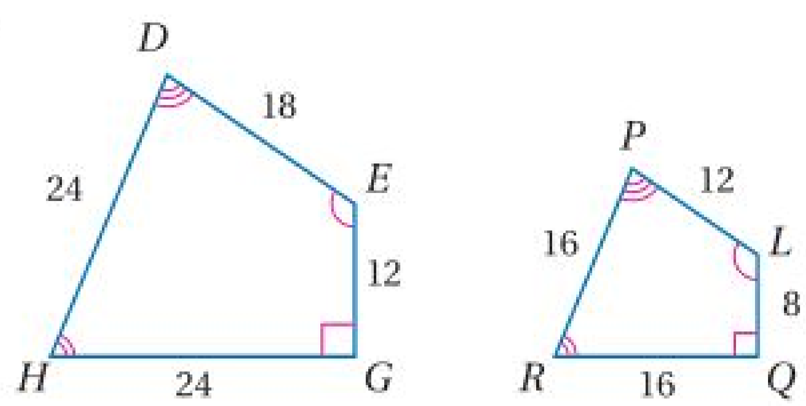


9) $\triangle DFG \sim \triangle KMJ$

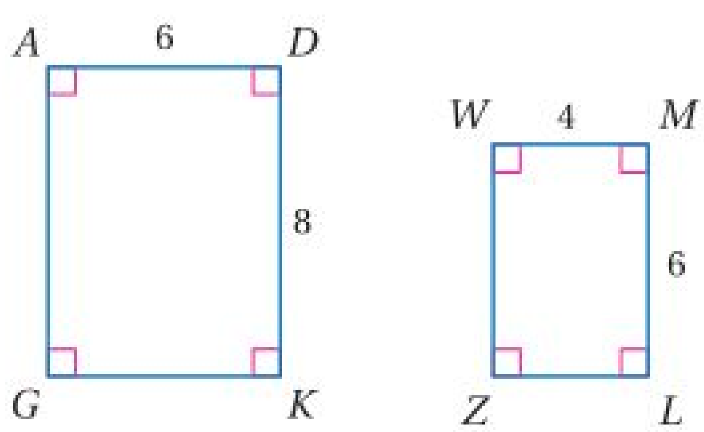


المثال 2 حدّد ما إذا كان المضلعان في كلٍّ ممَّا يأتي متشابهين أم لا، وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه، وإلّا فوضح السبب.

10)

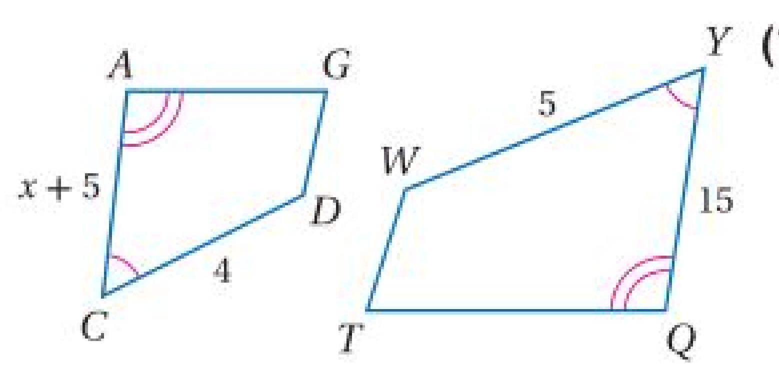


11)

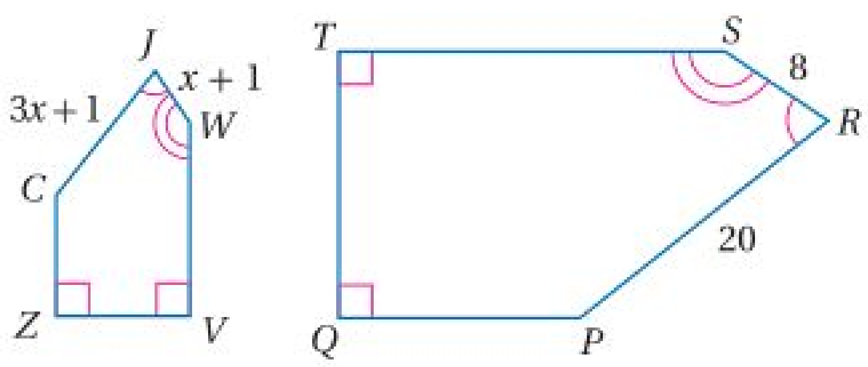


المثال 3 في كل مما يأتي، إذا كان المضلعان متشابهين، فأوجد قيمة x .

12)



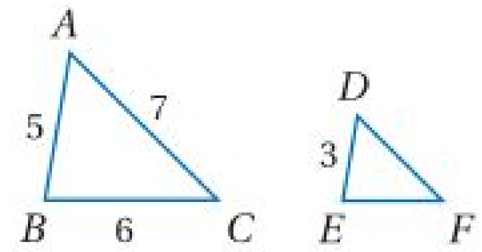
13)



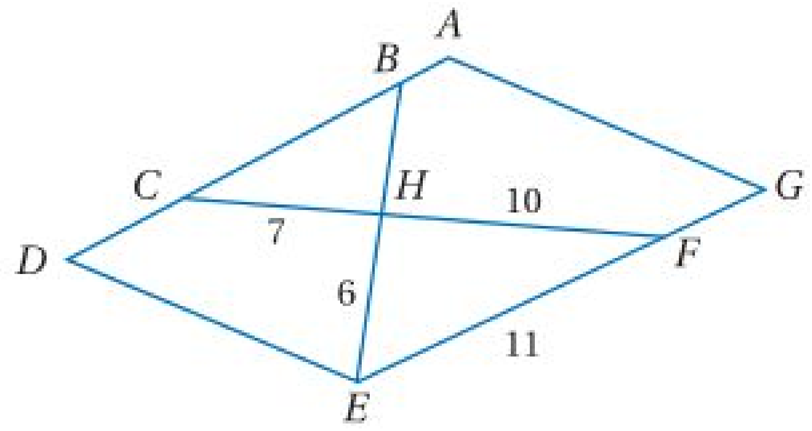
المثال 4 14) طول المستطيل $ABCD$ يساوي 20 m ، وعرضه 8 m. وطول المستطيل $QRST$ المشابه له يساوي 40 m. أوجد معامل تشابه المستطيل $ABCD$ إلى المستطيل $QRST$ ، ومحيط كل منهما.

أوجد محيط المثلث المحدّد في كلٍّ مما يأتي:

15) $\triangle DEF$ ، إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.



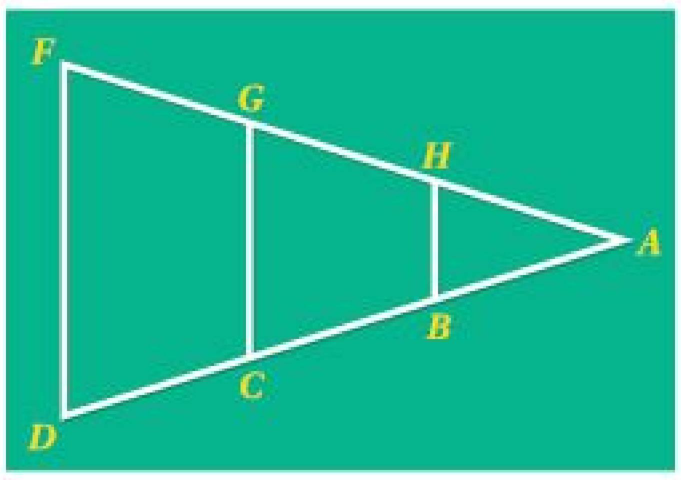
16) $\triangle CBH$ ، إذا كان $\triangle CBH \sim \triangle FEH$.



17) إذا كان معامل التشابه بين مستطيلين متشابهين 1:2، ومحيط المستطيل الكبير 80 m، فأوجد محيط المستطيل الصغير.

18) إذا كان معامل التشابه بين مربّعين متشابهين 3:2، ومحيط المربع الصغير 50 ft، فأوجد محيط المربع الكبير.

مثلثات متشابهة: في الشكل المجاور، المثلثات: AHB, AGC, AFD متشابهة وفيها: $\angle AHB \cong \angle AGC \cong \angle AFD$.
أوجد الأضلاع التي تناظر الضلع المُعطى أو الزوايا التي تطابق الزاوية المُعطاة في كلٍّ من الأسئلة الآتية.



19) $\overline{AB}$

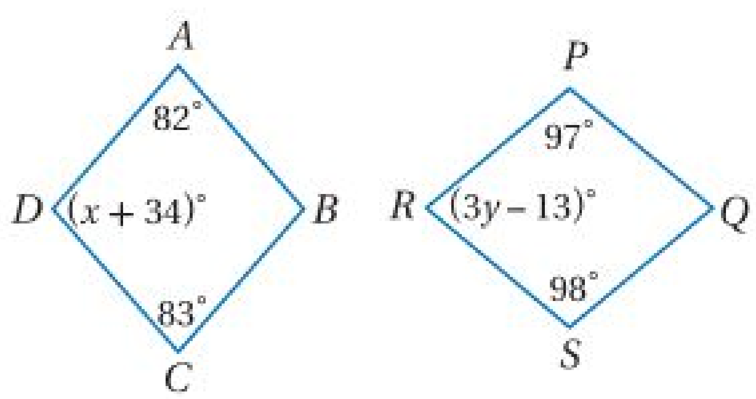
20) $\overline{FD}$

21) $\angle ACG$

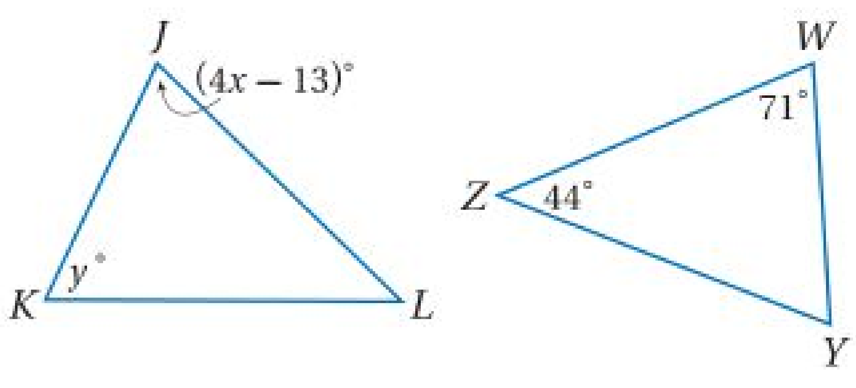
22) $\angle A$

أوجد قيمة كل متغيّر فيما يأتي:

23) $ABCD \sim QSRP$



24) $\triangle JKL \sim \triangle WYZ$



25) **عرض الشرائح:** إذا كانت أبعاد صورة على شريحة 13 in في $9\frac{1}{4}$ in، ومعامل تشابه صور الشريحة إلى الصور المعروضة بواسطة جهاز العرض 1:4؛ فما أبعاد الصورة المعروضة؟

الربط مع الحياة

يرى بعض التربويين أن نسبة 75% إلى 90% من معارف الشخص يتم الحصول عليها عن طريق الوسائل البصرية، ومن هنا جاءَت أهمية استعمال جهاز عرض الشرائح في العملية التعليمية.

هندسة إحداثية: حدّد ما إذا كان المستطيلان **ABCD , WXYZ** المعطاة إحداثيات رؤوسهما في السؤالين الآتيين متشابهين أم لا؟ وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه؛ وضّح إجابتك.

26) $A(-1, 5), B(7, 5), C(7, -1), D(-1, -1); W(-2, 10), X(14, 10), Y(14, -2), Z(-2, -2)$

27) $A(5, 5), B(0, 0), C(5, -5), D(10, 0); W(1, 6), X(-3, 2), Y(2, -3), Z(6, 1)$

حدّد ما إذا كان المضلعان في كلٍّ مما يأتي متشابهين دائمًا أو أحيانًا أو غير متشابهين أبدًا، وضح إجابتك.

28) مثلثان منفرجا الزاوية

29) شبه منحرف ومتوازي أضلاع

30) مثلثان قائما الزاوية

31) مثلثان متطابقا الضلعين

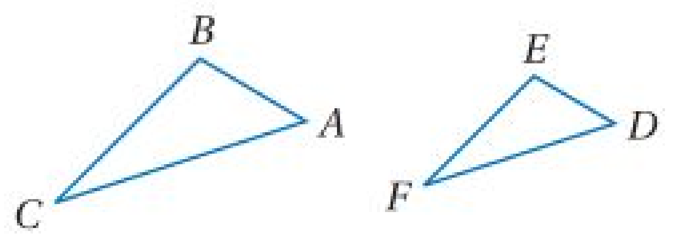
32) مثلث مختلف الأضلاع، ومثلث متطابق الضلعين

33) مثلثان متطابقا الأضلاع

34) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 6.1 (في حالة المثلثات)

المعطيات: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, $\frac{AB}{DE} = \frac{m}{n}$

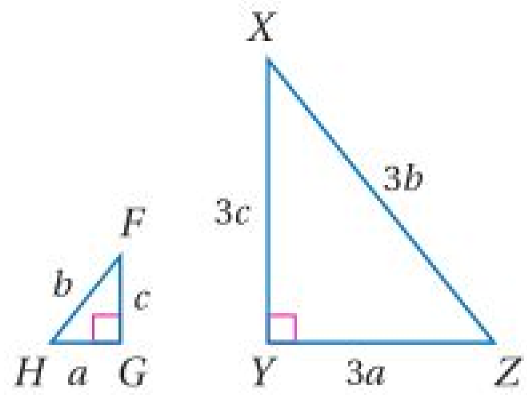
المطلوب: إثبات أن: $\frac{\text{محيط } \triangle ABC}{\text{محيط } \triangle DEF} = \frac{m}{n}$



35) **تغيير الأبعاد:** في الشكل المجاور، $\triangle FGH \sim \triangle XYZ$

a) بيِّن أن النسبة بين محيطي المثلثين هي النسبة نفسها بين أضلاعهما المتناظرة.

b) إذا أضيف لطول كل ضلع 6 وحداتٍ، فهل المثلثان الجديدان متشابهان؟



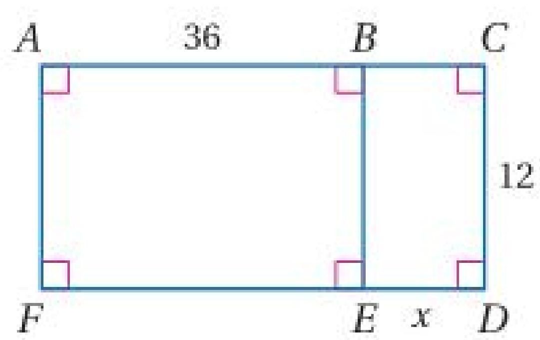
36) **تمثيلات متعدّدة:** في هذه المسألة ستكتشف تشابه المربّعات.

a) **هندسيًّا:** ارسم ثلاثة مربّعات مختلفة الأبعاد، وسمِّها $ABCD, PQRS, WXYZ$، وقس طول ضلع كل مربّع وسّجل الأطوال على المربعات.

b) **جدوليًّا:** احسب النسب بين أطوال الأضلاع المتناظرة لكل زوج مربعات فيما يأتي ودوّنها في جدول: $ABCD, PQRS; PQRS, WXYZ; WXYZ, ABCD$. هل كل مربعين من المربعات متشابهان؟

c) **لفظيًّا:** ضع تخمينًا حول تشابه جميع المربّعات.

مسائل مهارات التفكير العليا



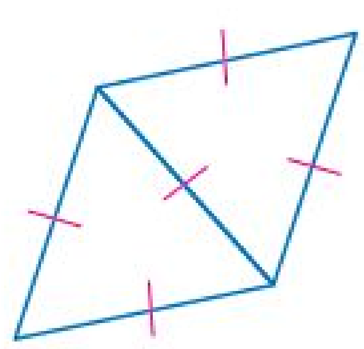
37) **تحدٍّ:** في الشكل المجاور، ما قيمة (قيم) x التي تجعل $BEFA \sim EDCB$ ؟

38) **إجابة مفتوحة:** أوجد مثالًا مضادًّا للعبارة الآتية:

"جميع المستطيلات متشابهة"

39) **برهان:** إذا كان المستطيل $BCEG$ فيه: $BC : CE = 2:3$ ، وكان المستطيل $LJAW$ فيه: $LJ : JA = 2:3$ فأثبت أن: $BCEG \sim LJAW$

40) **تبرير:** يمكن دمج مثلثين متساوِيَي الأضلاع متطابقين؛ لتكوينِ شكل رباعي كما في الشكل المجاور. إذا كوّنت شكلًا رباعيًّا آخر من مثلثين متساوِيَي الأضلاع متطابقين آخرين، فأيُّ العبارات التالية صحيحة حول الشكل المجاور، والشكل الذي كوّنته: يجب أن يكونا متشابهين، المجاور قد يكونا متشابهين، أو غير متشابهين. فسّر إجابتك.



41) **تبرير:** ارسم مضلعين خماسيَّين منتظمين أطوال أضلاعهما مختلفة. هل المضلعان متشابهان؟ وهل كل مضلعين منتظمين ومتساوِيَين في عدد الأضلاع متشابهان؟ وضح إجابتك.

42) **اكتب:** بيّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين المضلعات المتطابقة والمضلعات المتشابهة.

تدريب على اختبار

43) إذا كان: $PQRS \cong JKLM$ ومعامل تشابه $PQRS$ إلى $JKLM$ يساوي 4:3 ، وكان $QR = 8\text{ cm}$ فما طول KL؟

A 24 cm
B $10\frac{2}{3}$ cm
C 8 cm
D 6 cm

44) مستطيلان متشابهان. إذا كان معامل التشابه بينهما 3:5، ومحيط المستطيل الكبير 65 m ، فما محيط المستطيل الصغير؟

A 29 m
B 39 m
C 49 m
D 59 m

مراجعة تراكمية

حل كل تناسب ممَّا يأتي: **(مهارة سابقة)**

45) $\frac{c-2}{c+3} = \frac{5}{4}$

46) $\frac{2}{4y+5} = \frac{-4}{y}$

47) $\frac{2x+3}{x-1} = \frac{-4}{5}$

48) **هندسة إحداثية** أوجد إحداثيات نقطة تقاطع قطري $\square JKLM$ الذي رؤوسه: $J(2, 5), K(6, 6), L(4, 0), M(0, -1)$. **(مهارة سابقة)**

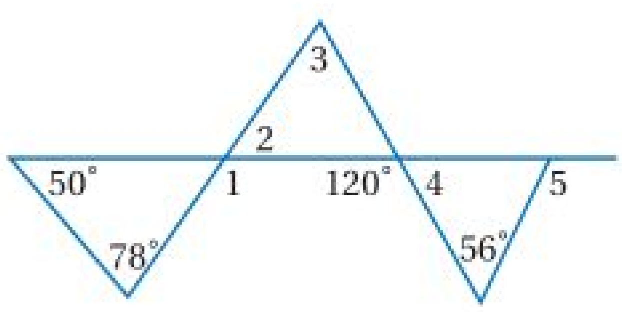
اكتب الفرض الذي تبدأ به برهانًا غير مباشرٍ لكل عبارةٍ ممَّا يأتي: **(مهارة سابقة)**

49) إذا كان $3x > 12$ ، فإن $x > 4$.

50) $\overline{PQ} \cong \overline{ST}$

51) منصّف زاوية الرأس لمثلث متطابق الضلعين هو ارتفاع للمثلث أيضًا.

في الشكل المجاور، أوجد قياس كلٍّ من الزوايا الآتية. **(مهارة سابقة)**



52) $m\angle 1$

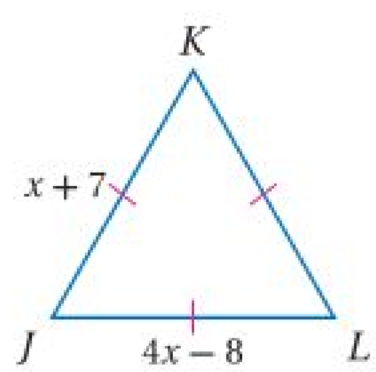
53) $m\angle 2$

54) $m\angle 3$

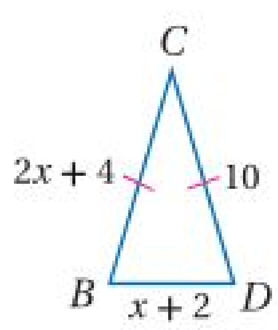
استعد للدرس اللاحق

جبر أوجد قيمة x وطول كل ضلع في كلٍّ من المثلثين الآتيين: **(مهارة سابقة)**

55)



56)



رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

6-2 المثلثات المتشابهة
Similar Triangles

فيما سبق:

درستُ استعمال المسلَّمتين SSS, SAS والنظرية AAS لإثبات تطابق مثلثين.

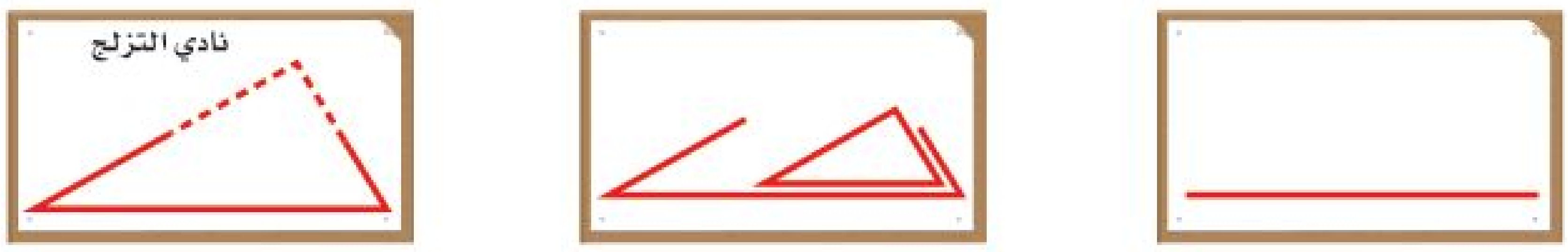
(مهارة سابقة)

والآن:

- أُحدّد المثلثات المتشابهة باستعمال مسلمة التشابه AA ونظريتَي التشابه SSS, SAS .
- أستعمل المثلثات المتشابهة لحل المسائل.

لماذا؟

أراد خالد أن يرسم نسخة مشابهة لشعار نادي التزلُّج المجاور على مُلصقٍ كبيرٍ، فبدأ أولًا برسم قطعة مستقيمة أسفل المُلصق، ثم استعمل نسخةً من المثلث الأصلي لينسخ زاويتَي القاعدة، ثم مدّ الضلعين غير المشتركين للزاويتين.

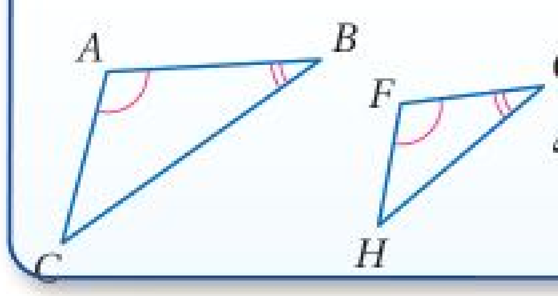


تحديد المثلثات المتشابهة: في الفصل الثالث تعلمت اختبارات تحديد ما إذا كان مثلثان متطابقين أم لا، ولتشابه المثلثات اختبارات أيضًا. والرسم السابق يبيّن أنه إذا طابقت زاويتان في مثلثٍ زاويتين في مثلثٍ آخر، فإن المثلثين متشابهان.

مسلمة 6.1 التشابه بزاويتين (AA)

أضف إلى مطويتك

إذا طابقت زاويتان في مثلث زاويتين في مثلث آخر، فإن المثلثين متشابهان.

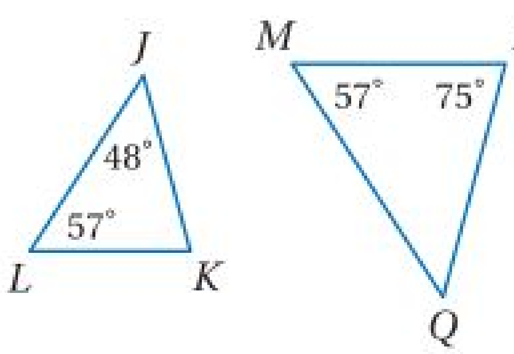


مثال: في المثلثين ABC , FGH ، إذا كانت: $\angle A \cong \angle F$, $\angle B \cong \angle G$ ،
فإن: $\triangle ABC \sim \triangle FGH$.

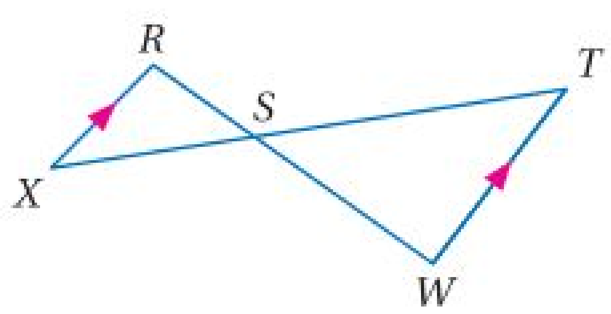
مثال 1 استعمال مسلمة التشابه AA

حدّد في كل مما يأتي ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا؟ وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه. ووضّح إجابتك.

(a



(b

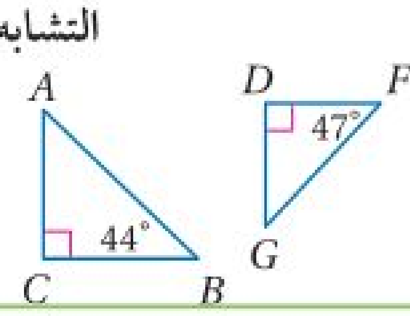


a) بما أنّ: $m\angle L = m\angle M$، إذن: $\angle L \cong \angle M$. ومن نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث يكون: $57° + 48° + m\angle K = 180°$ ؛ إذن $m\angle K = 75°$. وبما أنّ $m\angle P = 75°$ ، فإن $\angle K \cong \angle P$ ؛ إذن $\triangle LJK \sim \triangle MQP$ وفق المسلمة AA .

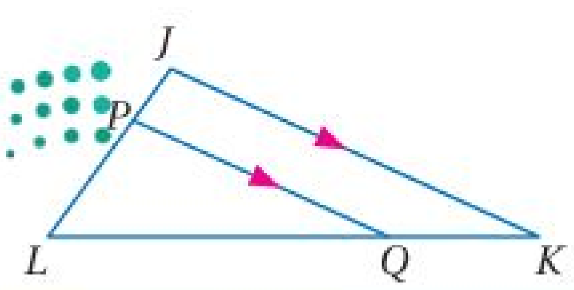
b) $\angle RSX \cong \angle WST$ وفق نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس. ولأن $\overline{TW} \parallel \overline{RX}$ ، فإنّ $\angle W \cong \angle R$ وفق نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا؛ إذن $\triangle RSX \sim \triangle WST$ وفق المسلمة AA .

✓ **تحقق من فهمك** :حدّد في كل مما يأتي ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا؟ وإذا كانا كذلك ، فاكتب عبارة التشابه ووضّح إجابتك.

(1A



(1B



إرشادات للدراسة

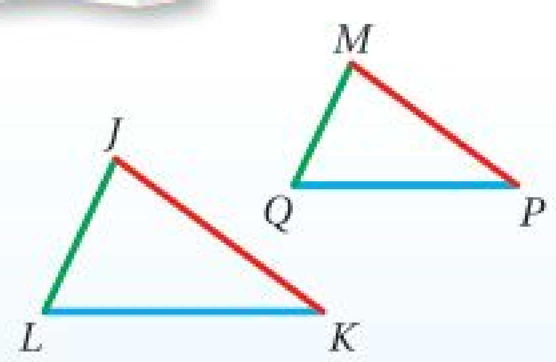
رسم الأشكال: قد تساعدك إعادة رسم المثلثين المتشابهين، بحيث تظهر الأضلاع المتناظرة في الاتجاه نفسه.

يمكنك استعمال مسلمة التشابه AA لإثبات النظريتين الآتيتين:

نظريتان

أضف إلى مطويتك

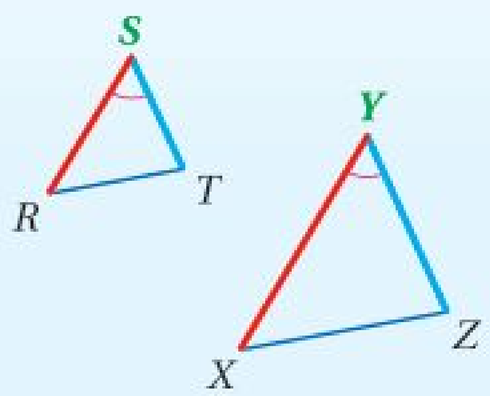
6.2 التشابه بثلاثة أضلاع (SSS)



إذا كانت أطوال الأضلاع المتناظرة لمثلثين متناسبة، فإن المثلثين متشابهان.

مثال: إذا كان: $\frac{JK}{MP} = \frac{KL}{PQ} = \frac{LJ}{QM}$ ، فإن $\triangle JKL \sim \triangle MPQ$.

6.3 التشابه بضلعين وزاوية محصورة (SAS)



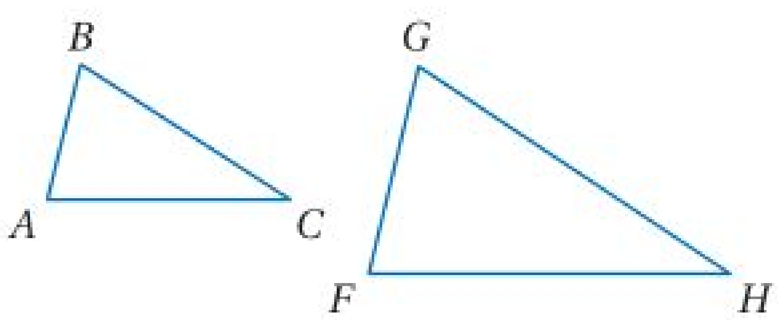
إذا كان طولا ضلعين في مثلث ما متناسبين مع طولَي الضلعين المناظرين لهما في مثلث آخر وكانت الزاويتان المحصورتان بينهما متطابقتين، فإنّ المثلثين متشابهان.

مثال: إذا كان $\angle S \cong \angle Y$, $\frac{RS}{XY} = \frac{ST}{YZ}$، فإن $\triangle RST \sim \triangle XYZ$.

ستبرهن النظرية 6.3 في السؤال 17

برهان النظرية 6.2

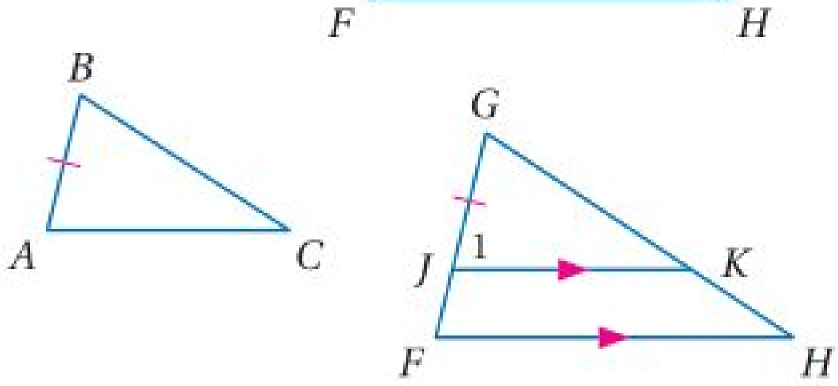
اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 6.2



المعطيات: $\frac{AB}{FG} = \frac{BC}{GH} = \frac{AC}{FH}$

المطلوب: $\triangle ABC \sim \triangle FGH$

البرهان:



عيّن النقطة J على $\overline{FG}$، بحيث يكون $JG = AB$.

ارسم $\overline{JK}$، بحيث يكون $\overline{JK} \parallel \overline{FH}$.

سمِّ $\angle GJK$ بالرمز $\angle 1$.

بما أنّ $\angle G \cong \angle G$ وفق خاصية الانعكاس،

و $\angle F \cong \angle 1$ وفق مسلمة الزاويتين المتناظرتين،

فإنّ $\triangle GJK \sim \triangle GFH$ وفق مسلمة التشابه AA .

ومن تعريف المضلعات المتشابهة يكون: $\frac{JG}{FG} = \frac{GK}{GH} = \frac{JK}{FH}$.

وبالتعويض ينتج أن: $\frac{AB}{FG} = \frac{GK}{GH} = \frac{JK}{FH}$.

وبما أن: $\frac{AB}{FG} = \frac{BC}{GH} = \frac{AC}{FH}$ ، إذن يمكننا استنتاج أنّ: $\frac{JK}{FH} = \frac{AC}{FH}$, $\frac{GK}{GH} = \frac{BC}{GH}$ ، وهذا يعني أن: $GK = BC, JK = AC$ ، لذلك $\overline{GK} \cong \overline{BC}, \overline{JK} \cong \overline{AC}$.

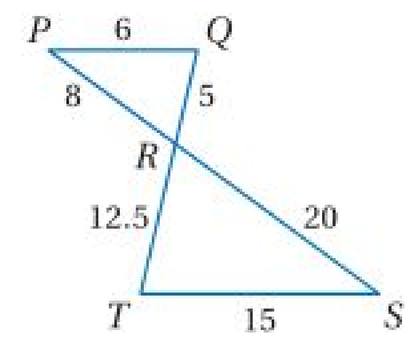
ومن مسلّمة التطابق SSS ، يكون $\triangle ABC \cong \triangle JGK$.

ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة فإن: $\angle A \cong \angle 1$, $\angle B \cong \angle G$، وبما أن: $\angle F \cong \angle 1$ ؛ إذن $\angle F \cong \angle A$ وفق خاصيةّ التعدّي؛ إذن ومن مسلمة التشابه AA ، يكون $\triangle ABC \sim \triangle FGH$.

مثال 2 استعمال نظريتَي التشابه SSS , SAS

حدّد في كلٍّ مما يأتي ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا، وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه، و وضّح إجابتك.

a)

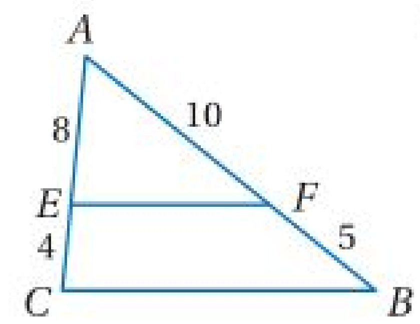


$$\frac{PR}{SR} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}, \frac{PQ}{ST} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{QR}{TR} = \frac{5}{12.5} = \frac{50}{125} = \frac{2}{5}$$ ؛

إذن $\triangle PQR \sim \triangle STR$ وفق نظرية التشابه SSS .

b)



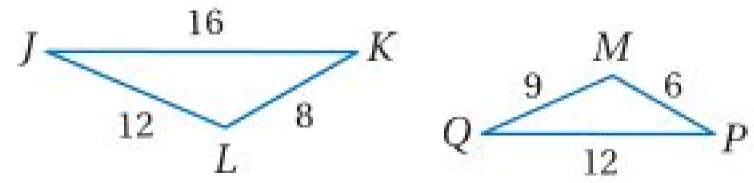
من خاصية الانعكاس $\angle A \cong \angle A$.

$$\frac{AF}{AB} = \frac{10}{10+5} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}, \frac{AE}{AC} = \frac{8}{8+4} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$.

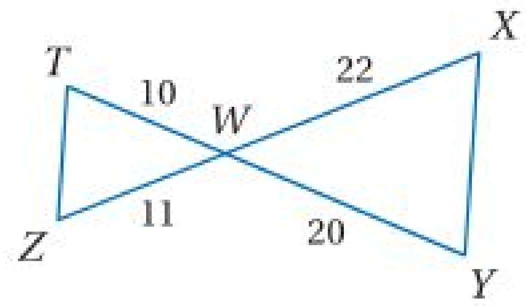
بما أن طولَي الضلعين اللذين يحصران $\angle A$ في $\triangle AEF$ متناسبان مع طولَي الضلعين المناظرين لهما في $\triangle ACB$ ، إذن $\triangle AEF \sim \triangle ACB$ وفق نظرية التشابه SAS .

تحقق من فهمك

2A)



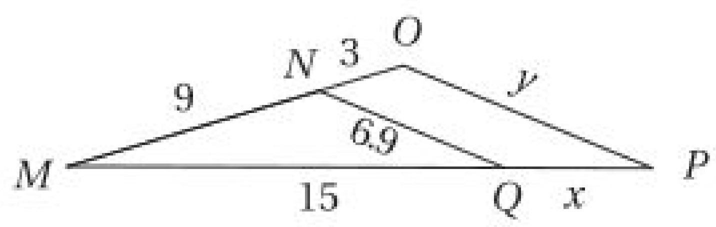
2B)



يمكنك أن تُقرّر أي الشروط كافية لإثبات تشابه مثلثين.

مثال 3 من اختبار

المثلثان MNQ, MOP في الشكل المجاور متشابهان، ماقيمة x؟



A 12 **C** 5

B 10 **D** 4

اقرأ سؤال الاختبار

في هذا السؤال تعلمْ، أنّ $\triangle MNQ \sim \triangle MOP$ ، ومطلوب منك إيجاد طول قطعة مجهولة.

حُل سؤال الاختبار

بما أنّ $\triangle MNQ \sim \triangle MOP$ ، فإن الأضلاع المتناظرة متناسبة أي أن $\frac{MQ}{MP} = \frac{MN}{MO}$ ، وبما أن

$MN = 9, MO = 12, MQ = 15, MP = 15 + x$

اختبر كلًّا من بدائل الإجابة حتى تجد واحدًا منها يحقق التناسب $\frac{9}{12} = \frac{15}{15+x}$:

البديل A: إذا كان: $x = 12$ فإن: $\frac{9}{12} \stackrel{?}{=} \frac{15}{15+12}$

$\frac{3}{4} \neq \frac{5}{9}$ ✗ غير صحيح

البديل B: إذا كان: $x = 10$ فإن: $\frac{9}{12} \stackrel{?}{=} \frac{15}{15+10}$

$\frac{3}{4} \neq \frac{3}{5}$ ✗ غير صحيح

البديل C: إذا كان: $x = 5$ فإن: $\frac{9}{12} \stackrel{?}{=} \frac{15}{15+5}$

$\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ ✓ صحيح، إذن فإن إجابة السؤال هي C

إرشادات للدراسة

الأضلاع المتناظرة: لتحديد الأضلاع المتناظرة لمثلثين، ابدأ بمقارنة أطول ضلعين ثم الضلعين التاليين لهما طولًا وأخيرًا أقصر ضلعين.

تحقق من فهمك

3) في المثال السابق، ماقيمة y ؟

A 5.2 **B** 8.4 **C** 9.2 **D** 20.7

استعمال المثلثات المتشابهة: تشابه المثلثات مثل تطابق المثلثات، يحقق خصائص الانعكاس والتماثل والتعدّي.

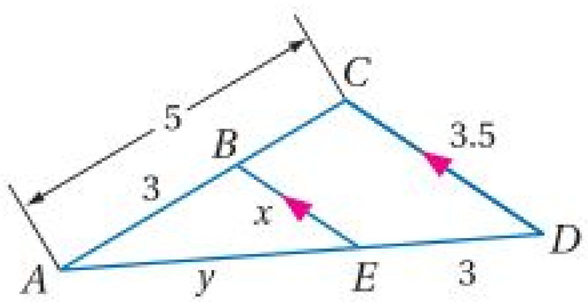
نظرية 6.4 خصائص المثلثات المتشابهة

أضف إلى مطويتك

خاصيّة الانعكاس للتشابه:	$\triangle ABC \sim \triangle ABC$
خاصيّة التماثل للتشابه:	إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ، فإنّ $\triangle DEF \sim \triangle ABC$.
خاصيّة التعدّي للتشابه:	إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle DEF,\ \triangle DEF \sim \triangle XYZ$ فإن $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$.

ستبرهن النظرية 6.4 في السؤال 18

مثال 4 أجزاء المثلثات المتشابهة



أوجد طول BE, AD في الشكل المجاور.

بما أنّ $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$ ، فإن: $\angle ABE \cong \angle ACD,\ \angle AEB \cong \angle ADC$ ؛ لأنّها زوايا متناظرة، ومن مسلمة التشابه AA، يكون $\triangle ABE \sim \triangle ACD$.

$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD}$ تعريف المضلعات المتشابهة

$\frac{3}{5} = \frac{x}{3.5}$ $AC = 5, CD = 3.5, AB = 3, BE = x$

$(3.5) \cdot 3 = 5 \cdot x$ خاصية الضرب التبادلي

$2.1 = x$ بقسمة كلا الطرفين على 5

وعليه فإن BE يساوي 2.1

$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AE}$ تعريف المضلعات المتشابهة

$\frac{5}{3} = \frac{y+3}{y}$ $AC = 5, AB = 3, AD = y + 3, AE = y$

$5 \cdot y = 3(y + 3)$ خاصية الضرب التبادلي

$5y = 3y + 9$ خاصية التوزيع

$2y = 9$ بطرح $3y$ من كلا الطرفين

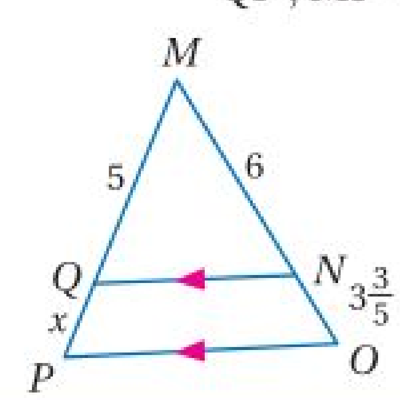
$y = 4.5$ بقسمة كلا الطرفين على 2

وعليه فإن: $AD = y + 3 = 7.5$

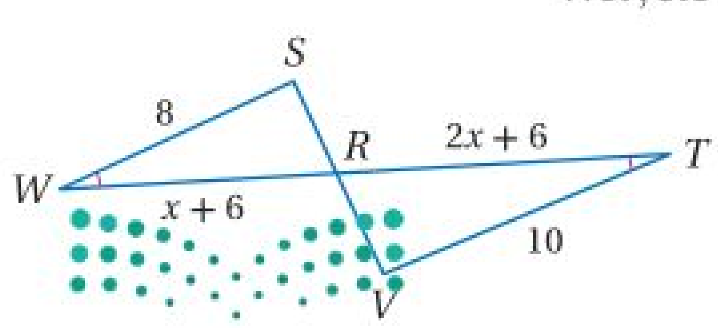
تحقق من فهمك

أوجد كل طولٍ فيما يأتي.

4A) QP, MP



4B) WR, RT



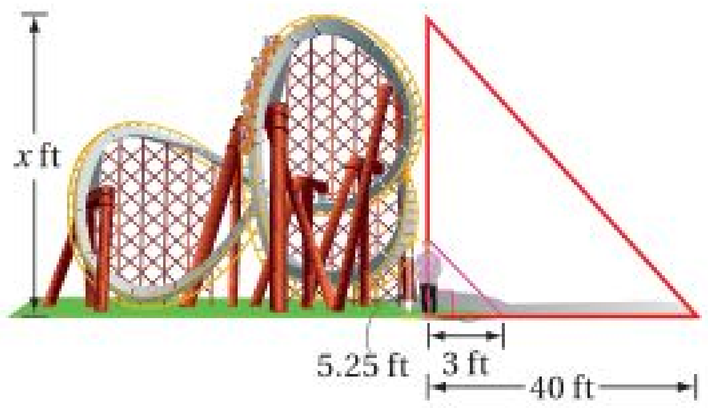
مثال 5 من واقع الحياة — القياس غير المباشر

أفعوانية: يريد تركي أن يقدِّر ارتفاع الأفعوانية في مدينة الألعاب، فلاحظ أنه عندما كان طول ظله 3 ft ، كان طول ظل الأفعوانية 40 ft . إذا كان طول تركي 5 ft و 3 in ، فكم قدمًا ارتفاع الأفعوانية؟

افهم: **المعطيات:** طول ظل تركي 3 ft ، وطول ظل الأفعوانية 40 ft ، وطول تركي 5 ft وَ 3 in

المطلوب: ارتفاع الأفعوانية.

ارسم مخططًا توضيحيًّا. 5 ft و 3 in تساوي 5.25 ft



خطط: في مسائل الظل، افترض أنّ الزاويتين المتكونتين من شعاعَي الشمس وأيّ جسمين رأسيين تكونان متطابقتين، وأن المثلث المتشكّل من الجسم والأرض وشعاع الشمس المارّ بقمة الجسم قائم الزاوية، وبما أن هناك زوجين من الزوايا المتطابقة، فإنّ المثلثين القائمَي الزاوية متشابهان وفق مسلمة التشابه AA ؛ إذن يمكن كتابة التناسب الآتي:

$$\frac{\text{طول ظل تركي}}{\text{طول ظل الأفعوانية}} = \frac{\text{طول تركي}}{\text{ارتفاع الأفعوانية}}$$

حل: افترض أن ارتفاع الأفعوانية يساوي x وعوِّض القيم المعلومة.

$\frac{5.25}{x} = \frac{3}{40}$ بالتعويض

$3 \cdot x = 40(5.25)$ خاصّية الضرب التبادلي

$3x = 210$ بالضرب

$x = 70$ بقسمة كلا الطرفين على 3

إذن ارتفاع الأفعوانية يساوي 70 ft .

تحقق: طول ظل الأفعوانية يساوي 13.3 مرةً تقريبًا من طول ظل تركي. تحقق لترى ما إذا كان ارتفاع الأفعوانية يساوي $13.3 \approx \frac{40}{3}$ مرّة من طول تركي، $\frac{70\text{ ft}}{5.25\text{ ft}} \approx 13.3$ ✓

تحقق من فهمك

5) بنايات: يقف منصور بجوار بناية، وعندما كان طول ظلّه 9 ft ، كان طول ظل البناية 322.5 ft . إذا كان طول منصور 6 ft ، فكم قدمًا ارتفاع البناية؟

إرشادات للدراسة

تحويل الوحدات:

$12\text{ in} = 1\text{ ft}$

$3\text{ in} = \frac{3}{12}\text{ ft} = 0.25\text{ ft}$

أي أن 5 ft وَ 3 in تساوي 5.25 ft

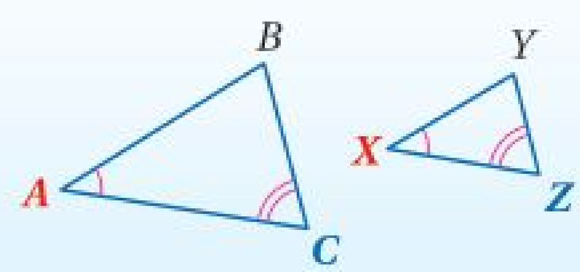
إرشادات لحل المسألة

حدِّد الإجابات المعقولة: عندما تحل مسألة، تحقق من معقوليّة إجابتك. في هذا المثال، طول ظل تركي أكبر بقليل من نصف طوله، وكذلك طول ظل الأفعوانية أكبر من نصف ارتفاعها بقليل؛ لذا فالإجابة معقولة.

ملخص المفهوم — تشابه المثلثات

أضف إلى مطويتك

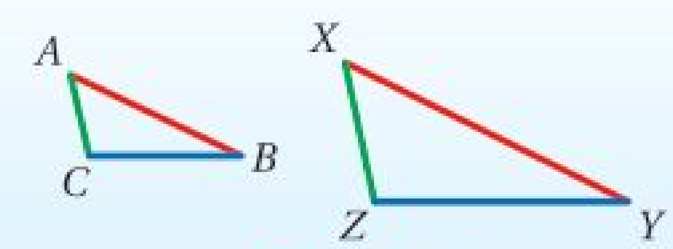
مسلمة التشابه AA



إذا كانت: $\angle A \cong \angle X,\ \angle C \cong \angle Z$

فإنّ: $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$

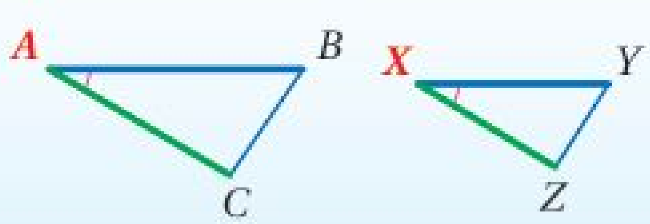
نظرية التشابه SSS



إذا كانت: $\frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ} = \frac{CA}{ZX}$

فإنّ: $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$.

نظرية التشابه SAS



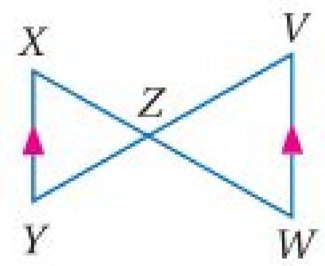
إذا كانت: $\frac{AB}{XY} = \frac{CA}{ZX},\ \angle A \cong \angle X$

فإنّ: $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$.

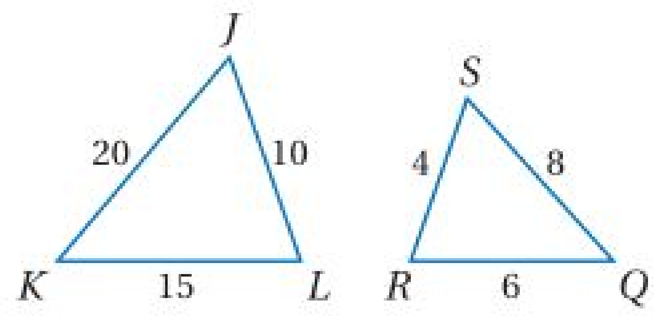
تأكد

المثالان 1, 2 في كلٍّ ممَّا يأتي حدّد ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا؟ وإذا كانا كذلك فاكتب عبارة التشابه، ووضّح إجابتك.

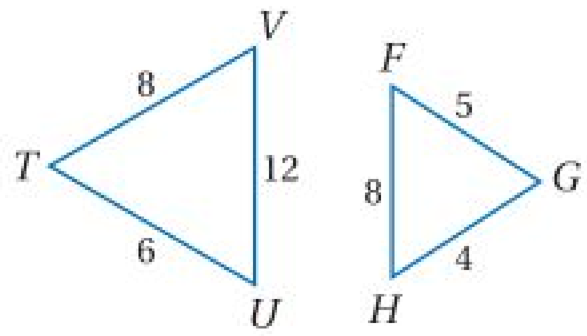
(1



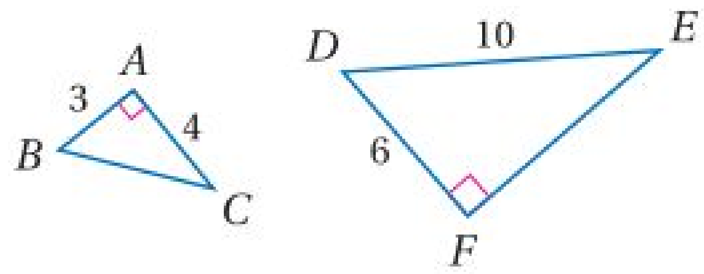
(2



(3



(4



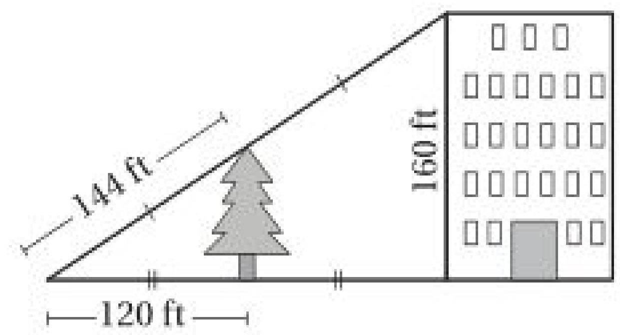
المثال 3 **5) اختيار من متعدّد:** استعمل الشكل أدناه في إيجاد ارتفاع الشجرة؟

A 264 ft

B 60 ft

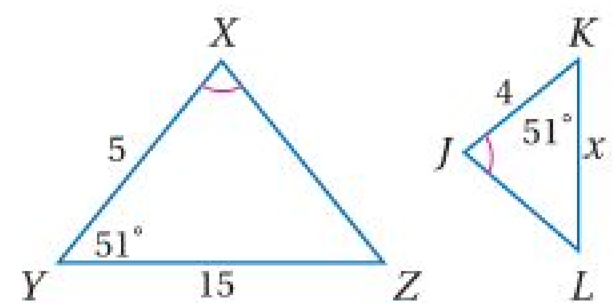
C 72 ft

D 80 ft

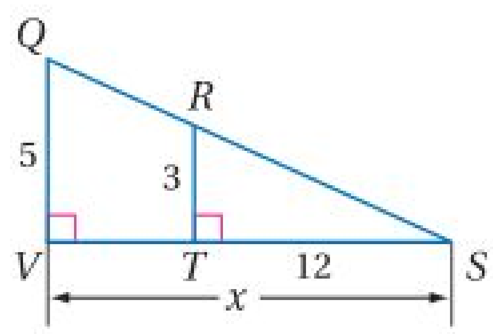


المثال 4 **جبر:** أوجد الطول المطلوب في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

(6 KL



(7 VS

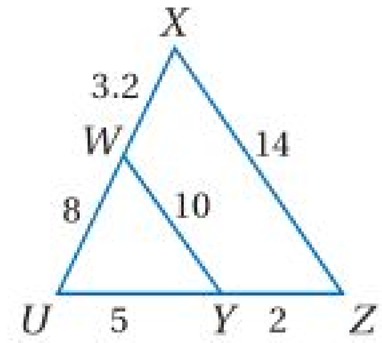


المثال 5 **8) اتّصالات:** طول ظلّ برج اتصالاتٍ في لحظةٍ معينةٍ 100 ft ، وبجواره لوحة تحذيرية مثبّتة على عمودٍ طول ظله في اللحظة ذاتها 3 ft و 4 in ، إذا كان ارتفاع عمود اللوحة 4 ft و 6 in ، فما ارتفاع البرج؟

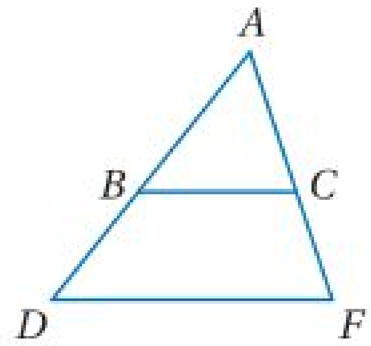
تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1–3 في كلٍّ ممّا يأتي، حدّد ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا؟ وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه، وإلّا فحدّد المعلومات الإضافية الكافية لإثبات أنهما متشابهان؟ ووضّح إجابتك.

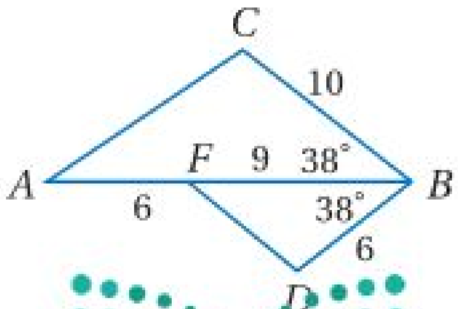
(9



(10

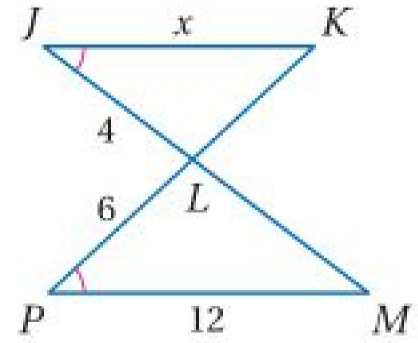


(11

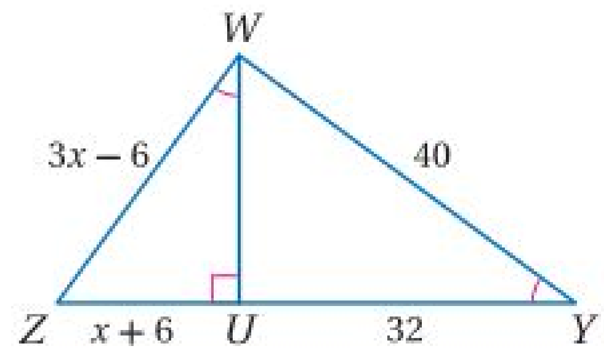


المثال 4 **جبر:** أوجد الطول المطلوب في كلٍّ مما يأتي:

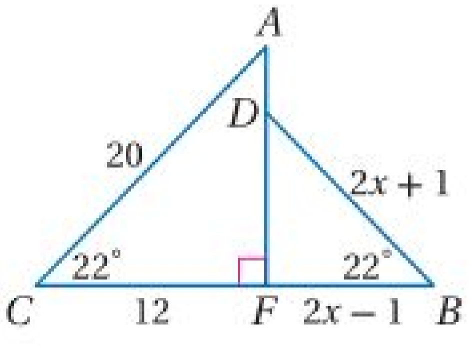
12) JK



13) WZ, UZ



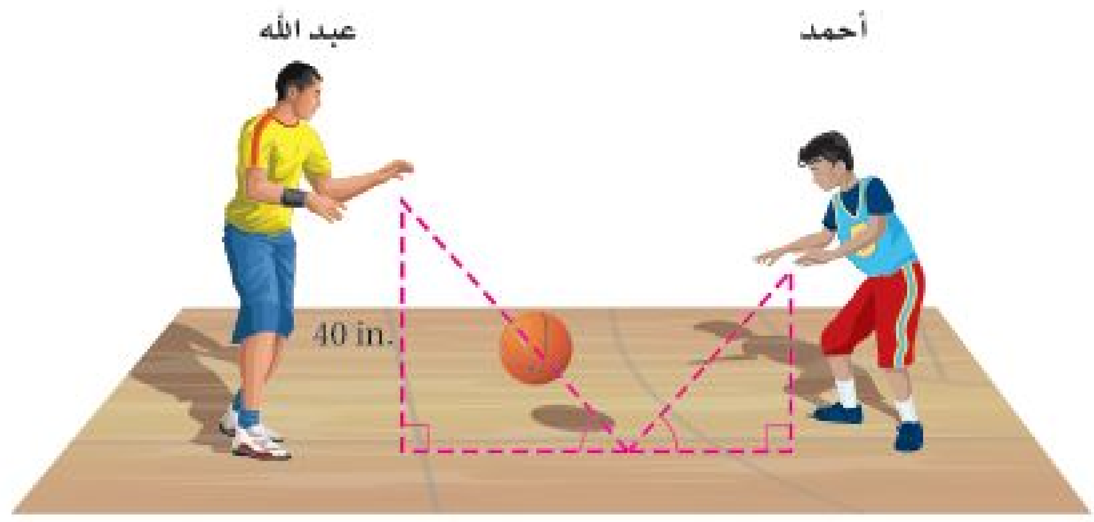
14) DB, CB



المثال 5

15) **رياضة:** يقف أيمن بجوار مرمى كرة السلّة. إذا كان طول أيمن 5 ft و 11 in، وطول ظلّه 2 ft، وكان طول ظل مرمى كرة السلّة في اللحظة ذاتها 4 ft و 4 in، فما ارتفاع المرمى تقريبًا؟

16) **رياضة:** رمى عبد الله الكرة لترتدّ نحو أحمد، فارتطمت بسطح الأرض على بُعد $\frac{2}{3}$ المسافة بينهما، وكانت الزاويتان الناتجتان عن مسار الكرة وسطح الأرض متطابقتين. إذا رمى عبدالله الكرة من ارتفاع 40 in عن سطح الأرض، فعلى أيّ ارتفاعٍ سيلتقطها أحمد؟



برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين في كلٍّ ممّا يأتي:

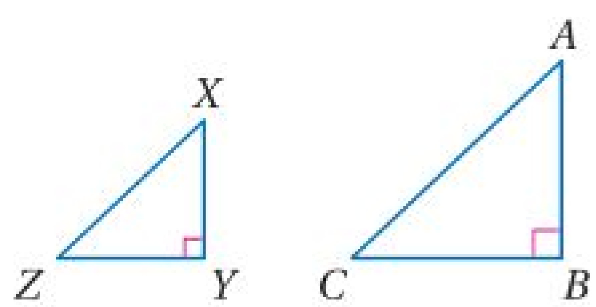
17) النظريّة 6.3

18) النظريّة 6.4

19) **المعطيات:** $\triangle XYZ$ و $\triangle ABC$ قائما الزاوية

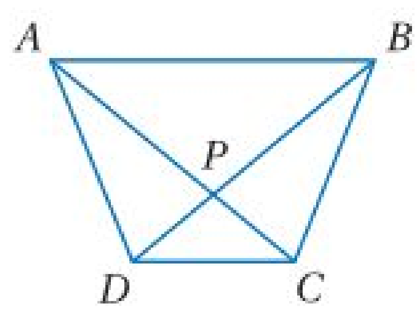
$$\frac{XY}{AB} = \frac{YZ}{BC}$$

المطلوب: إثبات أنّ $\triangle YXZ \sim \triangle BAC$



20) **المعطيات:** $ABCD$ شبه منحرف.

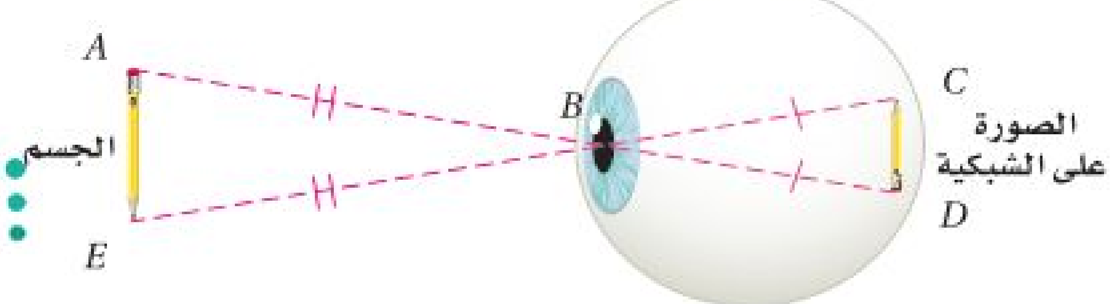
المطلوب: إثبات أن $\frac{DP}{PB} = \frac{CP}{PA}$



الربط مع الحياة

يحدث قصر النظر عندما تجمّع عدسة العين أشعة الضوء أمام الشبكية، ويحدث طول النظر عندما تجمّع عدسة العين أشعة الضوء خلف الشبكية.

21) **رؤية:** عندما ننظر إلى جسمٍ، فإن صورته تُسْقَطُ على الشبكيّة عبر البؤبؤ، وتكون المسافتان من البؤبؤ إلى أعلى الجسم وأسفله متساويتين، والمسافتان من البؤبؤ إلى أعلى الصورة وأسفلها على الشبكية متساويتين أيضًا. هل المثلثان المتكوّنان بين الجسم والبؤبؤ وبين البؤبؤ والصورة متشابهان؟ وضّح إجابتك.

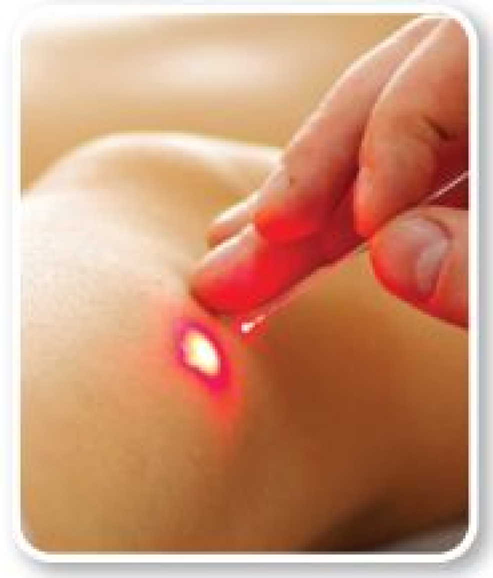


هندسة إحداثيّة: إحداثيات رؤوس المثلثين $\triangle XYZ, \triangle WYV$ هي:
$X(-1,-9), Y(5,3), Z(-1,6), W(1,-5), V(1,5)$.

22) مثّل المثلثين بيانيًّا، وأثبت أنّ $\triangle XYZ \sim \triangle WYV$.

23) أوجد النسبة بين محيطي المثلثين.

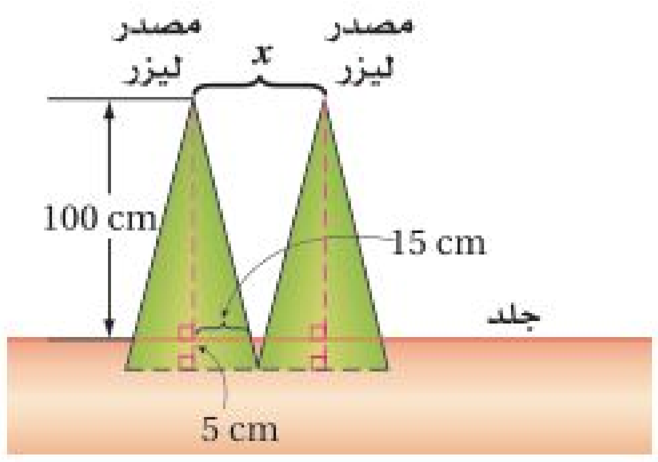
24) **قياس:** إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle JKL$. وطول كل ضلع في $\triangle JKL$ يساوي نصف طول الضلع المناظر له في $\triangle ABC$، ومساحة $\triangle ABC$ تساوي $40\,\text{in}^2$، فما مساحة $\triangle JKL$؟ ما العلاقة بين مساحتي $\triangle ABC$، $\triangle JKL$، ومعامل التشابه بينهما؟



الربط مع الحياة

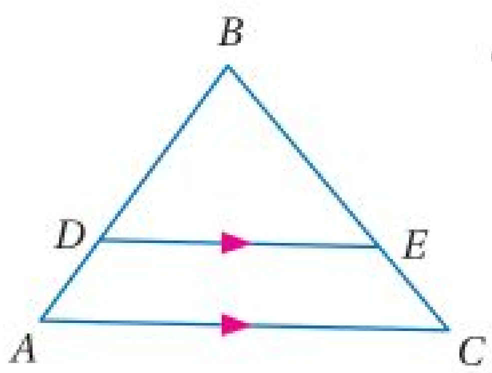
في بعض العلاجات الطبيّة تستعمل أشعة الليزر التي تلامس الجلد وتخترقه مكوّنة مثلثات متشابهة.

25) **علاج:** استعمل معلومات الربط بالحياة والشكل المجاور لإيجاد المسافة التي يجب أن تفصل بين مصدري أشعة الليزر حتى تكون المنطقتان المعالجتان المتطابقتان بكلٍّ من المصدرين غير متداخلتين.



26) **تمثيلات متعدّدة:** في هذه المسألة ستستقصي الأجزاء المتناسبة في مثلث.

a) **هندسيًّا:** ارسم $\triangle ABC$ وارسم $\overline{DE}$، بحيث تكون موازيةً لـ $\overline{AC}$ كما في الشكل المجاور.



b) **جدوليًّا:** قس الأطوال AD, DB, CE, EB وسجّلها في جدول، وأوجد النسبتين $\frac{AD}{DB}, \frac{CE}{EB}$ وسجّلهما في الجدول نفسه.

c) **لفظيًّا:** اكتب تخمينًا حول القطع المستقيمة الناتجة عن مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين.

مسائل مهارات التفكير العليا

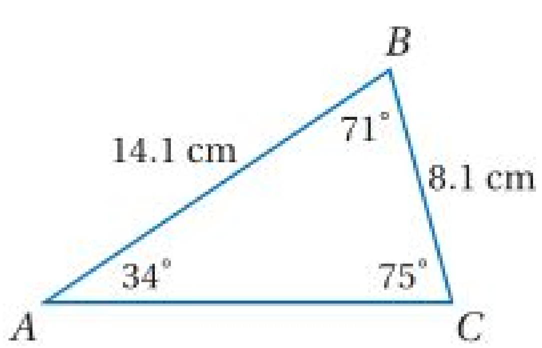
27) **اكتب:** بيّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين مسلمة التشابه AA، ونظرية التشابه SSS، ونظرية التشابه SAS.

تحدٍّ: إذا كانت النسبة بين أطوال أضلاع مثلث هي: 2:3:4 ومحيطه $54\,\text{in}$، فأجب عما يأتي:

28) إذا كان طول أصغر أضلاع مثلثٍ آخر مشابه هو: $16\,\text{in}$، فما طول كلٍّ من الضلعين الآخرين فيه؟

29) قارن النسبة بين محيطَي المثلثين ومعامل التشابه بينهما. ماذا تلاحظ؟

30) **تبرير:** قياسات زوايا مثلثين متشابهين هي: $45°, 85°, 50°$. وأطوال أضلاع أحدهما $3, 4, 5.2$ وحدات، وأطوال أضلاع المثلث الآخر $x, x - 1.5, x + 1.8$ وحدة، أوجد قيمة x.

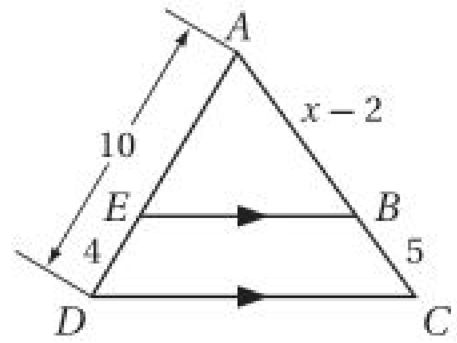


31) **مسألة مفتوحة:** ارسم مثلثًا مشابهًا لـ $\triangle ABC$ المجاور، ووضّح كيف تعرف أنّهما متشابهان.

32) **اكتب:** اشرح طريقة يمكنك استعمالها لرسم مثلث يشابه مثلثًا معلومًا، وأطوال أضلاعه ضعف أطوال أضلاع المثلث المعلوم.

تدريب على الاختبار المعياري

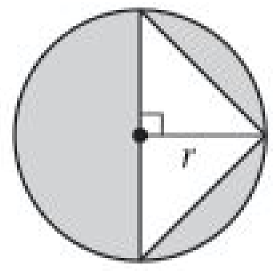
33) **إجابة مطوّلة:** في الشكل أدناه $\overline{DC} \parallel \overline{EB}$.



a) اكتب تناسبًا يمكن استعماله لإيجاد قيمة x.

b) أوجد قيمة x وطول $\overline{AB}$.

34) **جبر:** أيٌّ مما يأتي يُمثل مساحة المنطقة المظلّلة؟



A πr^2

B $\pi r^2 + r^2$

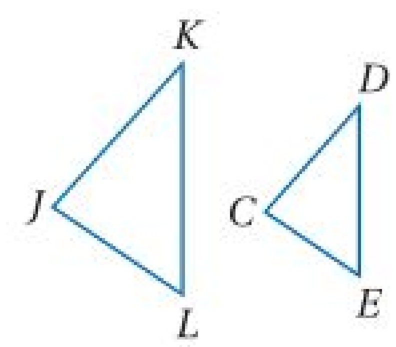
C $\pi r^2 + r$

D $\pi r^2 - r^2$

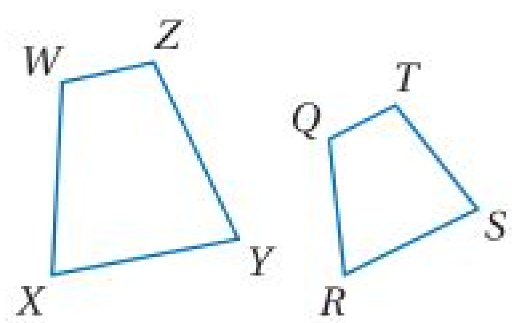
مراجعة تراكمية

اكتب جميع الزوايا المتطابقة ثم اكتب تناسبًا يربط الأضلاع المتناظرة للمضلعين في كلٍّ ممَّا يأتي: (الدرس 1-6)

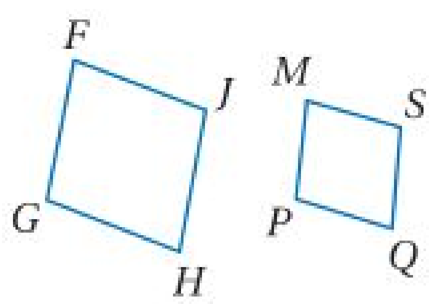
35) $\triangle JKL \sim \triangle CDE$



36) $WXYZ \sim QRST$



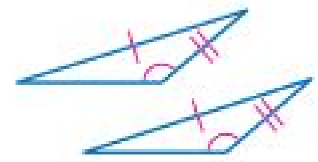
37) $FGHJ \sim MPQS$



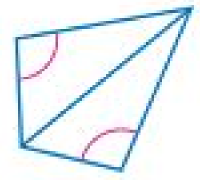
38) **القطع الهندسية السبع:** تتكون مجموعة القطع الهندسية السبع (Tangram) في الشكل المجاور من سبع قطع: مربع صغير، مثلثين صغيرين قائِمَي الزاوية ومتطابقين، مثلثين كبيرين قائِمَي الزاوية ومتطابقين، مثلث قائم الزاوية متوسط المقاس، وشكل رباعي. كيف يمكنك أن تتحقق من أن الشكل الرباعي متوازي أضلاع؟ وضّح إجابتك. (مهارة سابقة)

حدّد المسلمة التي يمكن استعمالها؛ لإثبات تطابق المثلثين في كلٍّ ممَّا يأتي، واكتب "غير ممكن" في الحالة التي لا يمكنك فيها إثبات التطابق. (مهارة سابقة)

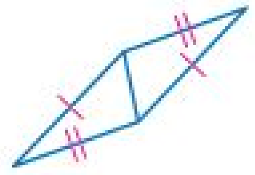
39)



40)



41)



استعد للدرس اللاحق

حل كل تناسبٍ ممَّا يأتي:

42) $\frac{3}{4} = \frac{x}{16}$

43) $\frac{x}{10} = \frac{22}{50}$

44) $\frac{20.2}{88} = \frac{12}{x}$

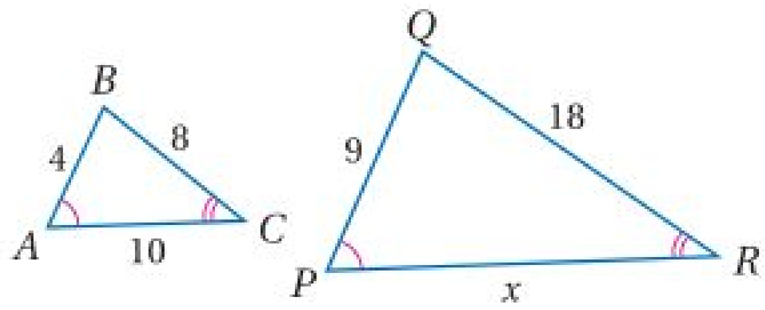
45) $\frac{x-2}{2} = \frac{3}{8}$

اختبار منتصف الفصل

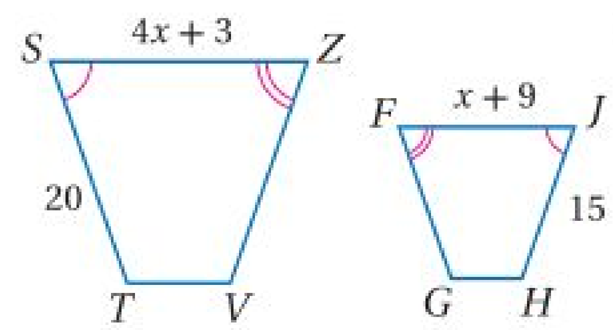
الدرسان 1-6 و 2-6

إذا كان المضلعان في كلٍّ من السؤالين الآتيين متشابهين، فأوجد قيمة x. (الدرس 1-6)

1)



2)



3) اختيار من متعدِّد: إذا كانت المسافة بين الطائف والدمام على خريطة تساوي 98 cm، وكان مقياس رسم الخريطة 2.5 cm : 30 km، فما المسافة الحقيقية بينهما؟ (الدرس 1-6)

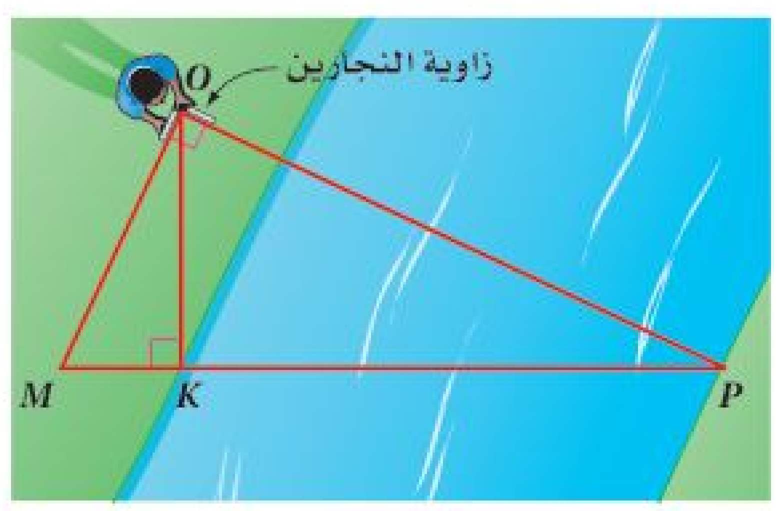
A 1211 km

B 964 km

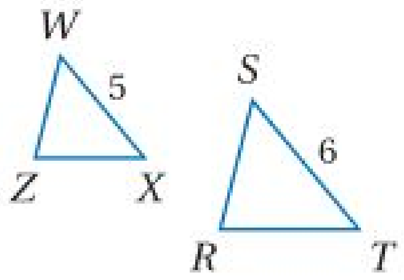
C 1176 km

D 1031 km

4) قياس: يستعمل عبدالله زاوية النجارين لحساب KP عبر النهر كما في الشكل أدناه، إذا كان: $OK = 4.5\,\text{ft}$, $MK = 1.5\,\text{ft}$ ، فأوجد المسافة KP عبر النهر. (الدرس 2-6)

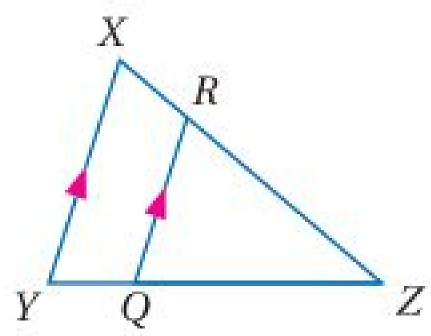


5) إذا كان: $\triangle WZX \sim \triangle SRT$ ، $WX = 5$, $ST = 6$ ، فأوجد محيط $\triangle WZX$ إذا كان محيط $\triangle SRT$ يساوي 18 وحدة. (الدرس 1-6)

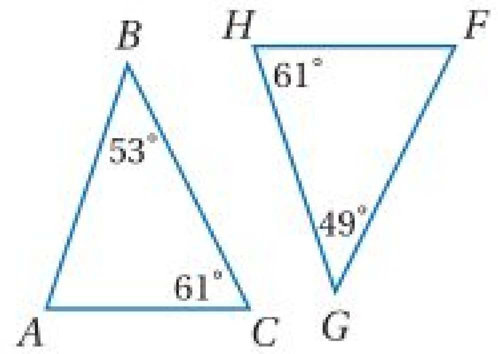


حدّد ما إذا كان المثلثان في السؤالين 6 , 7 متشابهين أم لا، وإذا كانا متشابهين، فاكتب عبارة التشابه. وإلّا فحدد المعلومات الإضافية الكافية لإثبات أنهما متشابهان، وضح إجابتك. (الدرس 2-6)

6)

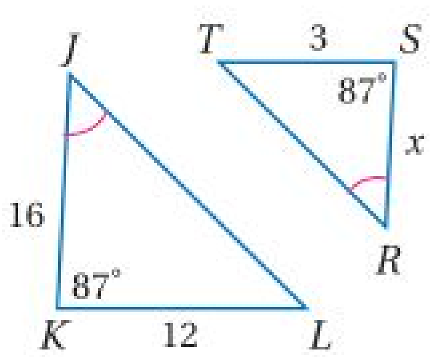


7)

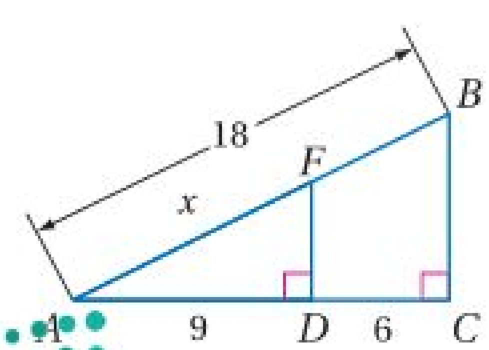


جبر أوجد الطول المطلوب في كلٍّ من السؤالين الآتيين: (الدرس 2-6)

8) SR



9) AF



رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

6-3 المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة
Parallel Lines and Proportional Parts

فيما سبق:

درستُ استعمال التناسب لحل مسائل تتضمن مثلثات متشابهة.

(الدرس 6-2)

والآن:

- أستعمل الأجزاء المتناسبة في المثلث.
- أستعمل الأجزاء المتناسبة في المستقيمات المتوازية.

المفردات:

القطعة المنصفة في المثلث
midsegment of a triangle

لماذا؟

يستعمل رسّامو الصور المتحركة طرائق عدّة؛ لإضفاء خداع بصري على أعمالهم. كما يستعملون في الرسومات الثلاثية الأبعاد حقيقة كون الأجسام البعيدة تبدو أصغر من الأجسام القريبة إلى المشاهد. ولتحقيق هذا الخداع، يستعمل الرسّامون نظرية التناسب في المثلث.

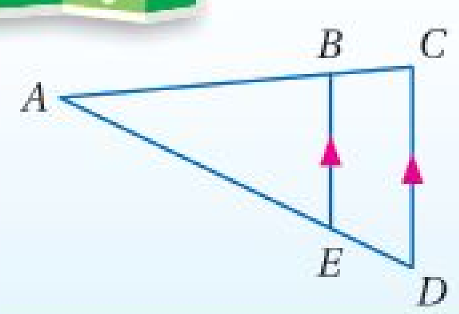
الأجزاء المتناسبة في المثلث: عند رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث، فإنّه يمكن إثبات أن المثلثين الناتجين متشابهان، وذلك باستعمال مسلمة التشابه AA، وبما أن المثلثين متشابهان، فإنّ أطوال أضلاعهما متناسبة.

نظريّة 6.5 **نظريّة التناسب في المثلث**

أضف إلى مطويتك

إذا وازى مستقيم ضلعًا من أضلاع مثلث وقطع ضلعيه الآخرين، فإنّه يقسمهما إلى قطع مستقيمة متناظرة أطوالها متناسبة.

مثال: إذا كان $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$ ، فإن $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{ED}$.



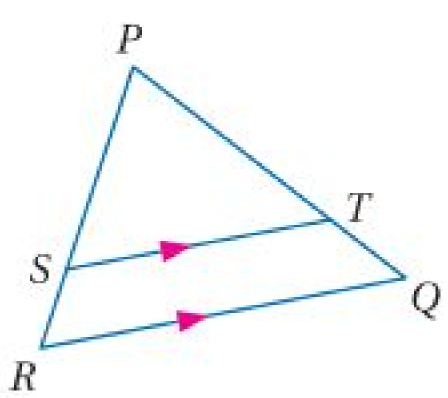
ستبرهن النظريّة 6.5 في السؤال 21

إرشادات للدراسة

التوازي:
إذا كان المستقيمان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متوازيين، فإن القطعتين المستقيمتين $\overline{AB}, \overline{CD}$ متوازيتان؛ لأنهما جزء من المستقيمين $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ على الترتيب.
أي أنه إذا كان $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$، فإن $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

مثال 1 إيجاد طول ضلع

في $\triangle PQR$ ، إذا كان: $\overline{ST} \parallel \overline{RQ}, PT = 7.5, TQ = 3, SR = 2.5$ ، فأوجد PS .



استعمل نظريّة التناسب في المثلث.

$\frac{PS}{SR} = \frac{PT}{TQ}$ نظرية التناسب في المثلث

$\frac{PS}{2.5} = \frac{7.5}{3}$ بالتعويض

$PS \cdot 3 = (2.5)(7.5)$ خاصية الضرب التبادلي

$3PS = 18.75$ بالضرب

$PS = 6.25$ بقسمة كلا الطرفين على 3

تحقق من فهمك

1) في الشكل أعلاه، إذا كان: $PT = 15 , SR = 5 , PS = 12.5$ ، فأوجد TQ .

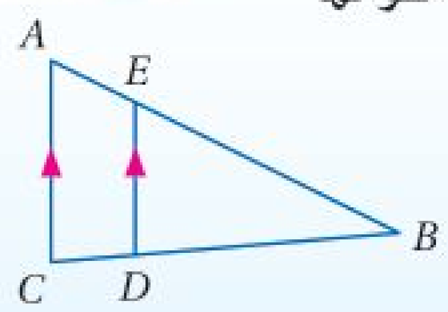
وعكس النظرّية 6.5 صحيح أيضًا، ويمكن إثباته باستعمال الأجزاء المتناسبة في المثلث ونظرية التشابه SAS .

نظريّة 6.6 عكس نظريّة التناسب في المثلث

أضف إلى مطويتك

إذا قطع مستقيم ضلعين في مثلث وقسمهما إلى قطع مستقيمة متناظرة أطوالها متناسبة، فإن المستقيم يوازي الضلع الثالث للمثلث.

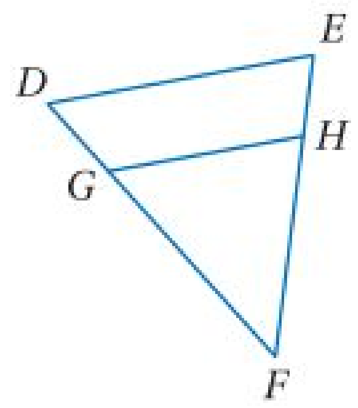
مثال: إذا كان $\frac{AE}{EB} = \frac{CD}{DB}$ ، فإن $\overline{ED} \parallel \overline{AC}$.



ستبرهن النظرية 6.6 في السؤال 22

مثال 2 تحديد ما إذا كان المستقيمان متوازيين

في $\triangle DEF$ إذا كان: $DG = \frac{1}{3} GF, EH = 3, HF = 9$ ، فهل $\overline{GH} \parallel \overline{DE}$؟ وضح إجابتك.



يتعين عليك إثبات أنّ $\frac{DG}{GF} = \frac{EH}{HF}$ ، وذلك باستعمال عكس نظرية التناسب في المثلث.

$DG = \frac{1}{3} GF$	معطى
$\frac{DG}{GF} = \frac{1}{3}$	بقسمة كلا الطرفين على GF
$\frac{EH}{HF} = \frac{3}{9}$	بالتعويض $EH = 3$ ، $HF = 9$
$= \frac{1}{3}$	بالتبسيط

وبما أن:

$$\frac{DG}{GF} = \frac{EH}{HF} = \frac{1}{3}$$

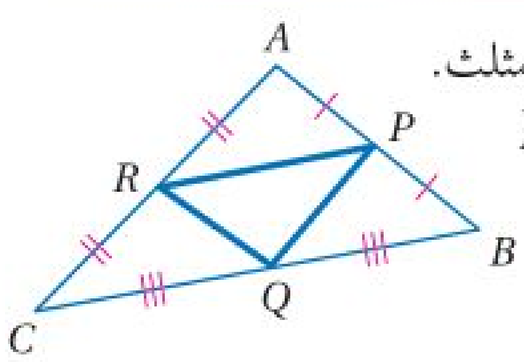
بحسب عكس نظرية التناسب في المثلث، تكون $\overline{DE} \parallel \overline{GH}$

تحقق من فهمك

2) في الشكل أعلاه، إذا كان: $DG = \frac{1}{2} GF, EH = 6, HF = 10$ ، فهل $\overline{GH} \parallel \overline{DE}$ ؟

القطعة المنصّفة في المثلث هي قطعة مستقيمة طرفاها نقطتا منتصف ضلعين في المثلث. وفي كل مثلث ثلاث قطع منصّفة. فالقطع المنصّفة في $\triangle ABC$ هي $\overline{RP}, \overline{PQ}, \overline{RQ}$

ونظرية القطعة المنصّفة في المثلث هي حالة خاصّة من عكس نظرية التناسب في المثلث.



إرشادات للدراسة

مثلث القطع المنصفة : القطع المنصفة الثلاث في المثلث تشكل مثلثًا يُسمى مثلث القطع المنصّفة.

نظرية 6.7 نظريّة القطعة المنصّفة في المثلث

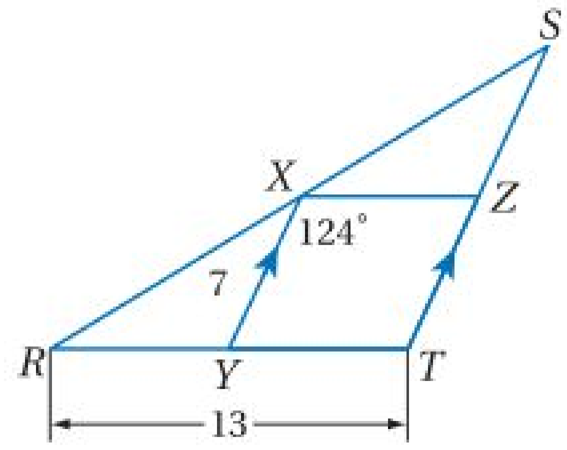
أضف إلى مطويتك

القطعة المنصفة في المثلث توازي أحد أضلاعه، وطولها يساوي نصف طول ذلك الضلع.

مثال: إذا كانت J, K نقطتَي منتصف $\overline{FH}, \overline{HG}$ على الترتيب، فإن: $\overline{JK} \parallel \overline{FG}, JK = \frac{1}{2} FG$.

ستبرهن النظرية 6.7 في السؤال 23

مثال 3 استعمال نظريّة القطعة المنصّفة في المثلث



في $\triangle RST$ ، إذا كانت $\overline{XY}, \overline{XZ}$ قطعتين منصّفتين، فأوجد كل قياس مما يأتي:

a) XZ

$XZ = \frac{1}{2}RT$	نظرية القطعة المنصّفة في المثلث
$XZ = \frac{1}{2}(13)$	بالتعويض
$XZ = 6.5$	بالتبسيط

b) ST

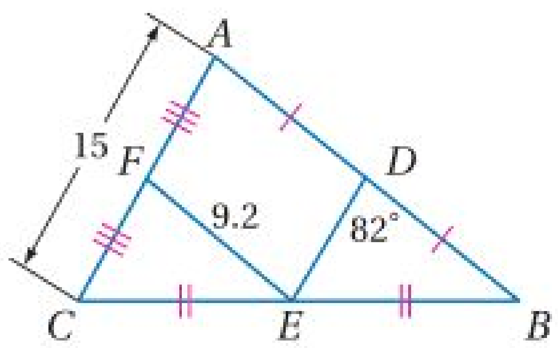
$XY = \frac{1}{2}ST$	نظرية القطعة المنصّفة في المثلث
$7 = \frac{1}{2}ST$	بالتعويض
$14 = ST$	بضرب كلا الطرفين في 2

c) $m\angle RYX$

$\overline{XZ}$ قطعة منصفة في $\triangle RST$ ، إذن $\overline{RT} \parallel \overline{XZ}$.

$\angle RYX \cong \angle YXZ$	نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا
$m\angle RYX = m\angle YXZ$	تعريف تطابق الزوايا
$m\angle RYX = 124°$	بالتعويض

✓ تحقق من فهمك



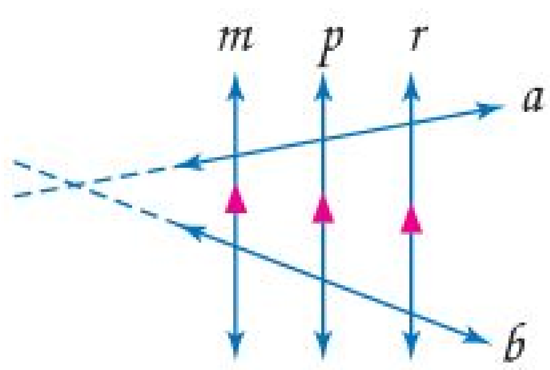
أوجد كل قياس مما يأتي معتمدًا على الشكل المجاور:

3A) DE

3B) DB

3C) $m\angle FED$

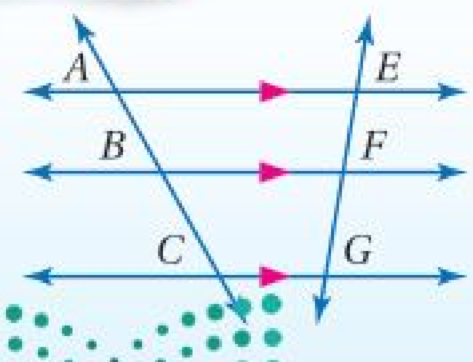
الأجزاء المتناسبة من قاطعين لمستقيمات متوازية



هناك حالة خاصّة أخرى لنظرية التناسب في المثلث تتضمن ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر، يقطعها قاطعان. لاحظ أنّه إذا مُدَّ القاطعان a , b ، فإنّهما يصنعان ثلاثة مثلثاتٍ لها ثلاثة أضلاع متوازية.

نتيجة 6.1 الأجزاء المتناسبة من قاطعين لمستقيمات متوازية

أضف إلى مطويتك



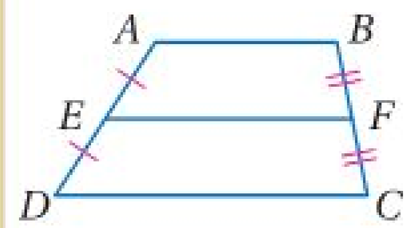
إذا قطع قاطعان ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر، فإن أطوال أجزاء القاطعين تكون متناسبة.

مثال: إذا كان: $\overline{AE} \parallel \overline{BF} \parallel \overline{CG}$ ، وكان $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{EG}$ قاطعان لها، فإن $\frac{AB}{BC} = \frac{EF}{FG}$.

ستبرهن النتيجة 6.1 في السؤال 19

إرشادات للدراسة

القطعة المنصّفة: نظريّةُ القطعة المنصّفة في المثلث، تشبه نظريّة القطعة المنصّفة في شبه المنحرف، والتي تنصّ على أن القطعة المنصّفة في شبه المنحرف توازي القاعدتين، وطولها يساوي نصف مجموع طولَي القاعدتين.



$\overline{EF} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{DC}$

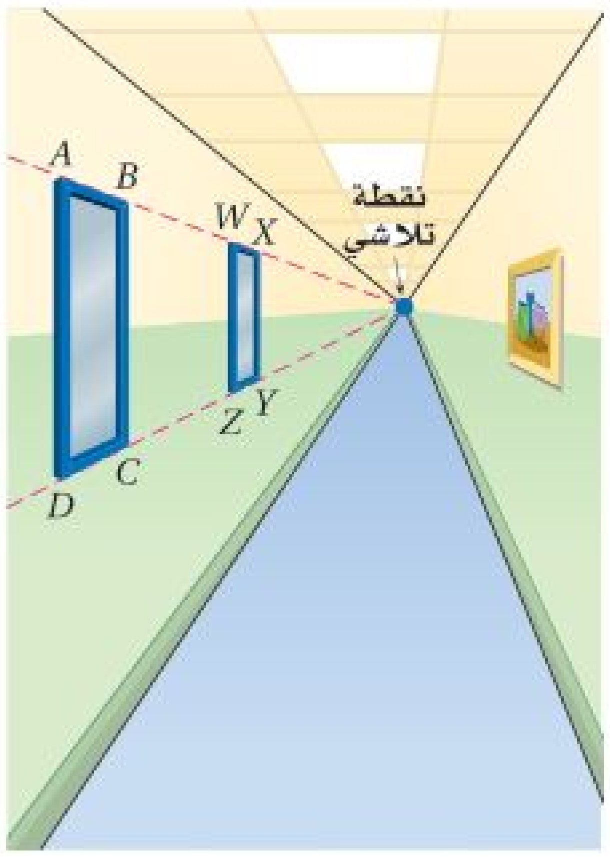
$EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$

إرشادات للدراسة

تناسبات أخرى: في النتيجة 6.1 ، يمكن كتابة تناسبين آخرين للمثال:

$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG}, \frac{AC}{BC} = \frac{EG}{FG}$

مثال 4 من واقع الحياة — استعمال القطع المتناسبة من قاطعين



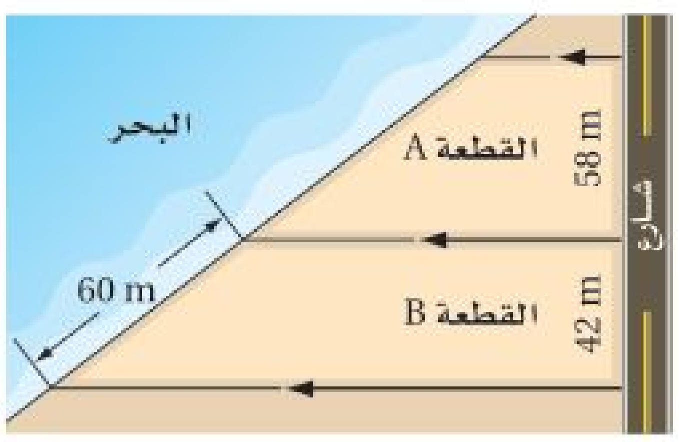
رسم: ترسم مريم ممرًّا في منظورٍ ذي نقطة تلاشٍ واحدة، فاستعملت مريم الخطوط الإرشادية المبيّنة؛ لرسم نافذتين على الجدار الأيسر. إذا كانت القطع المستقيمة: $\overline{AD}, \overline{BC}, \overline{WZ}, \overline{XY}$ متوازية، وكان: $AB = 8\text{ cm}, DC = 9\text{ cm}, ZY = 5\text{ cm}$، فأوجد WX.

بما أن $\overline{AD} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{WZ} \parallel \overline{XY}$، إذن $\frac{AB}{WX} = \frac{DC}{ZY}$ وفق النتيجة 6.1.

$\frac{AB}{WX} = \frac{DC}{ZY}$	النتيجة 6.1
$\frac{8}{WX} = \frac{9}{5}$	بالتعويض
$WX \cdot 9 = 8 \cdot 5$	خاصيّة الضرب التبادلي
$9WX = 40$	بالتبسيط
$WX = \frac{40}{9} \approx 4.4\text{ cm}$	بقسمة كلا الطرفين على 9

تحقق: نسبة DC إلى ZY هي 9 إلى 5، وهي تقريبًا 10 إلى 5 أو 2 إلى 1. وكذلك نسبة AB إلى WX هي 8 إلى 4.4 وهي تقريبًا 8 إلى 4 أو 2 إلى 1؛ إذن الإجابة معقولة. ✓

تحقق من فهمك



4) **عقارات:** واجهة قطعة الأرض هي طول حدّها المحاذي لمعْلَم ما مثل شارع أو بحر أو نهر، أوجد طول الواجهة البحريّة للقطعة A إلى أقرب عُشر المتر.

الربط مع الحياة

يستعمل الرسامون إيحاءات إدراكيّة متنوعة، تجعل الرسم الثنائي الأبعاد يبدو ثلاثي الأبعاد منها:

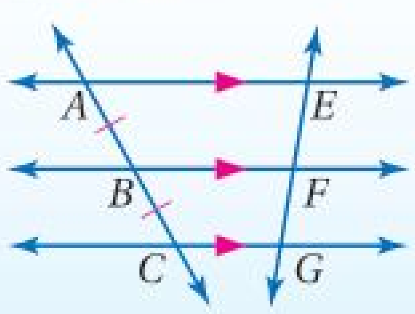
- **الحجم:** تبدو الأشياء البعيدة أصغر حجمًا.
- **الوضوح:** تبدو الأجسام القريبة أكثر وضوحًا.
- **التفاصيل:** تتضمن الأجسام القريبة تفاصيل دقيقة، في حين تتضمن الأجسام البعيدة معالم عامّة.

إذا كانت النسبة بين أطوال أجزاء القاطعين تساوي 1، فإن المستقيمات المتوازية تقطع أجزاءً متطابقة من القاطعين.

نتيجة 6.2 الأجزاء المتناسبة من قاطعين لمستقيمات متوازية

أضف إلى مطويتك

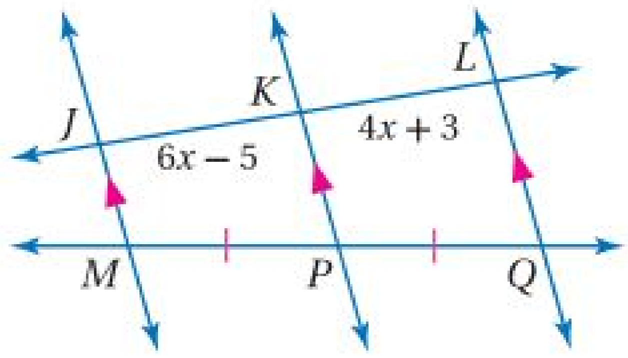
إذا قطع قاطع ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر، وكانت أجزاؤه متطابقة،فإن أجزاء أي قاطع آخر لها تكون متطابقة.



مثال: إذا كان: $\overline{AE} \parallel \overline{BF} \parallel \overline{CG}$، وكان $\overline{AC}, \overline{EG}$ قاطعين لها، بحيث $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ فإن $\overline{EF} \cong \overline{FG}$.

ستبرهن النتيجة 6.2 في السؤال 20

مثال 5 استعمال القطع المتطابقة من قاطعين



جبر: أوجد قيمة x .

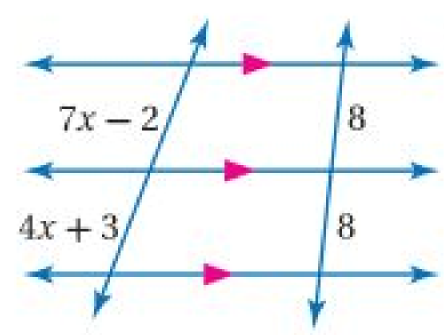
بما أنّ: $\overleftrightarrow{JM} \parallel \overleftrightarrow{KP} \parallel \overleftrightarrow{LQ}$, $\overline{MP} \cong \overline{PQ}$ ،
فإنّ $\overline{JK} \cong \overline{KL}$ وفق النتيجة 6.2 .

$JK = KL$	تعريف التطابق
$6x - 5 = 4x + 3$	بالتعويض
$2x - 5 = 3$	بطرح $4x$ من كلا الطرفين
$2x = 8$	بإضافة 5 للطرفين
$x = 4$	بقسمة كلا الطرفين على 2

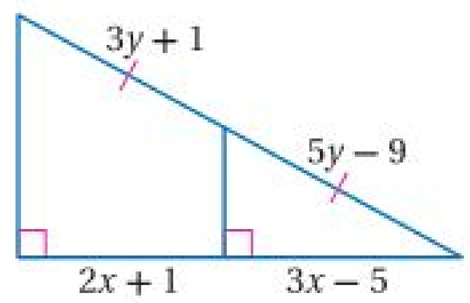
تحقق من فهمك

أوجد قيمة كلٍّ من x, y .

5A)



5B)

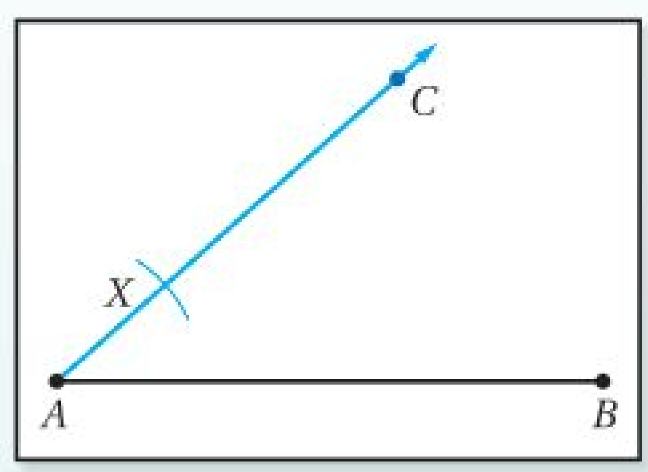


يمكن تقسيم قطعة مستقيمة إلى جزأين متطابقين، برسم العمود المنصّف للقطعة المستقيمة، ولكن لا يمكن تقسيم قطعة مستقيمة إلى ثلاثة أجزاء متطابقة برسم أعمدة منصّفة، ولعمل ذلك تستعمل المستقيمات المتوازية والنتيجة 6.2 .

إنشاءات هندسية: تقسيم قطعة مستقيمة إلى ثلاثة أجزاء متطابقة

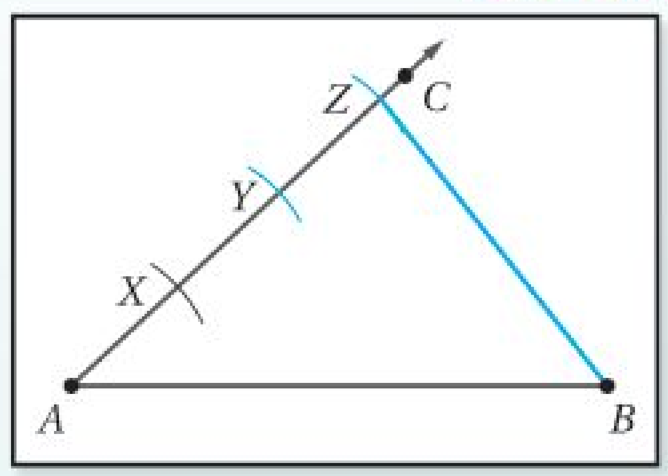
ارسم قطعة مستقيمة $\overline{AB}$، ثمّ استعمل النتيجة **6.2** ؛ لتقسيمها إلى **3** أجزاء متطابقة.

الخطوة 1:



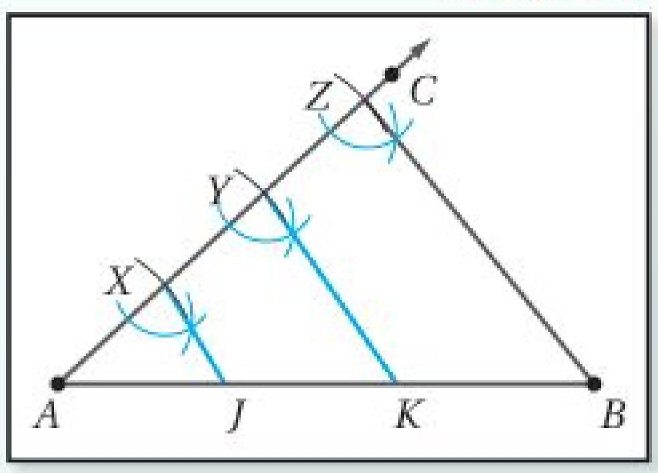
ارسم $\overrightarrow{AC}$، ثم ثبّت الفرجار عند A، وارسم قوسًا يقطع $\overrightarrow{AC}$ عند X .

الخطوة 2:



استعمل الفرجار بالفتحة نفسها؛ لتعيين النقطتين Y, Z، بحيث $\overline{AX} \cong \overline{XY} \cong \overline{YZ}$.
ثم ارسم $\overline{ZB}$.

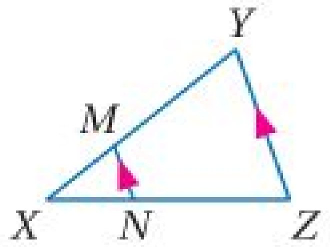
الخطوة 3:



أنشئ من X و Y مستقيمين يوازيان $\overline{ZB}$ كما درست سابقًا، وسمِّ نقطتي تقاطعهما مع $\overline{AB}$ بالحرفين J, K .

تأكـد

المثال 1 في $\triangle XYZ$ ، إذا كان $\overline{MN} \parallel \overline{YZ}$، فأجب عن السؤالين الآتيين:

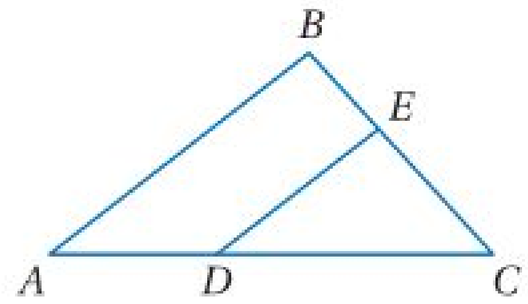


1) إذا كان: $XM = 4 , XN = 6 , NZ = 9$ ، فأوجد XY .

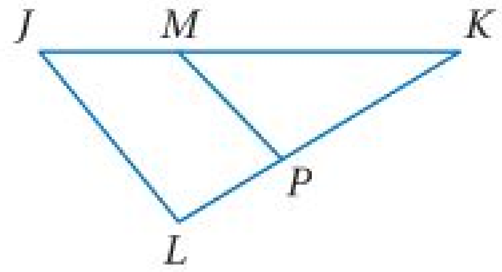
2) إذا كان: $XN = 6 , XM = 2 , XY = 10$ ، فأوجد NZ .

المثال 2

3) في $\triangle ABC$ ، إذا كان: $BC = 15, BE = 6$ ، $DC = 12 , AD = 8$ ، فهل $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ؟ برّر إجابتك.

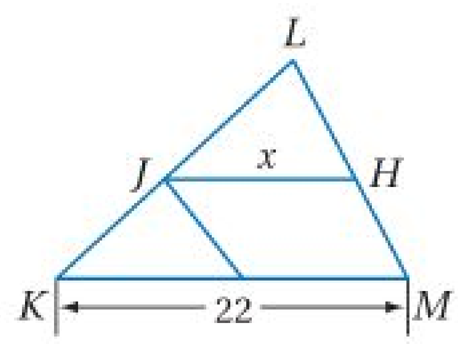


4) في $\triangle JKL$ ، إذا كان: $JK = 15, JM = 5$ ، $LK = 13, PK = 9$ ، فهل $\overline{MP} \parallel \overline{JL}$ ؟ برّر إجابتك.

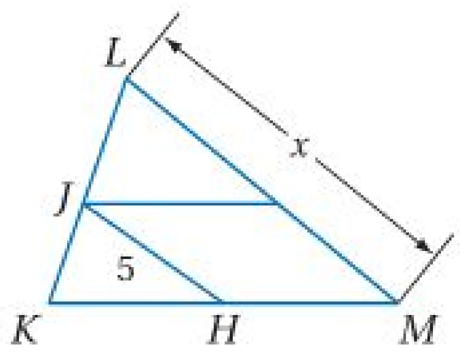


المثال 3 إذا كانت $\overline{JH}$ قطعة منصّفة في $\triangle KLM$ ، فأوجد قيمة x في السؤالين الآتيين:

5)



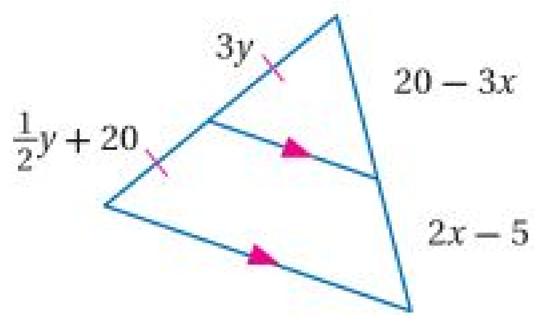
6)



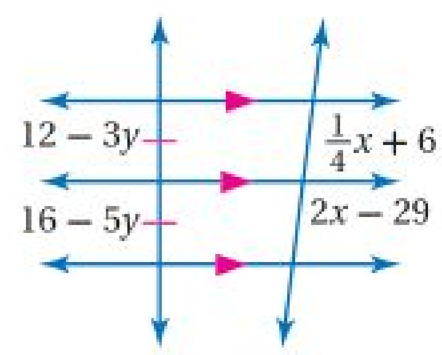
المثال 4 **7)** **خرائط:** الشارعان 5 , 3 في الخريطة المجاورة متوازيان. إذا كانت المسافة بين الشارع 3 والمركز التجاري على امتداد شارع أبو عبيدة 3201 m ، فأوجد المسافة بين الشارع 5 والمركز التجاري على امتداد شارع الاتحاد، مقربًا إجابتك إلى أقرب عُشر من المتر.

المثال 5 **جبر:** أوجد قيمتَي x, y في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

8)

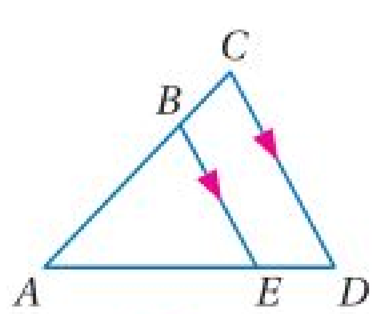


9)



تدرب وحل المسائل

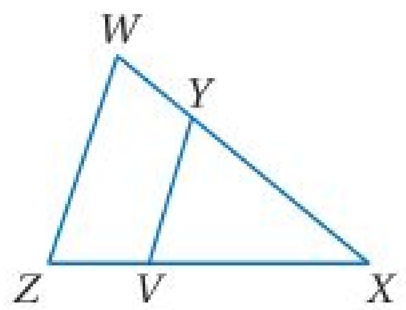
المثال 1 في $\triangle ACD$ ، إذا كان $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$، فأجب عن السؤالين الآتيين:



10) إذا كان: $AB = 6 , BC = 4 , AE = 9$ ، فأوجد ED .

11) إذا كان: $AB = 12 , AC = 16 , ED = 5$ ، فأوجد AE .

المثال 2 حدّد ما إذا كان $\overline{VY} \parallel \overline{ZW}$ أم لا، وبرّر إجابتك في كلٍّ من السؤالين الآتيين:



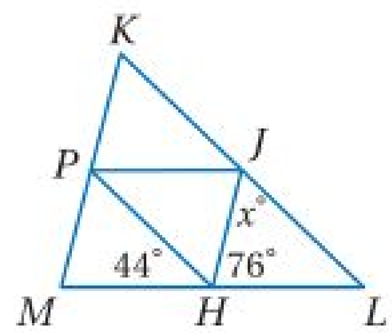
12) $ZX = 18, ZV = 6, WX = 24, YX = 16$

13) $WX = 31, YX = 21, ZX = 4ZV$

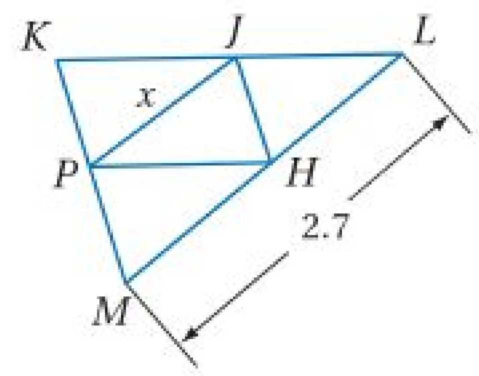
في $\triangle KLM$، إذا كانت $\overline{JH}, \overline{JP}, \overline{PH}$ قطعًا منصّفة، فأوجد قيمة x في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

المثال 3

14)



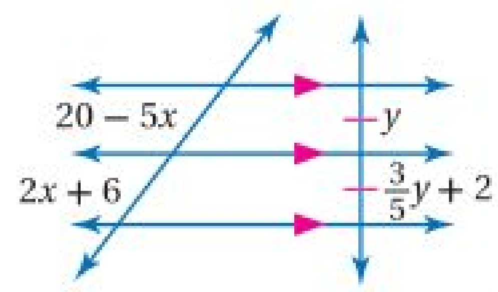
15)



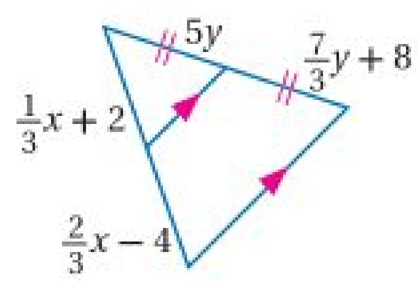
المثال 4 **16) خرائط:** المسافة من مدخل الحديقة إلى طريق المشاة على امتداد الطريق المرصوف 880 m. إذا كان طريق المشاة يوازي الطريق الترابي، فأوجد المسافة من مدخل الحديقة إلى طريق المشاة على امتداد منطقة الأشجار.

المثال 5 **جبر:** أوجد قيمة كل من x, y في السؤالين الآتيين:

17)



18)



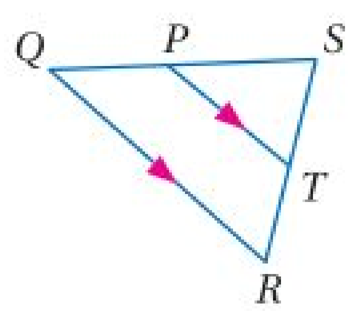
برهان: اكتب برهانًا حرًّا لكلٍّ مما يأتي:

19) النتيجة 6.1 **20)** النتيجة 6.2 **21)** النظرية 6.5

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين للنظريتين الآتيتين:

22) النظرية 6.6 **23)** النظرية 6.7

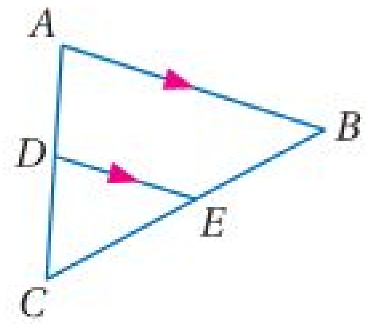
استعمل $\triangle QRS$ للإجابة عن السؤالين الآتيين:



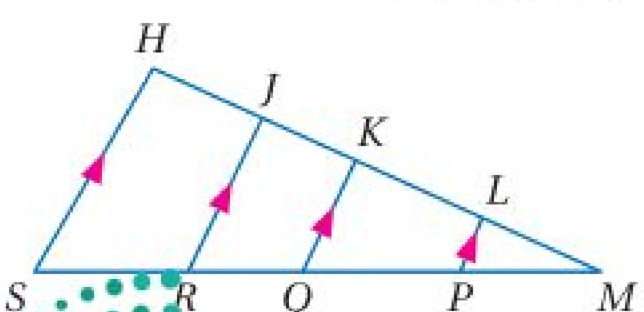
24) إذا كان: $ST = 8, TR = 4, PT = 6$، فأوجد QR.

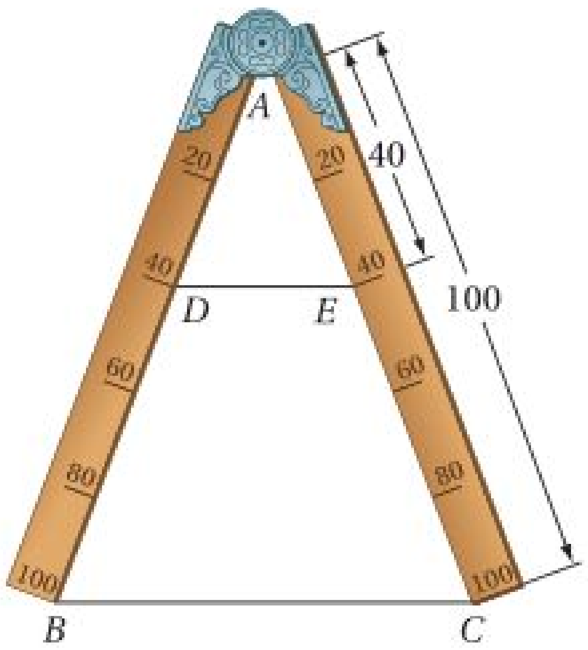
25) إذا كان: $SP = 4, PT = 6, QR = 12$، فأوجد SQ.

26) إذا كان: $CE = t - 2, EB = t + 1$، $CD = 2, CA = 10$، فأوجد قيمة كلٍّ من t, CE.



27) إذا كان: $LK = 4, MP = 3, PQ = 6, KJ = 2$، $RS = 6, LP = 2$، فأوجد قيمة كلٍّ من ML, QR, QK, JH



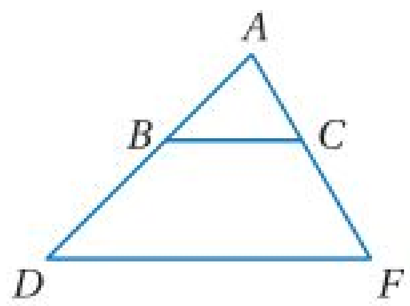


28) **تاريخ الرياضيات:** في القرن السادس عشر الميلادي، ابتكر جاليلو الفرجار لاستعماله في القياس كما في الشكل المجاور. ولرسم قطعةٍ مستقيمةٍ طولها يساوي خُمسَي طول قطعةٍ معلومةٍ. اجعل نهايتَي ساقَي الفرجار عند طرفَي القطعة المعلومة، ثم ارسم قطعةً مستقيمةً بين علامتَي 40 على ساقَي الفرجار. بيِّن أن طول $\overline{DE}$ يساوي خُمسَي طول $\overline{BC}$.

تاريخ الرياضيات

جاليلو جاليلي
(1564 م إلى 1642 م)
ولد جاليلو جاليلي في إيطاليا، ودرس الفلسفة والفلك والرياضيات، وله إسهامات جوهرية في كلٍّ منها.

أوجد قيمة x، بحيث يكون $\overline{DF} \parallel \overline{BC}$.



29) $AB = x + 5, BD = 12, AC = 3x + 1, CF = 15$

30) $AC = 15, BD = 3x - 2, CF = 3x + 2, AB = 12$

إنشاءات هندسية: **أنشئ كل قطعة مستقيمة فيما يأتي وفق التعليمات التالية:**

31) قطعة مستقيمة مقسّمة إلى خمس قطع متطابقة.

32) قطعة مستقيمة مقسّمة إلى قطعتين النسبة بين طولَيهما 1 إلى 3.

33) قطعة مستقيمة طولها 11 cm ، ومقسمة إلى أربع قطع متطابقة.

إرشادات للدراسة

إنشاءات هندسية:
تذكّر أن الفرجار والمسطرة غير المدرجة هما الأداتان الوحيدتان المستعملتان في الإنشاءات الهندسية.

34) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستستكشف تناسباتٍ مرتبطةً بمنصفات زوايا المثلث.

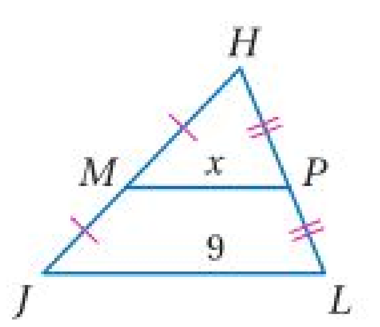
a) هندسيًّا: ارسم ثلاثة مثلثات: الأول حادّ الزوايا، وسمِّه ABC وارسم $\overrightarrow{BD}$ منصّفًا لـ $\angle B$. والثاني منفرج الزاوية وسمِّه MNP ، وارسم $\overrightarrow{NQ}$ منصّفًا لـ $\angle N$ ، والثالث قائم الزاوية وسمِّه WXY ، وارسم $\overrightarrow{XZ}$ منصّفًا لـ $\angle X$.

b) **جدوليًّا:** أكمل الجدول المجاور بالقيم المناسبة.

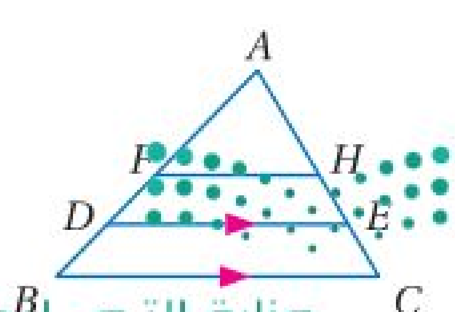
c) **لفظيًّا:** اكتب تخمينًا حول القطعتين المستقيمتين اللتين ينقسم إليهما ضلع مثلث عند رسم منصّفٍ للزاوية المقابلة لذلك الضلع.

المثلث	الطول		النسبة	
ABC	AD		$\frac{AD}{CD}$	
	CD			
	AB		$\frac{AB}{CB}$	
	CB			
MNP	MQ		$\frac{MQ}{PQ}$	
	PQ			
	MN		$\frac{MN}{PN}$	
	PN			
WXY	WZ		$\frac{WZ}{YZ}$	
	YZ			
	WX		$\frac{WX}{YX}$	
	YX			

مسائل مهارات التفكير العليا

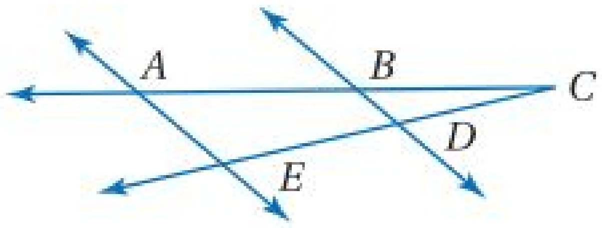


35) **اكتشف الخطأ:** يجد كلٌّ من أسامة وسلطان قيمة x في $\triangle JHL$، يقول أسامة: إنّ MP يساوي نصف JL ؛ إذن x تساوي 4.5، ويقول سلطان: إن JL يساوي نصف MP ؛ إذن x تساوي 18. فهل إجابة أيٍّ منهما صحيحة؟ وضّح إجابتك.



36) **تبرير:** في $\triangle ABC$ ، إذا كان: $AF = FB, AH = HC$ ، $DA = \frac{3}{4} AB, EA = \frac{3}{4} AC$ فهل $DE = \frac{3}{4} BC$ دائمًا أو أحيانًا أو لا يساويه أبدًا؟

37) **تحدٍّ:** اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: $AB = 4 , BC = 4 , CD = DE$

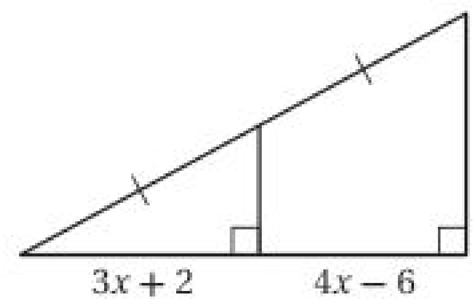
المطلوب: إثبات أن $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$

38) **مسألة مفتوحة:** ارسم ثلاث قطع مستقيمة أطوالها مختلفة a, b, c، ثم ارسم قطعةً رابعةً طولها d، بحيث يكون $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

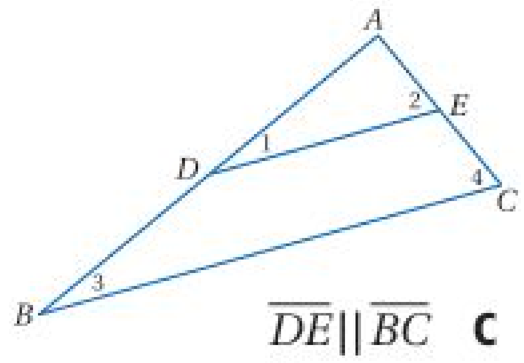
39) **اكتب:** قارن بين نظرية التناسب في المثلث ونظرية القطعة المنصّفة في المثلث.

تدريب على اختبار

40) **إجابة قصيرة:** ما قيمة x؟



41) في $\triangle ABC$، إذا كانت $\overline{DE}$ قطعة منصّفة، فأي العبارات التالية غير صحيحة؟



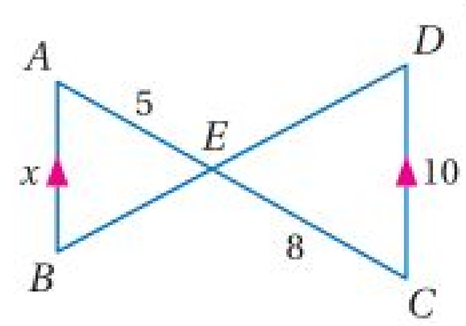
A $\angle 1 \cong \angle 4$ **C** $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

B $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ **D** $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

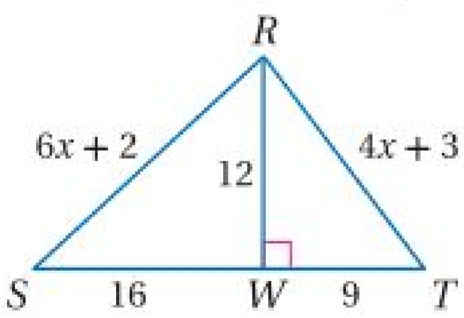
مراجعة تراكمية

جبر: اذكر النظرية أو المسلمة التي تبرر تشابه المثلثين، واكتب عبارة التشابه، ثم أوجد أطوال القطع المذكورة في كلٍّ ممّا يأتي: **(الدرس 2-6)**

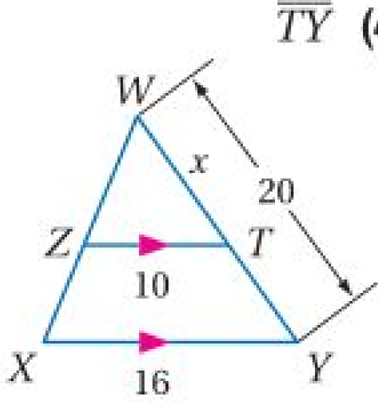
42) $\overline{AB}$



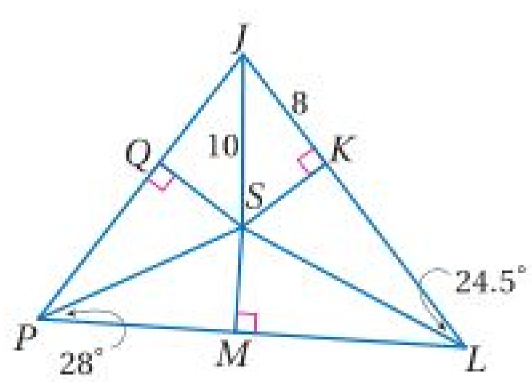
43) $\overline{RT}, \overline{RS}$



44) $\overline{TY}$



إذا كانت النقطة S مركز الدائرة الداخلية لِـ $\triangle JPL$، فأوجد كل قياسٍ ممّا يأتي: **(مهارة سابقة)**



45) SQ

46) QJ

47) $m\angle MPQ$

48) $m\angle SJP$

استعد للدرس اللاحق

حُل كل تناسب مما يأتي:

49) $\frac{1}{3} = \frac{x}{2}$

50) $\frac{3}{4} = \frac{5}{x}$

51) $\frac{2.3}{4} = \frac{x}{3.7}$

52) $\frac{x-2}{2} = \frac{4}{5}$

53) $\frac{x}{12-x} = \frac{8}{3}$

6-4 عناصر المثلثات المتشابهة
Parts of Similar Triangles

فيما سبق:

درستُ أن أطوال الأضلاع المتناظرة لمضلعين متشابهين تكون متناسبة.

(مهارة سابقة)

والآن:

- أتعرف علاقات التناسب الخاصة بكلٍّ من منصفات الزوايا والارتفاعات والقطع المتوسطة المتناظرة في المثلثات المتشابهة وأستعملها.
- أستعمل نظرية منصف زاوية في مثلث.

لماذا؟

في كاميرات التصوير الاحترافي تُستعمل أفلام بمعايير خاصة؛ للحصول على صور واضحة، وعند التقاط الصورة المجاورة، كانت المسافة بين النخلة وعدسة الكاميرا 6.16 m، وكان طول النخلة على الفيلم 35 mm، يمكن استعمال المثلثات المتشابهة لإيجاد طول النخلة الحقيقي.

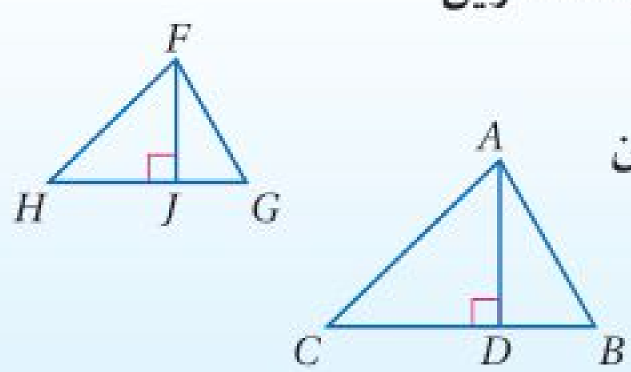
قطع مستقيمة خاصّة في المثلثين المتشابهين: تعلمت في الدرس **6-1**، أنّ أطوال الأضلاع المتناظرة في المضلعات المتشابهة، ومنها المثلثات، تكون متناسبة، ويمكن توسيع الفكرة إلى قطع مستقيمة أخرى في المثلثات.

نظريات — قطع مستقيمة خاصّة في المثلثين المتشابهين

أضف إلى مطويتك

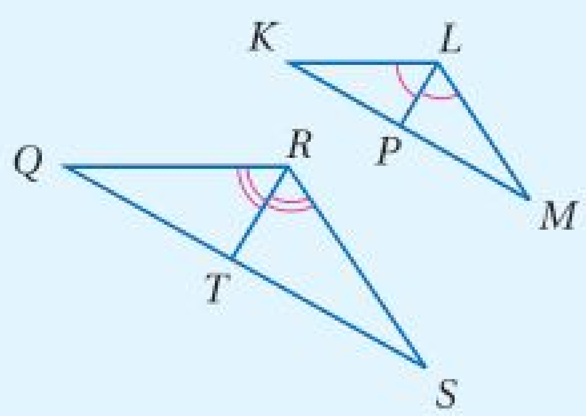
6.8 إذا تشابه مثلثان، فإنّ النسبة بين طولَي كل ارتفاعين متناظرين تساوي النسبة بين طولَي كلّ ضلعين متناظرين.

مثال: إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle FGH$ ، $\overline{FJ}, \overline{AD}$ ارتفاعين فإنّ $\frac{AD}{FJ} = \frac{AB}{FG}$.



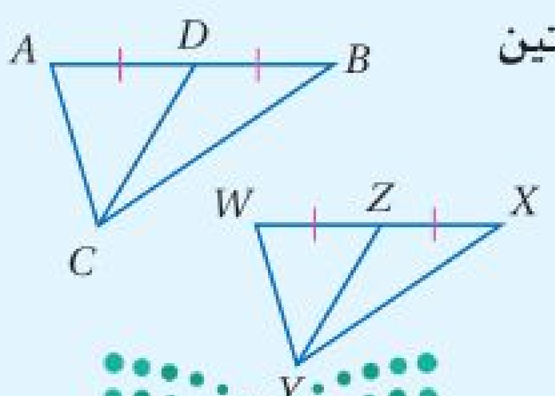
6.9 إذا تشابه مثلثان، فإن النسبة بين طولَي القطعتين المنصفتين لكل زاويتين متناظرتين تساوي النسبة بين طولَي كل ضلعين متناظرين.

مثال: إذا كان $\triangle KLM \sim \triangle QRS$ ، $\overline{LP}, \overline{RT}$ قطعتين منصفتين، فإن $\frac{LP}{RT} = \frac{LM}{RS}$.



6.10 إذا تشابه مثلثان، فإنّ النسبة بين طولَي كل قطعتين متوسطتين متناظرتين تساوي النسبة بين طولَي كل ضلعين متناظرين.

مثال: إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle WXY$ ، $\overline{CD}, \overline{YZ}$ قطعتين متوسطتين فإنّ $\frac{CD}{YZ} = \frac{AB}{WX}$.

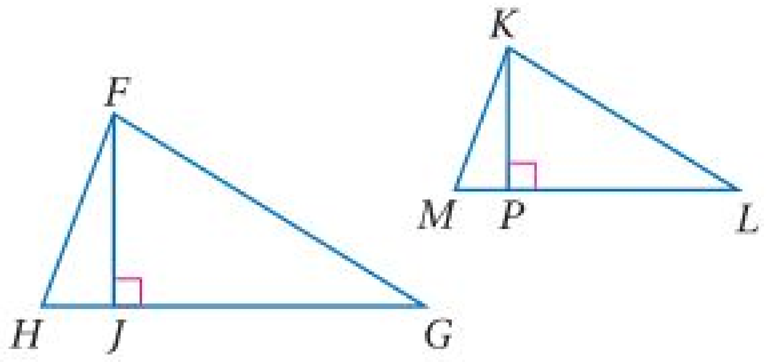


ستبرهن النظريتين 6.10 ,6.9 في السؤالين 15 ,14 على الترتيب

برهان النظرية 6.8

المعطيات: $\triangle FGH \sim \triangle KLM$ ، و $\overline{FJ}, \overline{KP}$ ارتفاعان.

المطلوب: $\frac{FJ}{KP} = \frac{HF}{MK}$



برهان حر:

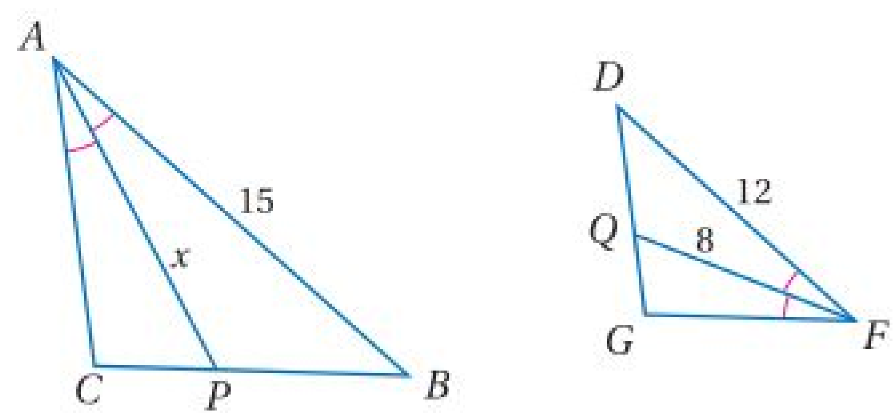
بما أن: $\triangle FGH \sim \triangle KLM$ ، إذن $\angle H \cong \angle M$ ، كما أن $\angle FJH \cong \angle KPM$ ؛ لأنهما زاويتان قائمتان ناتجتان عن ارتفاعين، وجميع الزوايا القوائم متطابقة؛ لذلك فإن

$\triangle HFJ \sim \triangle MKP$ بحسب مسلمة التشابه AA ؛ إذن $\frac{FJ}{KP} = \frac{HF}{MK}$ وفق تعريف المضلعين المتشابهين.

ويمكنك استعمال القطع المستقيمة الخاصة في المثلثات المتشابهة لإيجاد الأطوال المجهولة.

مثال 1 استعمال القطع الخاصّة في المثلثات المتشابهة

إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle FDG$ في الشكل أدناه، فأوجد قيمة x .



$\overline{AP}, \overline{FQ}$ منصّفا زاويتين متناظرتين و $\overline{AB}, \overline{FD}$ ضلعان متناظران للمثلثين المتشابهين ABC, FDG .

$\frac{AP}{FQ} = \frac{AB}{FD}$ النسبة بين طولَي القطعتين المستقيمتين المنصفتين لزاويتين متناظرتين في مثلثين متشابهين، تساوي النسبة بين طولَي ضلعين متناظرين.

$\frac{x}{8} = \frac{15}{12}$ بالتعويض

$8 \cdot 15 = x \cdot 12$ خاصية الضرب التبادلي

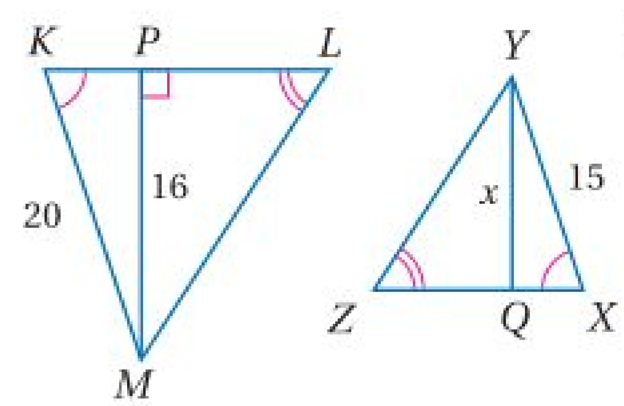
$120 = 12x$ بالتبسيط.

$10 = x$ بقسمة كلا الطرفين على 12

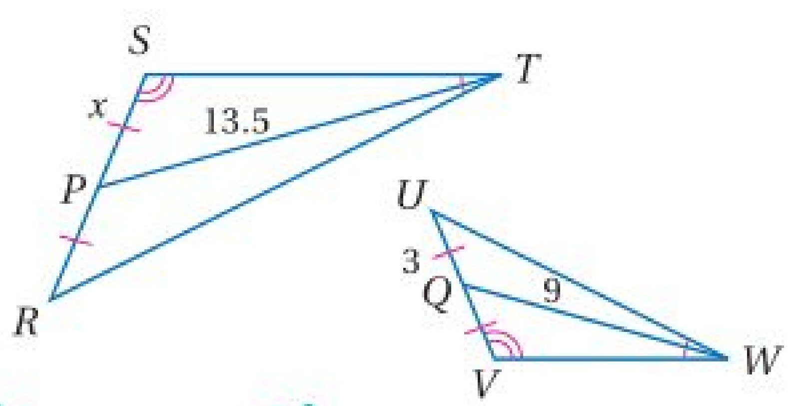
✓ تحقق من فهمك

أوجد قيمة x في المثلثين المتشابهين، في كل من السؤالين الآتيين:

(1A



(1B



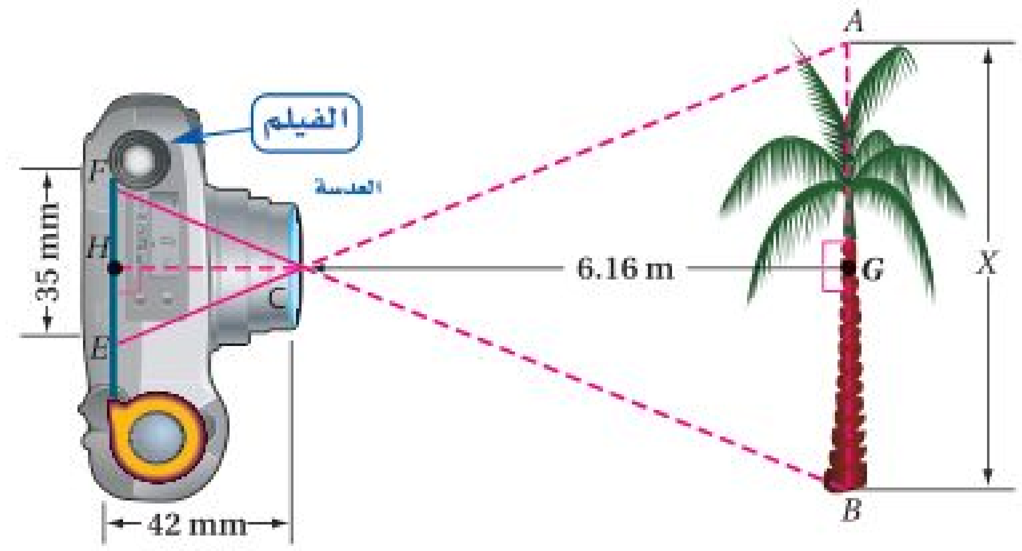
إرشادات للدراسة

استعمال معامل التشابه: يمكن حل المثال 1 أيضًا بإيجاد معامل التشابه بين $\triangle ABC, \triangle FDG$ أولًا ، وتكون النسبة بين طول القطعة المستقيمة المنصّفة لزاوية في $\triangle ABC$ إلى طول القطعة المستقيمة المنصّفة للزاوية المناظرة لها في $\triangle FDG$ تساوي معامل التشابه هذا.

يمكنك استعمال القطع المستقيمة الخاصّة في المثلثات المتشابهة لحل مسائل **من واقع الحياة**.

مثال 2 من واقع الحياة — استعمال المثلثات المتشابهة لحل المسائل

تصوير: بالرجوع إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس، يبين الرسم التوضيحي أدناه (الرسم ليس على القياس) موقع الكاميرا وطول الصورة والمسافة من عدسة الكاميرا إلى الفيلم. أوجد الارتفاع الحقيقي للنخلة.



افهم: المعطيات: المسافة بين النخلة وعدسة الكاميرا 6.16 m، وطول النخلة على الفيلم 35 mm، والمسافة بين العدسة والفيلم 42 mm.

المطلوب: الارتفاع الحقيقي للنخلة.

تكون النخلة وصورتها على الفيلم متوازيتين، ويكون $\overline{CH}$ و $\overline{CG}$ ارتفاعين في المثلثين $\triangle ABC, \triangle EFC$.

خطط: بما أنّ $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$، فإنّ: $\angle BAC \cong \angle CEF, \angle CBA \cong \angle CFE$ وفق نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا؛ لذلك فإن $\triangle ABC \sim \triangle EFC$ وفق مسلمة التشابه AA. اكتب تناسبًا وحُلّه لإيجاد قيمة x.

حل:

$\dfrac{AB}{EF} = \dfrac{GC}{HC}$ — النظرية 6.8

$\dfrac{x\,\text{m}}{35\,\text{mm}} = \dfrac{6.16\,\text{m}}{42\,\text{mm}}$ — بالتعويض

$x\,(42) = 35\,(6.16)$ — خاصيّة الضرب التبادلي

$42x = 215.6$ — بالتبسيط

$x \approx 5.13$ — بقسمة كلا الطرفين على 42

إذن ارتفاع النخلة 5.13 m تقريبًا.

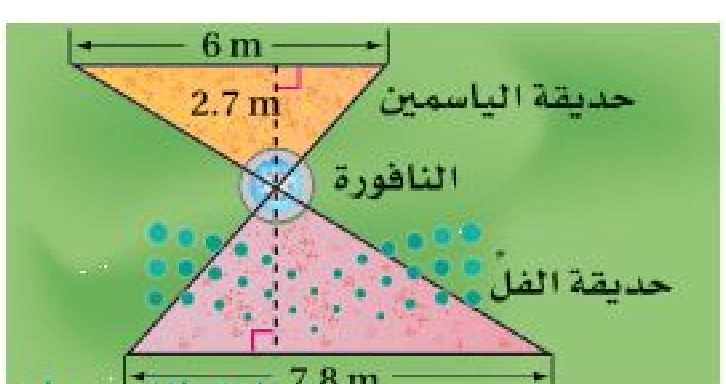
تحقق: نسبة طول الصورة إلى المسافة بين العدسة والفيلم هي 35:42 أو 5:6، ونسبة ارتفاع النخلة إلى المسافة بينها وبين العدسة هي: 5.13 : 6.16؛ أي 5:6 تقريبًا. ✔

الربط مع الحياة

طُرحت الكاميرات الرقمية في الأسواق لأول مرة عام 1994م، وكانت درجة وضوح الصورة 640 × 480 بكسل، وفي عام 2005 أمكن أخذ صورة بدرجة وضوح بلغت 2912 × 4368 بكسل بواسطة كاميرا أكثر وضوحًا لدرجة 12.8 مليون بكسل، وهي صورة أوضح كثيرًا مما تعرضه معظم الحواسيب، فظهرت شاشات حواسيب عالية الوضوح تسمى $4K$.

✔ تحقق من فهمك

2) **حدائق:** في الشكل المجاور حديقتان بجوارهما نافورة، إذا كانت الحديقتان تشكلان مثلثين متشابهين، فأوجد المسافة من مركز النافورة إلى الضلع الأطول في حديقة الفُلّ.



نظريّة منصّف زاوية في مثلث: تعلمت أن منصّف زاوية هو نصف مستقيم يقسمها إلى زاويتين متجاورتين متطابقتين، وإضافة لذلك يقسم منصف الزاوية في مثلث الضلع المقابل وفق تناسبٍ مع الضلعين الآخرين.

نظرية 6.11

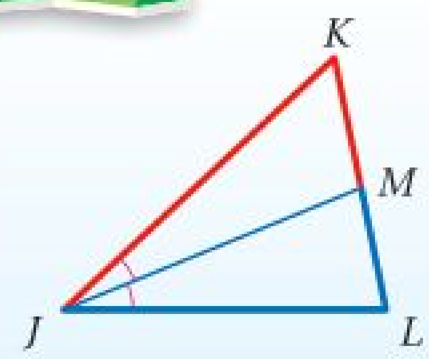
أضف إلى مطويتك

منصّف زاوية في مثلث

منصف زاوية في مثلث يقسم الضلع المقابل إلى قطعتين مستقيمتين النسبة بين طولَيهمَا تساوي النسبة بين طولَي الضلعين الآخرين.

مثال: إذا كانت $\overline{JM}$ منصّف زاوية في المثلث $\triangle JKL$

فإنّ $\dfrac{KM}{LM} = \dfrac{KJ}{LJ}$ ⟵ القطعتان المشتركتان بالرأس K ⟵ القطعتان المشتركتان بالرأس L



ستبرهن النظرية 6.11 في السؤال 19

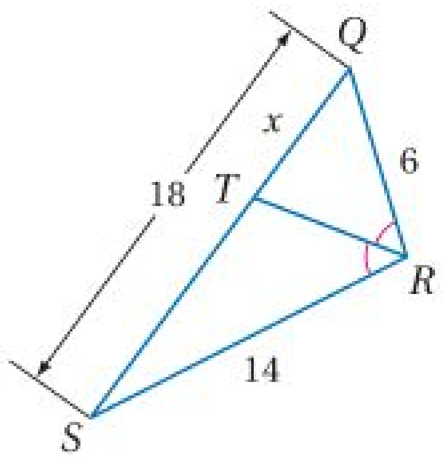
إرشادات للدراسة

التناسب: يمكن كتابة تناسبٍ آخر باستعمال نظريةِ منصَف زاوية في مثلث هو

$\dfrac{KM}{KJ} = \dfrac{LM}{LJ}$

مثال 3 استعمال نظرية منصّف زاوية في مثلث

أوجد قيمة x في الشكل المجاور.

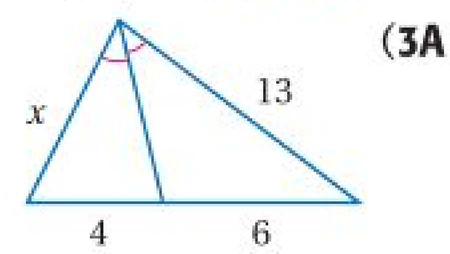


بما أنّ $\overline{RT}$ منصف زاوية في $\triangle QRS$ ، فيمكنك استعمال نظرية منصّف زاوية في مثلث لكتابة تناسب.

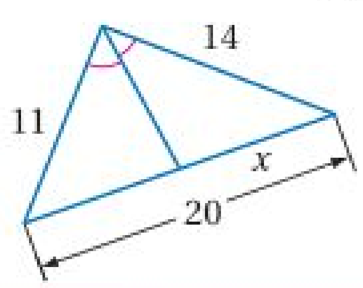
$\dfrac{QT}{ST} = \dfrac{QR}{SR}$	نظرية منصّف زاوية في مثلث
$\dfrac{x}{18 - x} = \dfrac{6}{14}$	بالتعويض
$(18 - x)(6) = x \cdot 14$	خاصية الضرب التبادلي
$108 - 6x = 14x$	بالتبسيط
$108 = 20x$	بإضافة $6x$ لكلا الطرفين
$5.4 = x$	بقسمة كلا الطرفين على 20

تحقق من فهمك أوجد قيمة x في كل من الشكلين الآتيين :

(3A



(3B



إرشادات للدراسة

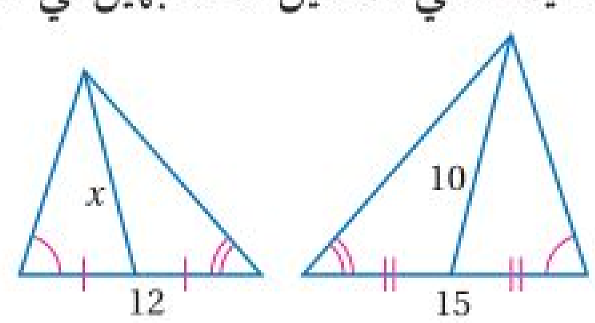
المثلثات الناتجة عن منصَف زاوية في مثلث: لا يرتبط التناسب في نظرية منصف زاويةٍ في مثلثٍ بتشابه مثلثينِ؛ إذ إنَ المثلثين الناشئين عن منصف زاويةٍ في مثلثٍ ليسا متشابهين في الحالة العامة، على الرغم من التناسب بين زوجين من أضلاعهما، ووجود زاوية في أحدهما مطابقة لزاوية في الآخر. لكن المثلثين يتشابهان في حالة قسمة المثلث إلى مثلثين متطابقين.

تأكد

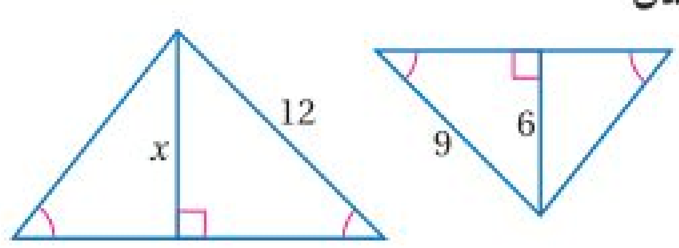
المثال 1

أوجد قيمة x في المثلثين المتشابهين في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

(1

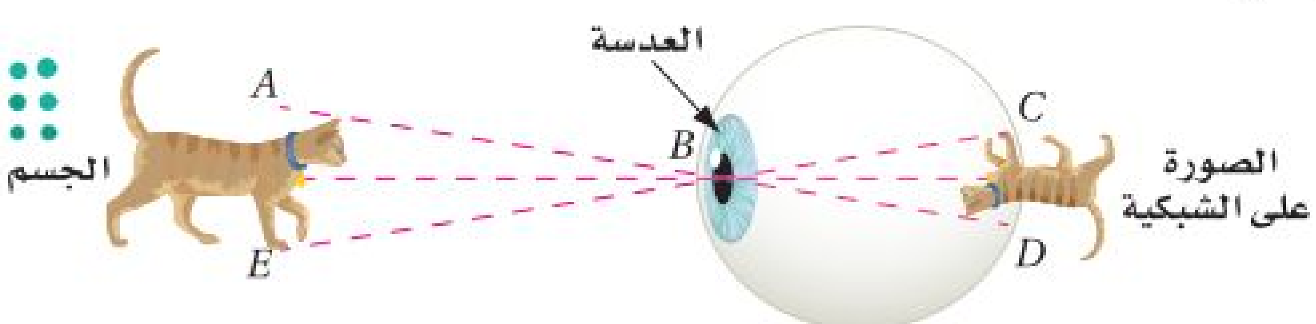


(2



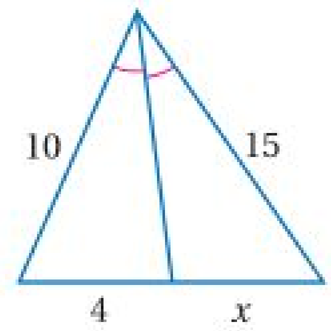
المثال 2

(3 **صورة:** ارتفاع قطّة 10 in ، وارتفاع صورتها على شبكيّة العين 7 mm، إذا كان $\triangle ABE \sim \triangle DBC$ ، وكانت المسافة من بؤبؤ العين إلى الشبكيّة 25 mm، فكم تبعد القطة عن بؤبؤ العين مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة؟

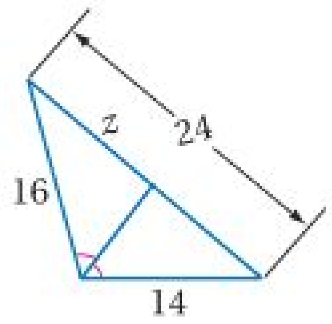


المثال 3 أوجد قيمة المتغيّر في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

4)



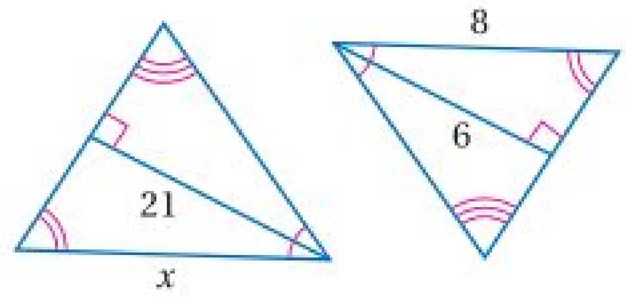
5)



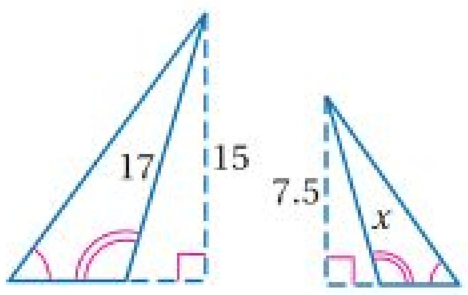
تدرب وحل المسائل

المثال 1 أوجد قيمة x في المثلثين المتشابهين في كلٍّ ممّا يأتي:

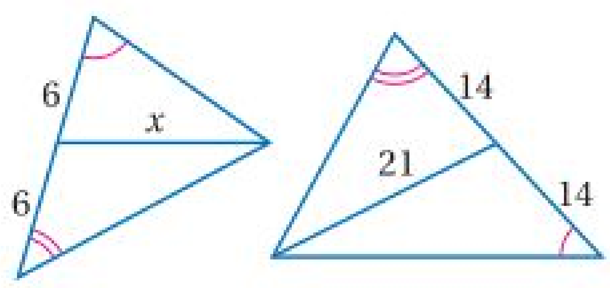
6)



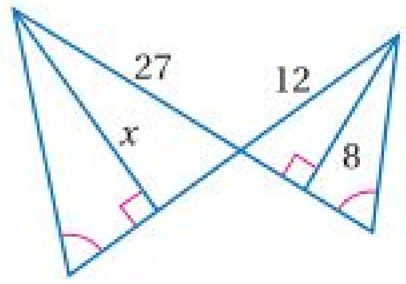
7)



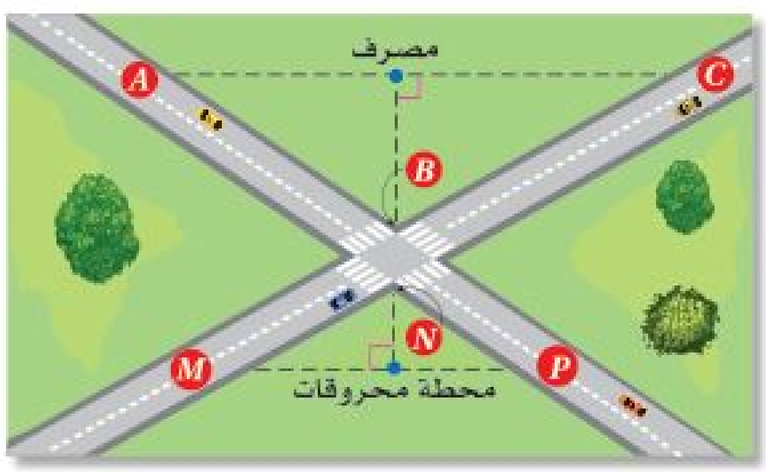
8)



9)

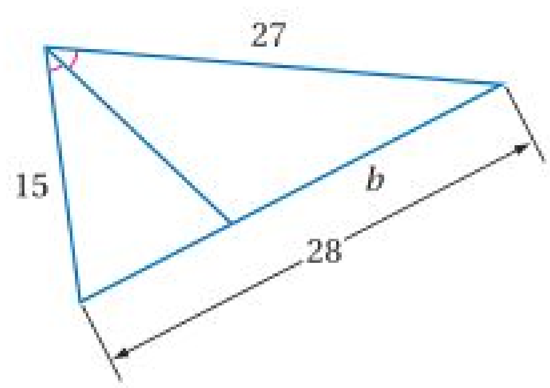


المثال 2 10) **طرق:** يشكّل الطريقان المتقاطعان في الشكل أدناه مثلثين متشابهين، إذا كان $AC = 382\,\text{ft}$، $MP = 248\,\text{ft}$، وتبعد محطة المحروقات 50 ft عن التقاطع، فكم يبعد المصرف عن التقاطع مقرّبًا إجابتك إلى أقرب عدد صحيح؟

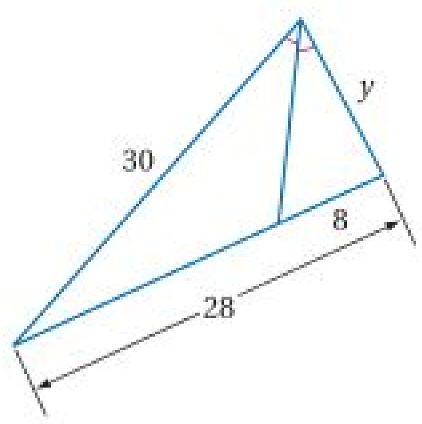


المثال 3 أوجد قيمة المتغيّر في كلٍّ من السؤالين الآتيين.

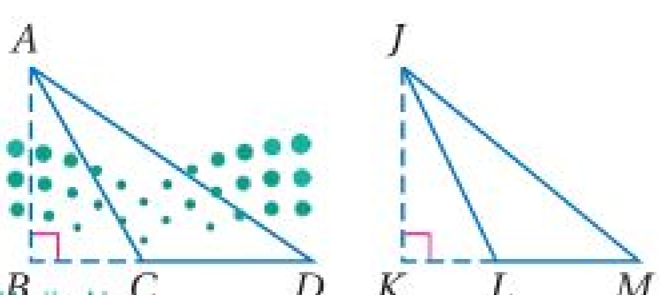
11)



12)



13) **جبر** إذا كانت $\overline{AB}$, $\overline{JK}$ ارتفاعين، وكان:
$\triangle DAC \sim \triangle MJL$, $AB = 9$
، $AD = 4x - 8$, $JK = 21$, $JM = 5x + 3$
فأوجد قيمة x.

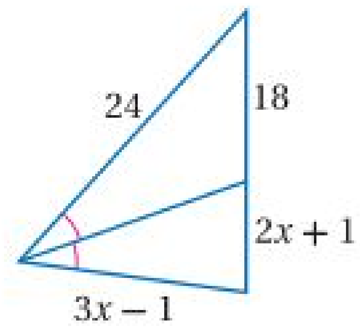


14) برهان: اكتب برهانًا حرًّا للنظريّة 6.9 .

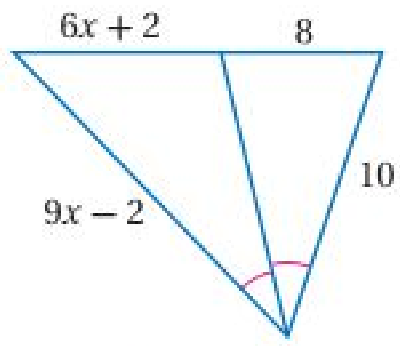
15) برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 6.10 .

جبر: أوجد قيمة x في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

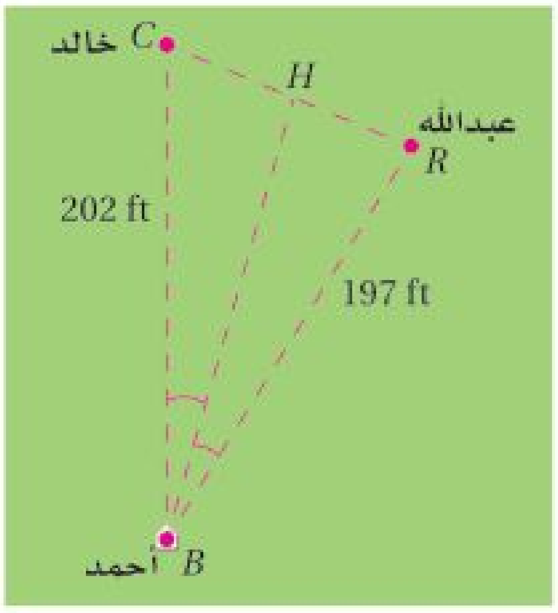
16)



17)



18) رياضة: تأمَّل المثلث المتشكل من المسارات بين أحمد وعبدالله وخالد في أثناء مباراة كرة قدم كما في الشكل المجاور. إذا ركل أحمد الكرة بمسار ينصف $\angle B$ في $\triangle CBR$، فأيهما أقرب إلى الكرة؛ عبد الله أم خالد؟ وضح إجابتك.



إرشادات للدراسة

التناسب: في التناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، إذا كان $a>c$، فإن $b>d$. والعكس صحيح أيضًا، إذا كان $b>d$، فإن $a>c$.

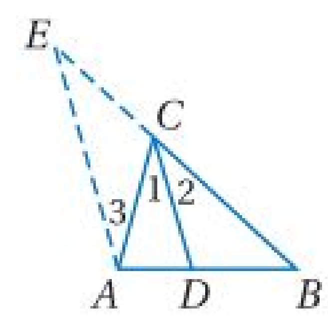
برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين في كلٍّ من السؤالين الآتيين.

19) النظريّة 6.11

المعطيات: $\overline{CD}$ تنصف $\angle ACB$.

وبالرسم $\overline{AE} \parallel \overline{CD}$.

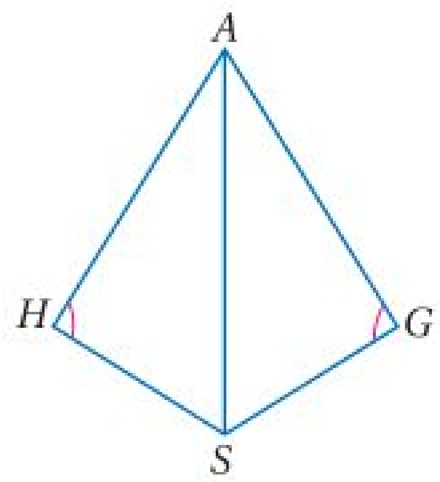
المطلوب: إثبات أن: $\frac{AD}{DB}=\frac{AC}{BC}$



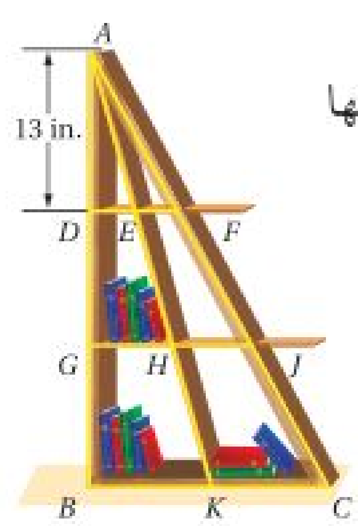
20) المعطيات: $\overline{AS}$ تنصف $\angle HAG$

$\angle H \cong \angle G$

المطلوب: إثبات أن: $\frac{HS}{GS}=\frac{AH}{AG}$

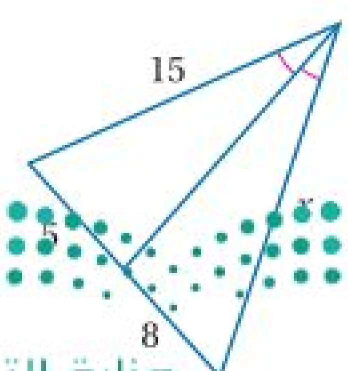


21) أثاث: يمثل الشكل المجاور خزانة كتب مثلثة الشكل، المسافة بين كل رفّين فيها تساوي 13 in، و $\overline{AK}$ قطعة متوسطة لِـ $\triangle ABC$. إذا كان $EF=3\frac{1}{3}$ in، فكم يكون BK؟



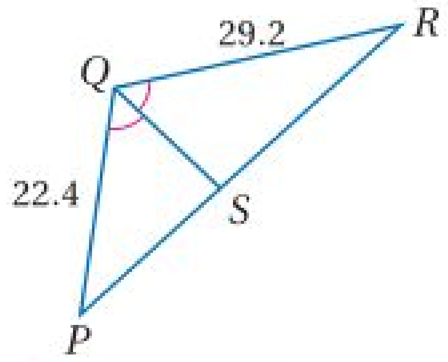
مسائل مهارات التفكير العليا

22) اكتشف الخطأ: يحاول كلٌّ من عبد الله وفيصل أن يجد قيمة x في الشكل المجاور. فيقول عبد الله: لإيجاد قيمة x أحل التناسب $\frac{5}{8}=\frac{15}{x}$، ويقول فيصل: لإيجاد قيمة x، أحل التناسب $\frac{8}{15}=\frac{5}{x}$ ، أيٌّ منهما على صواب؟ وضح إجابتك.



23) **تبرير:** أوجد مثالًا مضادًّا للعبارة الآتية. وضِّح إجابتك.

"إذا كانت النسبة بين ارتفاع مثلث وطول أحد أضلاعه تساوي النسبة بين الارتفاع وطول الضلع المناظرين لهما في مثلث آخر. فإنّ المثلثين متشابهان".

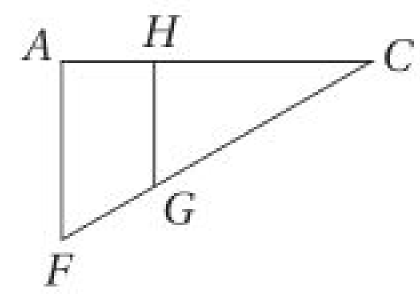


24) **تحدٍّ:** إذا كان محيط $\triangle PQR$ يساوي 94 وحدة، و $\overline{QS}$ منصّف لـ $\angle PQR$ ، فأوجد PS , RS .

25) **اكتب:** بيِّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين النظريّة 6.9 والنظرية 6.11 .

تدريب على اختبار

26) أيُّ الحقائق الآتية ليست كافيةً لإثبات أن المثلثين ACF و HCG متشابهان؟



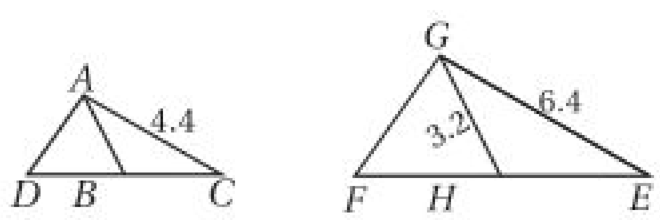
A $\overline{AF} \parallel \overline{HG}$

B $\dfrac{AC}{HC} = \dfrac{FC}{GC}$

C $\dfrac{CG}{CF} = \dfrac{1}{2}$

D $\angle FAH$ و $\angle CHG$ قائمتان.

27) **إجابة قصيرة:** في الشكلين أدناه: $\overline{DB} \cong \overline{BC}$, $\overline{FH} \cong \overline{HE}$

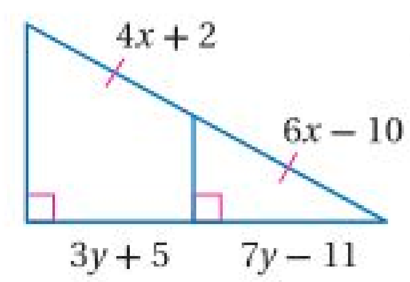


إذا كان: $\triangle ACD \sim \triangle GEF$ ، فأوجد AB .

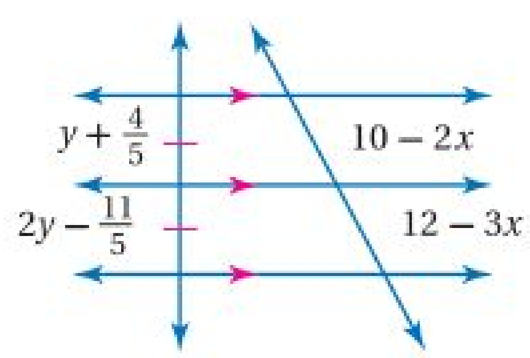
مراجعة تراكمية

جبر: أوجد قيمتَي x , y في كلٍّ ممّا يأتي. **(الدرس 6-3)**

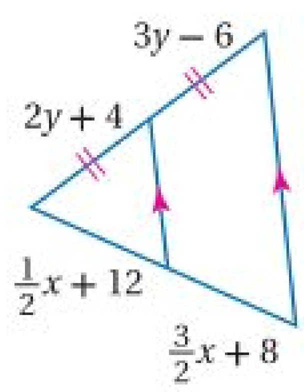
28)



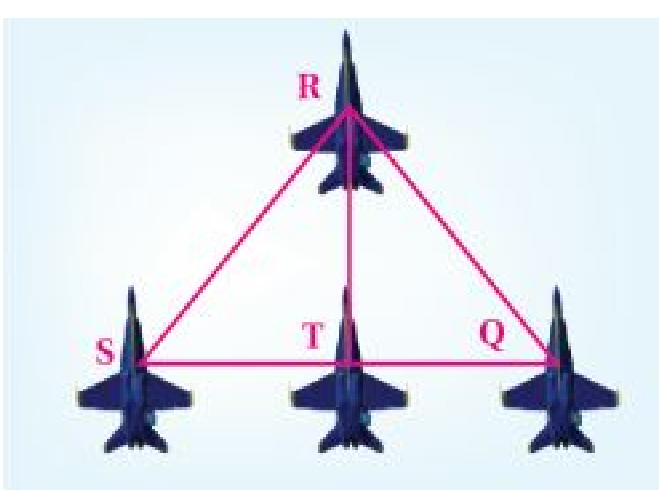
29)



30)



31) **طائرات:** في عرض للطائرات النفاثة، شكَّلت الطائرات تشكيلًا يبدو كمثلثين بينهما ضلع مشترك. اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن $\triangle SRT \cong \triangle QRT$ ، علمًا بأن T منتصف $\overline{SQ}$ ، و $\overline{SR} \cong \overline{QR}$. **(مهارة سابقة)**



استعد للدرس اللاحق

أوجد المسافة بين كل نقطتين في كلٍّ ممّا يأتي:

32) $E(-3, -2), F(5, 8)$

33) $A(2, 3), B(5, 7)$

34) $C(-2, 0), D(6, 4)$

35) $W(7, 3), Z(-4, -1)$

36) $J(-4, -5), K(2, 9)$

37) $R(-6, 10), S(8, -2)$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

توسع

6-4 معمل الهندسة: الكسريّات Fractals

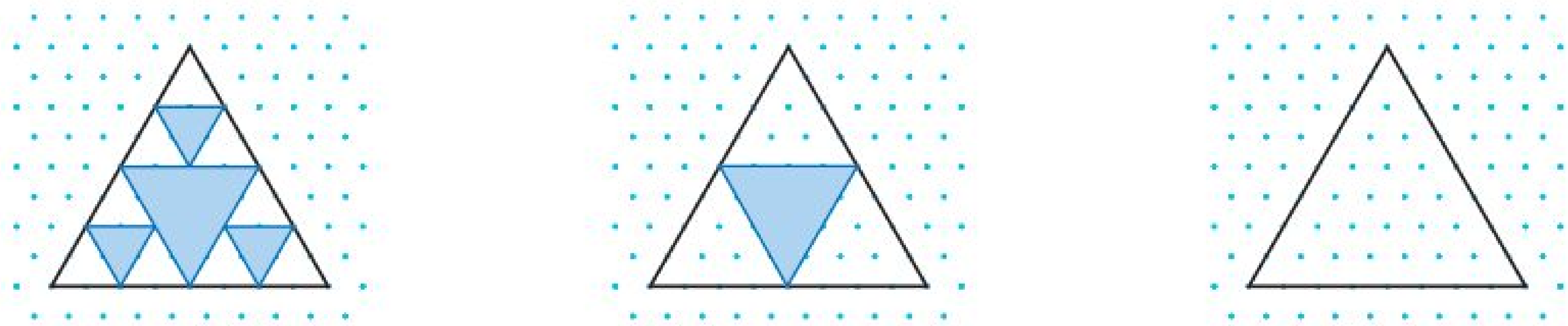
الكسريات أشكال هندسية تنتج باستعمال تكرار الأجزاء (iteration)، **وتكرار الأجزاء** هو عمليّة تكرار النمط نفسه مرّةً تِلْوَ الأخرى، وتكون الكسريات **ذاتيّة التشابه**؛ أي أن الأجزاء الصغيرة للشكل لها الخصائص الهندسية نفسها للشكل الأصلي.

نشاط 1

البداية: ارسم مثلثًا متطابق الأضلاع طول ضلعه 8 وحداتٍ في ورقة منقّطة.

المرحلة 1: صِلْ نقاط منتصفات أضلاع المثلث لتشكل مثلثًا آخر، وظلّل المثلث الداخلي.

المرحلة 2: كرّر العمليّة مع المثلثات الثلاثة غير المظلّلة، وصل نقاط منتصفات أضلاعها لتشكل ثلاثة مثلثات أخرى.



إذا كرّرت هذه العملية إلى مالانهاية، فإن الشكل الناتج يسمّى مثلث سيربنسكي.

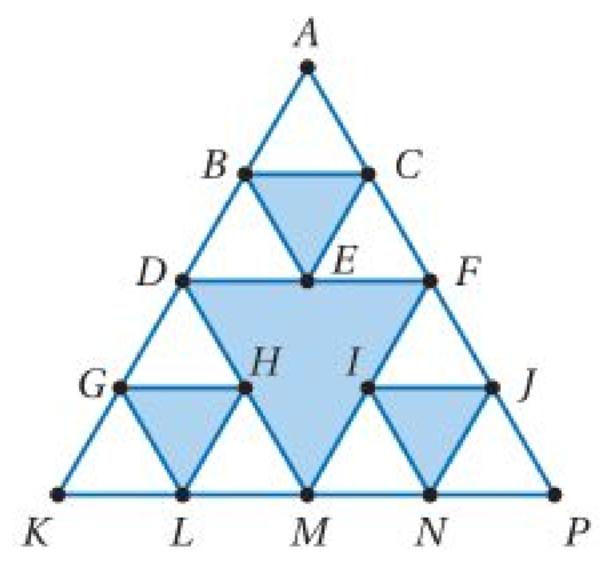
تحليل النتائج:

1) إذا استمررت في هذه العمليّة، فكم يكون عدد المثلثات غير المظلّلة في المرحلة 3؟

2) ما محيط المثلث غير المظلّل في المرحلة 4؟

3) إذا استمررت في هذه العملية إلى مالانهاية، فماذا سيحصل لمحيط كل مثلثٍ غير مظلّل؟

4) **تحدٍّ:** استنادًا إلى الشكل المجاور، أكمل الآتي باستعمال برهان ذي عمودين:



المعطيات: $\triangle KAP$ متطابق الأضلاع.

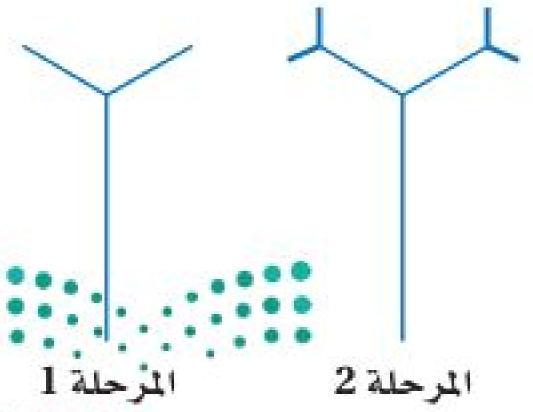
D, F, M, B, C, E منتصفات: $\overline{KA}, \overline{AP}, \overline{PK}, \overline{DA}, \overline{AF}, \overline{FD}$ على الترتيب.

المطلوب: $\triangle BAC \sim \triangle KAP$.

5) يمكن رسم شجرة كسريّة، برسم غصنين جديدين من نهاية كل غصن أصلي، بحيث يكون طول كل غصنٍ منها مساويًا ثلث طول الغصن السابق له .

a) ارسم المرحلة 3 والمرحلة 4 للشجرة الكسريّة. ما العدد الكلّي للأغصان في المراحل الأربع جميعها؟ (لا تعدّ الساق)

b) اكتب عبارةً جبريةً يمكن استعمالها للتنبؤ بالعدد الكلّي للأغصان في نهاية كل مرحلة.



جميع العمليات المكرّرة لا تتضمن رسوماتٍ لأشكال هندسيّة، فبعض العمليات المكرّرة، يمكن أن تترجَم إلى صيغٍ أو معادلات مشابهة للعبارة الجبرية التي كتبتها في السؤال 5 في الصفحة السابقة، وتسّمى هذه العبارات **صيغًا ترددية**.

نشاط 2

مثلث باسكال هو نمط عددي يبدأ كل صفٍّ فيه بالعدد 1، وينتهي بالعدد 1 أيضًا، وينتج كل حدٍّ من حدود الصفوف الأخرى عن جمع الحدّين الواقعين فوقه. أوجد صيغةً لمجموع حدود كل صف في مثلث باسكال بدلالة رقم هذا الصف.

الخطوة 1: اكتب الصفوف الخمسة الأولى من مثلث باسكال.

الخطوة 2: أوجد مجموع حدود كل صفٍّ.

الخطوة 3: أوجد نمطًا يعتمد على **رقم الصف**، ويمكن استعماله لإيجاد مجموع حدود كل صفٍّ.

الصف	مثلث باسكال	المجموع	النمط
1	1	1	$2^0 = 2^{1-1}$
2	1 1	2	$2^1 = 2^{2-1}$
3	1 2 1	4	$2^2 = 2^{3-1}$
4	1 3 3 1	8	$2^3 = 2^{4-1}$
5	1 4 6 4 1	16	$2^4 = 2^{5-1}$

تحليل النتائج:

6) اكتب صيغة للمجموع S لحدود الصف n لمثلث باسكال.

7) ما مجموع حدود الصف الثامن في مثلث باسكال؟

تمارين:

اكتب صيغةً ترددية لـ $F(x)$.

8)

x	2	4	6	8	10
$F(x)$	3	7	11	15	19

9)

x	0	5	10	15	20
$F(x)$	0	20	90	210	380

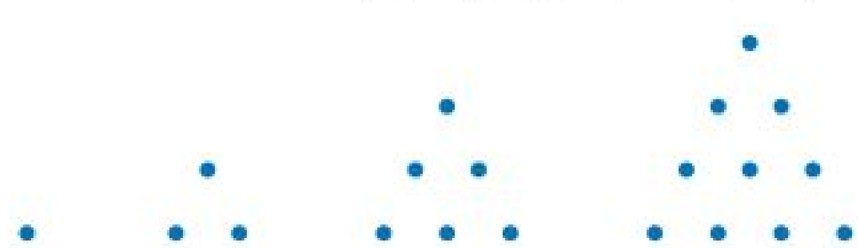
10)

x	1	2	4	8	10
$F(x)$	1	0.5	0.25	0.125	0.1

11)

x	4	9	16	25	36
$F(x)$	5	6	7	8	9

12) **تحدٍّ** يمثّل النمط أدناه متتابعة أعداد مثلثيّة. ما عدد النقاط في الحد الثامن في هذه المتتابعة؟ هل من الممكن كتابة صيغة ترددية يمكن استعمالها لتحديد عدد النقاط في العدد المثلّثي ذي الرقم n في هذه المتتابعة؟ وإذا كان ذلك ممكنًا فاكتب الصيغة، وإلّا فوضّح السبب.



1 2 3 4

الفصل 6

دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

المضلعات المتشابهة والمثلثات المتشابهة
(الدرسان 6-2 , 6-1)

- يتشابه مضلعان إذا وفقط إذا كانت زواياهما المتناظرة متطابقة، وأطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة.
- يكون المثلثان متشابهين إذا كانت:

AA : زاويتان في أحدهما مطابقتين لزاويتين في المثلث الآخر.

SSS : أطوال الأضلاع المتناظرة للمثلثين متناسبة.

SAS : طولا ضلعين في أحدهما متناسبين مع طولَي الضلعين المناظرين لهما في المثلث الآخر، والزاويتان المحصورتان متطابقتين.

الأجزاء المتناسبة (الدرس 6-3)

- إذا وازى مستقيم أحد أضلاع مثلث، وقطع الضلعين الآخرين في نقطتين محددتين، فإنّه يقسم هذين الضلعين إلى قطع مستقيمة أطوالها متناسبة.
- القطعة المنصّفة في المثلث توازي ضلعًا فيه، وطولها يساوي نصف طوله.

عناصر المثلثين المتشابهين (الدرس 6-4)

- إذا تشابه مثلثان فإن النسبة بين كلٍّ من طولَي ارتفاعيهما المتناظرين، وطولي منصِّفَي الزاويتين المتناظرتين، وطولي القطعتين المتوسطتين المتناظرتين تساوي النسبة بين طولَي ضلعين متناظرين.

المطويات منظم أفكار

تأكّد من أن **المفاهيم الأساسية** مدوَّنة في مطويتك.

مفردات أساسيّة

المضلعات المتشابهة (ص. 344)

معامل التشابه (ص. 345)

نسبة التشابه (ص. 345)

القطعة المنصّفة في المثلث (ص. 363)

الكسريات (ص. 378)

تكرار الأجزاء (ص. 378)

ذاتية التشابه (ص. 378)

صيغة ترددية (ص. 379)

اختبار المفردات

a) نسبة التشابه	**d)** نظرية التشابه SSS
b) معامل التشابه	**e)** نظرية التشابه SAS
c) مسلمة التشابه AA	**f)** القطعة المنصّفة

اختر مما سبق رمز الجملة التي تكمل كلًّا مما يأتي:

1) طرفا ___؟___ في المثلث هما منتصفا ضلعين فيه.

2) إذا كانت: $\angle A \cong \angle X, \angle C \cong \angle Z$ فإنّ $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$ وفق ___؟___ .

3) النسبة بين طولَي ضلعين متناظرين في مضلعين متشابهين هي ___؟___ .

4) إذا كانت أطوال الأضلاع المتناظرة في مثلثين متناسبة، فإن المثلثين متشابهان وفق ___؟___ .

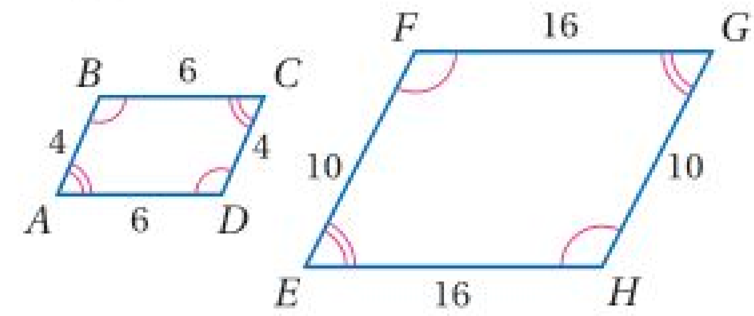
5) أحيانًا يطلق على معامل التشابه بين مضلعين اسم ___؟___ .

6) إذا كانت $\angle F \cong \angle A$ ، وكان $\frac{AC}{FD} = \frac{BA}{EF}$ ، فإن $\triangle BAC \sim \triangle EFD$ وفق ___؟___ .

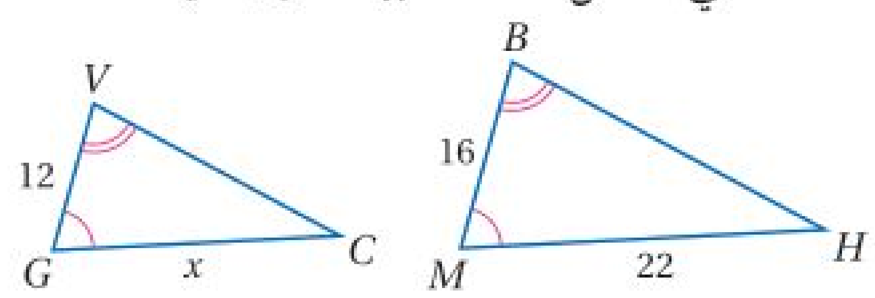
مراجعة الدروس

6-1 المضلعات المتشابهة (ص 344–351)

1) حدد ما إذا كان المضلعان أدناه متشابهين أم لا، وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه، ووضّح إجابتك.



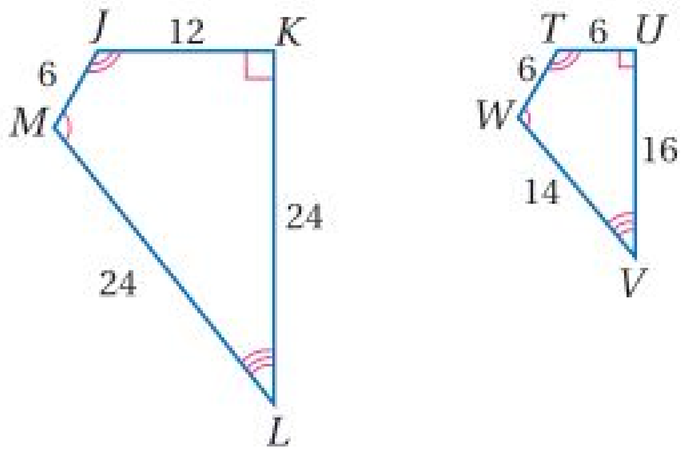
2) المثلثان في الشكل أدناه متشابهان، أوجد قيمة x .



3) **النظام الشمسي:** في نموذج دقيق لنظامنا الشمسي، وضعت سميرة الأرض على بعد 1 ft من الشمس، علمًا بأن المسافة الحقيقية بين الأرض والشمس 93000000 mi، إذا كانت المسافة من بلوتو إلى الشمس 3695950000 mi، فعلى أي بُعدٍ من الشمس ستضع سميرة بلوتو في نموذجها؟

مثال 1

حدّد ما إذا كان المضلعان أدناه متشابهين أم لا. برّر إجابتك. وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه، ووضّح إجابتك.



الخطوة 1 : حدِّد الزوايا المتناظرة المتطابقة

$\angle J \cong \angle T, \angle K \cong \angle U, \angle L \cong \angle V, \angle M \cong \angle W$

الخطوة 2 : اختبر النسب بين أطوال الأضلاع المتناظرة.

$\frac{JK}{TU} = \frac{12}{6} = \frac{2}{1}$ ، $\frac{KL}{UV} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$

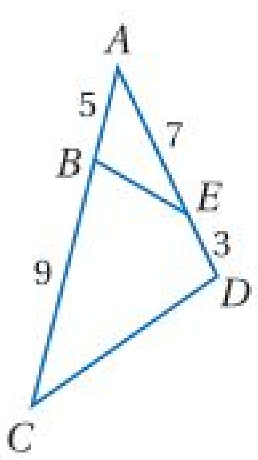
$\frac{LM}{VW} = \frac{24}{14} = \frac{12}{7}$ ، $\frac{JM}{TW} = \frac{6}{6} = \frac{1}{1}$

بما أن الأضلاع المتناظرة غير متناسبة، فإن المضلعين $TUVW, JKLM$ غير متشابهين.

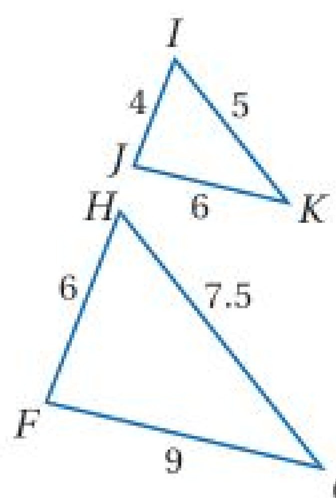
6-2 المثلثات المتشابهة (ص 352–360)

حدّد ما إذا كان المثلثان في كلٍّ من السؤالين الآتيين متشابهين أم لا، وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه، ووضّح إجابتك.

4)



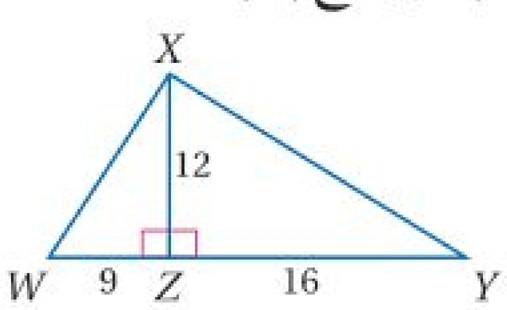
5)



6) **أشجار:** يريد عبد الله أن يقدّر ارتفاع شجرة، فوقف على مسافة 66 ft منها، فكانت نهاية ظلّه ونهاية ظل الشجرة عند النقطة نفسها، إذا كان طول عبد الله 6 ft و 4 in وطول ظلّه 15 ft، فما ارتفاع الشجرة؟

مثال 2

حدّد ما إذا كان المثلثان الآتيان متشابهين أم لا، وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه، ووضّح إجابتك.



$\angle WZX \cong \angle XZY$ لأنهما زاويتان قائمتان، والآن اختبر تناسب طولَي ساقَي المثلثين القائمين.

$\frac{WZ}{XZ} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ $\frac{XZ}{YZ} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

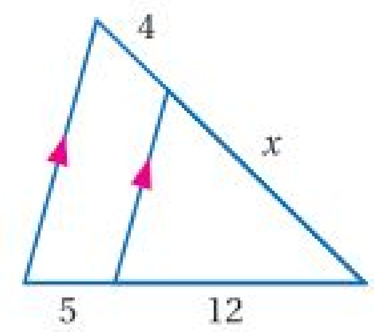
وبما أنه يوجد ضلعان في المثلث الأول، طولاهما متناسبان مع طولَي نظيرَيهما في الثاني، وأن الزاويتين المحصورتين بينهما متطابقتان، فإنّ $\triangle WZX \sim \triangle XZY$ ، وفق نظرية التشابه SAS.

دليل الدراسة والمراجعة

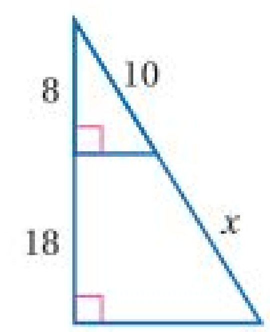
6-3 المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة (ص 362–370)

أوجد قيمة x في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

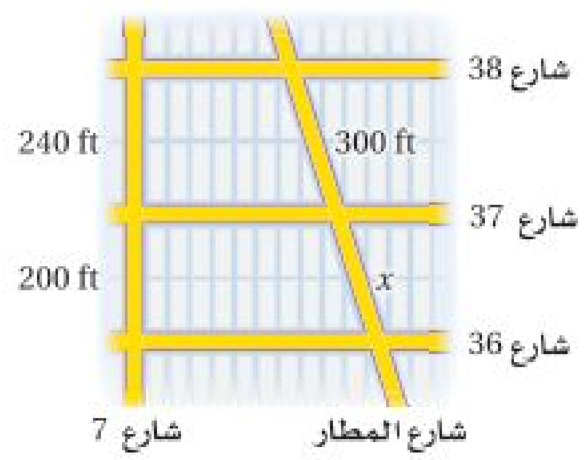
7)



8)

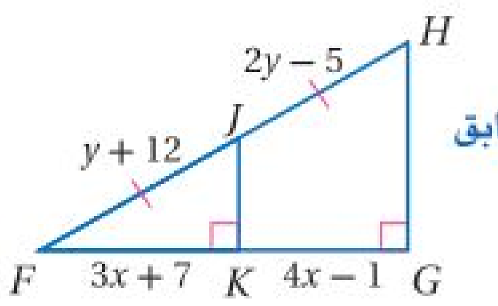


9) **شوارع:** أوجد المسافة على امتداد شارع المطار بين الشارعين 37 , 36 ، بفرض أن الشوارع 38 , 37 , 36 متوازية



مثال 3

جبر: أوجد قيمة كلٍّ من x, y .

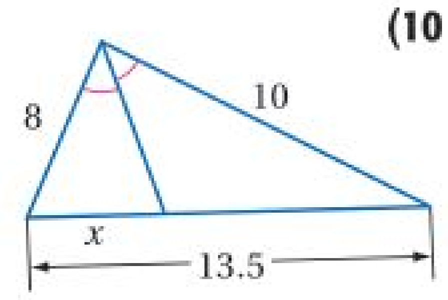


$FK = KG$	**تعريف التطابق**
$3x + 7 = 4x - 1$	**بالتعويض**
$-x = -8$	**بالطرح**
$x = 8$	**بقسمة كلا الطرفين على (-1)**
$FJ = JH$	**تعريف التطابق**
$y + 12 = 2y - 5$	**بالتعويض**
$-y = -17$	**بالطرح**
$y = 17$	**بقسمة كلا الطرفين على (-1)**

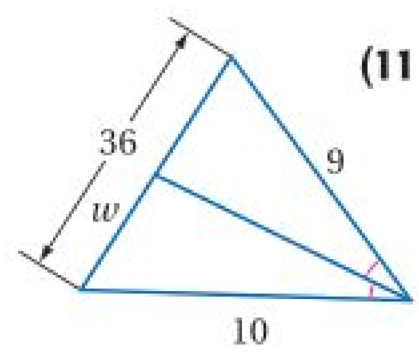
6-4 عناصر المثلثات المتشابهة (ص 371–377)

أوجد قيمة المتغيّر في كلٍّ من السؤالين الآتيين مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة:

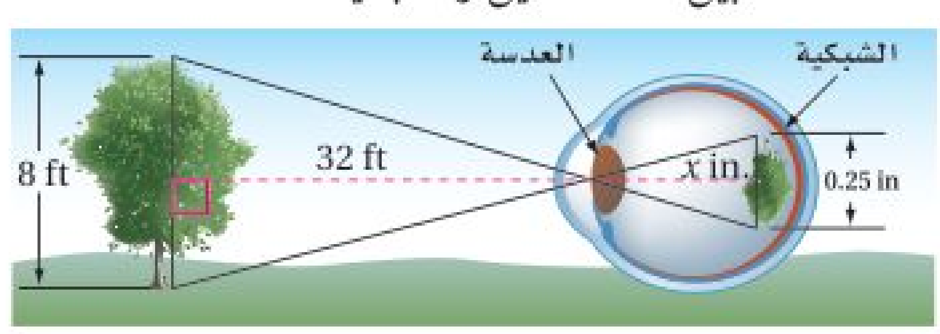
10)



11)

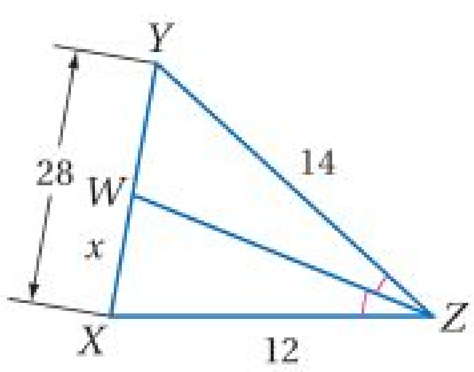


12) **عين الإنسان:** تستعمل عين الإنسان المثلثات المتشابهة لقلب الشيء وتصغيره، عندما يمر خلال العدسة إلى الشبكية، فما المسافة بين عدسة العين والشبكية؟



مثال 4

أوجد قيمة x .



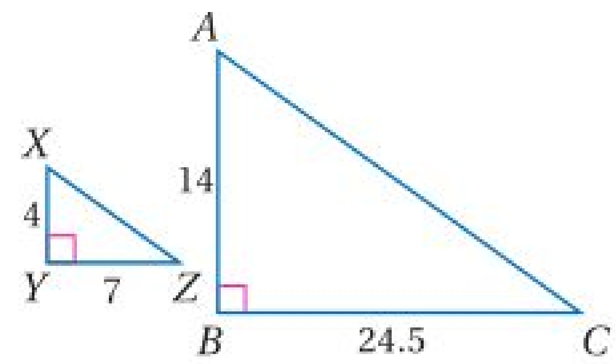
استعمل نظرية منصِّف زاوية في مثلثٍ لكتابة تناسب.

$\frac{WX}{YW} = \frac{XZ}{YZ}$	**نظرية منصِّف زاوية في مثلث.**
$\frac{x}{28 - x} = \frac{12}{14}$	**بالتعويض**
$(28 - x)(12) = x \cdot 14$	**خاصية الضرب التبادلي**
$336 - 12x = 14x$	**بالتبسيط**
$336 = 26x$	**بإضافة $12x$ لكلا الطرفين**
$12.9 \approx x$	**بقسمة كلا الطرفين على 26**

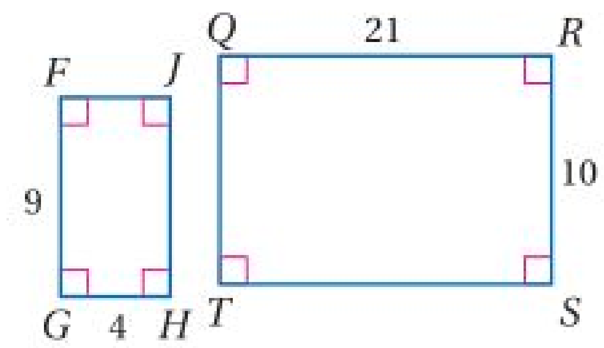
الفصل
6 اختبار الفصل

حدّد ما إذا كان المضلعان متشابهين أم لا في كلٍّ من السؤالين الآتيين، وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه، وضّح إجابتك.

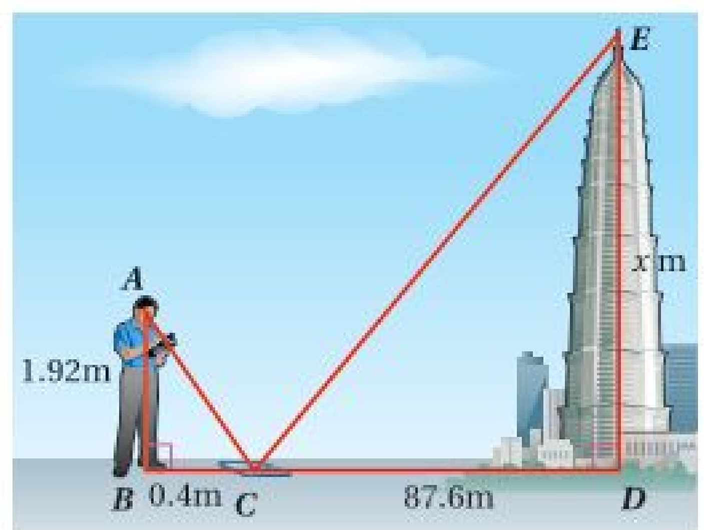
1)



2)



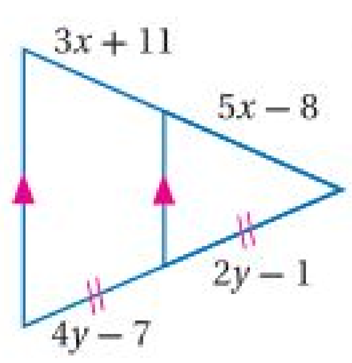
3) **أبراج:** استعمل المعلومات الآتية لحل السؤالين الآتيين:
لتقدير ارتفاع برج Jin Mao في شنغهاي في الصين، شاهد سائح قمة البرج في مرآة موضوعة على الأرض ووجهها إلى أعلى.



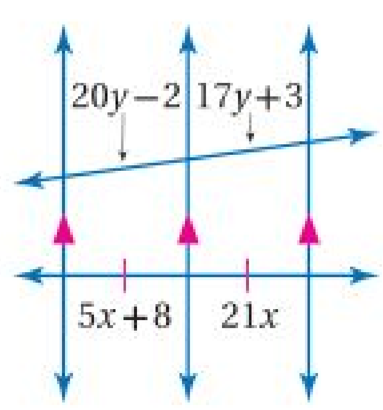
a) كم مترًا ارتفاع البرج تقريبًا؟
b) لماذا تكون طريقة الانعكاس في المرآة في هذه الحالة أفضل للقياس غير المباشر لارتفاع البرج من استعمال الظل؟

جبر: أوجد قيمتَي x, y في كلٍّ من السؤالين الآتيين، مقربًا إجابتك إلى أقرب عُشرٍ إذا كان ذلك ضروريًّا.

4)



5)



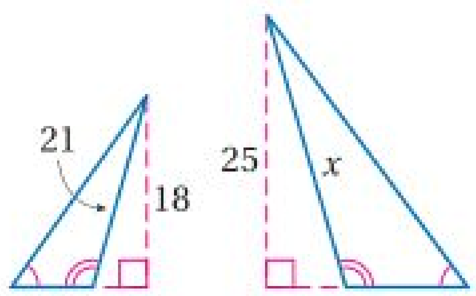
6) **جبر:** $\triangle MNP$ متطابق الأضلاع، محيطه $12a + 18b$، إذا كانت $\overline{QR}$ قطعة منصّفة فيه، فما قيمة QR؟

7) **جبر:** $\triangle ABC$ قائم الزاوية ومتطابق الضلعين، وطول وتره h، إذا كانت $\overline{DE}$ قطعة منصّفة للوتر وأحد ضلعَي القائمة فيه وطولها $4x$، فما محيط $\triangle ABC$؟

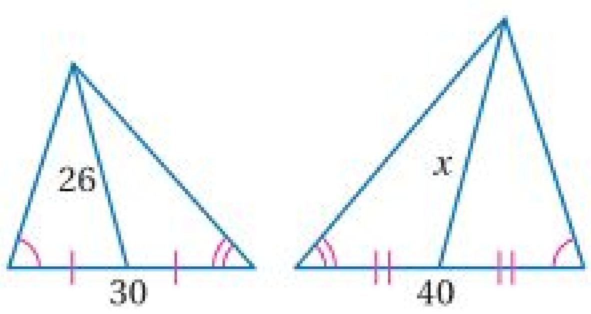
8) **نماذج:** لدى سالم نموذج لسيارة سباق حقيقيّة، إذا كان طول السيارة الحقيقيّة 10 ft و 6 in، وطول النموذج 7 in، فما معامل تشابه النموذج إلى السيارة الحقيقيّة؟

أوجد قيمة x في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

9)

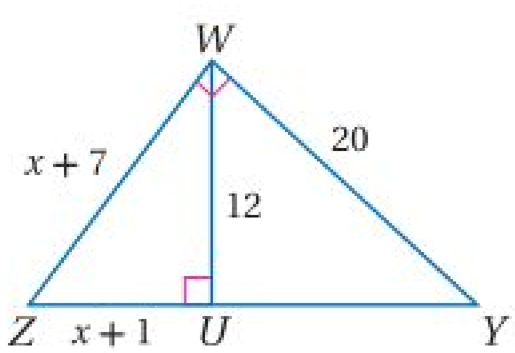


10)

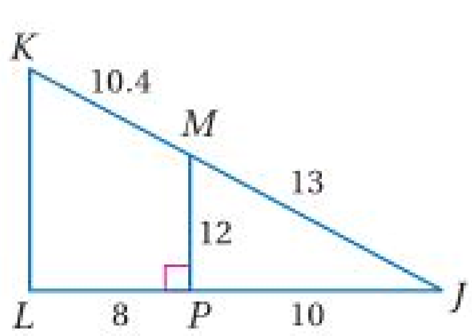


جبر: أوجد كل طول مشار إليه في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

11) WZ, UZ



12) KL



الفصل
6
الإعداد للاختبارات

تعيين اللامثال

أحيانًا تتطلب أسئلة الاختيار من متعدّد، تحديد أيّ البدائل المعطاة تعدّ لا مثالًا صحيحًا، وتتطلب هذه الأسئلة أسلوبًا مختلفًا لحلّها.

استراتيجيات تعيين اللامثال

الخطوة 1

اقرأ المسألة وافهمها.

- **اللامثال:** اللامثال هو بديل من بدائل الإجابة لا يحقق شروط المسألة.
- **كلمات أساسيّة:** ابحث عن كلمة لا، أو أي كلمة تدلّ على النفي (تكتب عادة بخط غامق، أو يوضع تحتها خط)؛ لتفهم منها أن المطلوب منك أن تجد لامثالًا.

الخطوة 2

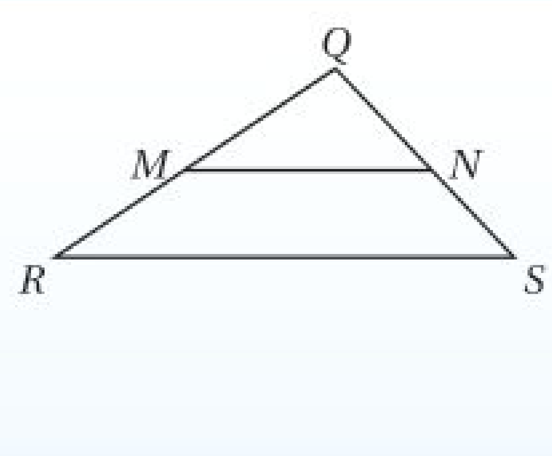
اتبع الإرشادات والخطوات الآتية؛ لمساعدتك على تعيين اللامثال:

- عيّن بدائل الإجابة الواضح عدم صحتها واحذفها.
- احذف البدائل التي تبدو بعيدة عن محتوى السؤال.
- احذف البدائل ذات الوحدات غير الصحيحة.
- اختبر بدائل الإجابة المتبقية.

مثال

اقرأ المسألة جيدًا، حدِّد المطلوب فيها، ثم استعمل المعطيات لحلها.

أيٌّ مما يأتي **لا** يكفي لإثبات أنّ: $\triangle QRS \sim \triangle QMN$؟



A $\angle QMN \cong \angle QRS$

B $\overline{MN} \parallel \overline{RS}$

C $\overline{QN} \cong \overline{NS}$

D $\frac{QM}{QR} = \frac{QN}{QS}$

الحرف "لا" المكتوب بالخط الغامق، يُشير إلى أنه يتعين عليك أن تجد لامثالًا، اختبر كلًّا من بدائل الإجابة باستعمال مبادئ تشابه المثلثات؛ لترى ما إذا كان أيٌّ منها لا يثبت أن $\triangle QRS \sim \triangle QMN$.

البديل A: $\angle QMN \cong \angle QRS$

إذا كانت $\angle QRS \cong \angle QMN$ ، فإنّ $\triangle QRS \sim \triangle QMN$ وفق مسلمة التشابه AA .

البديل B: $\overline{MN} \parallel \overline{RS}$

إذا كان $\overline{RS} \parallel \overline{MN}$ ، فإن $\angle QRS \cong \angle QMN$ ؛ لأنهما زاويتان متناظرتان بالنسبة لمستقيمين متوازيين قطعهما القاطع $\overline{QR}$ ، لذلك $\triangle QRS \sim \triangle QMN$ وفق مسلمة التشابه AA .

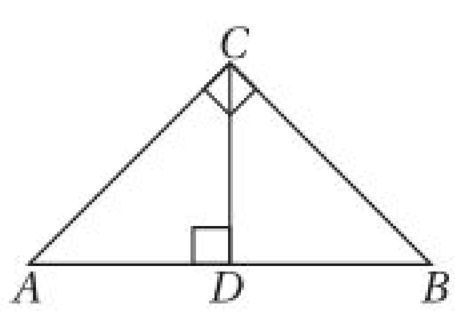
البديل C: $\overline{QN} \cong \overline{NS}$

إذا كانت $\overline{NS} \cong \overline{QN}$ ، فإننا لا نستطيع أن نستنتج أن $\triangle QRS \sim \triangle QMN$ ؛ لأننا لا نعرف أيّ شيء عن $\overline{MR}$, $\overline{QM}$ ، لذلك فالبديل C يُعدّ لامثالًا، والإجابة الصحيحة هي C. وإذا كان لديك وقت فاختبر البديل D للتأكد من أنّه مثال صحيح.

تمارين ومسائل

اقرأ كل سؤال ممَّا يأتي، ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة:

1) أيٌّ التناسبات التالية غير صحيحة في الشكل أدناه؟



A $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$

B $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$

C $\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{DB}$

D $\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{AC}$

2) أي شكل يمكن أن يكون مثالًا *مضادًا* للتخمين أدناه؟

"إذا كانت جميع زوايا شكل رباعي قوائم فإنه مربّع"

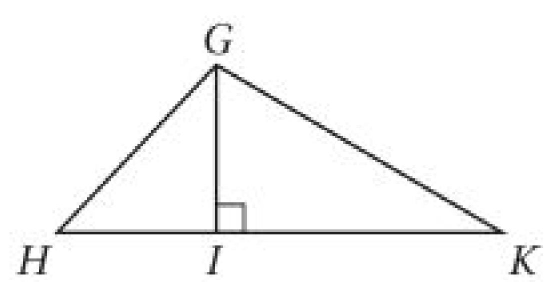
A متوازي الأضلاع

B المستطيل

C المعين

D شبه المنحرف

3) أيٌّ مما يأتي **لا** يكفي لإثبات أنّ $\triangle GIK \sim \triangle HIG$ ؟



A $\angle GKI \cong \angle HGI$

B $\frac{HI}{GI} = \frac{GI}{IK}$

C $\frac{GH}{GI} = \frac{GK}{IK}$

D $\angle IGK \cong \angle IHG$

4) أي مثلثين مما يأتي *ليسا* بالضرورة متشابهين؟

A مثلثان قائما الزاوية في كلٍّ منهما زاوية قياسها $30°$

B مثلثان قائما الزاوية في كلٍّ منهما زاوية قياسها $45°$

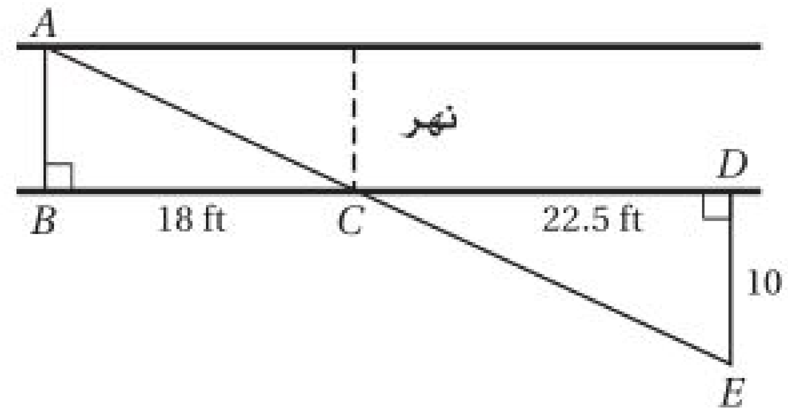
C مثلثان متطابقا الساقين

D مثلثان متطابقا الأضلاع

أسئلة الاختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال فيما يأتي، ثمَّ حدِّد رمز الإجابة الصحيحة:

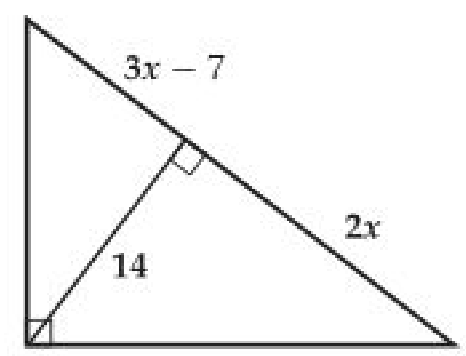
1) يُريد عادل أن يقيس عرض نهر صغير. فعيّن الأطوال المبيّنة في الشكل أدناه.



العرض التقريبي للنهر هو:

A 40.5 ft
B 6 ft
C 7 ft
D 8 ft

2) أوجد قيمة x في الشكل أدناه؟



A 5
B 7
C 8
D 10

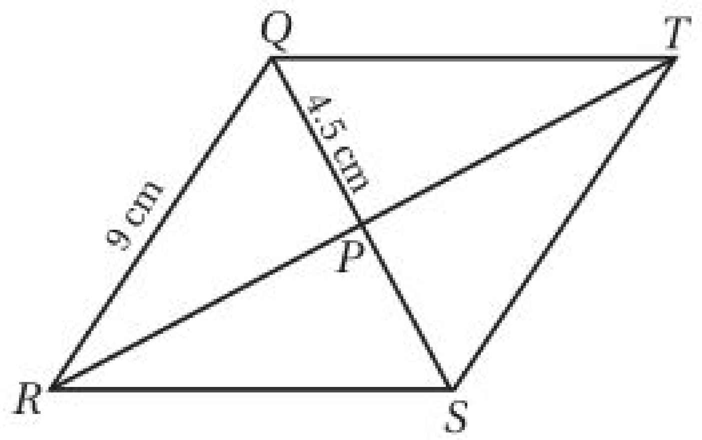
3) إذا كان $EG = 15\text{m}$ ، فما طول $\overline{EF}$؟

A 6 m
B 9 m
C 10 m
D 12 m

إرشادات للاختبار

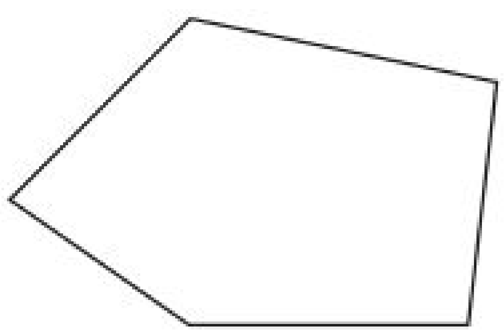
السؤال 2: عيّن مثلثين متشابهين، واكتب تناسبًا وحُلّه لإيجاد قيمة x .

4) أوجد $m\angle RST$ في المعين $QRST$ أدناه.



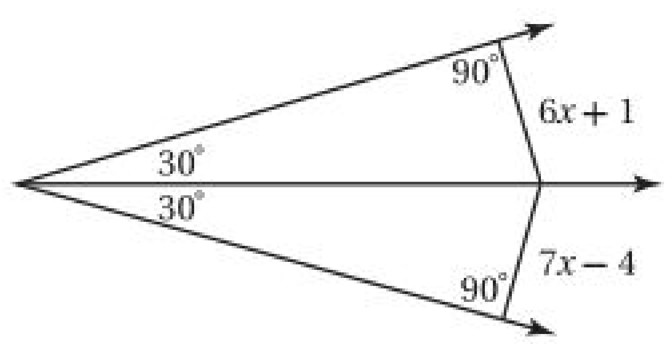
A 60°
B 90°
C 120°
D 150°

5) ما مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع أدناه؟



A 450°
B 540°
C 630°
D 720°

6) أوجد قيمة x .



A 3
B 4
C 5
D 6

7) شكلان رباعيّان متشابهان بمعامل تشابه 3:2، إذا كان محيط الشكل الرباعي الأكبر 21 m ، فما محيط الشكل الرباعي الأصغر؟

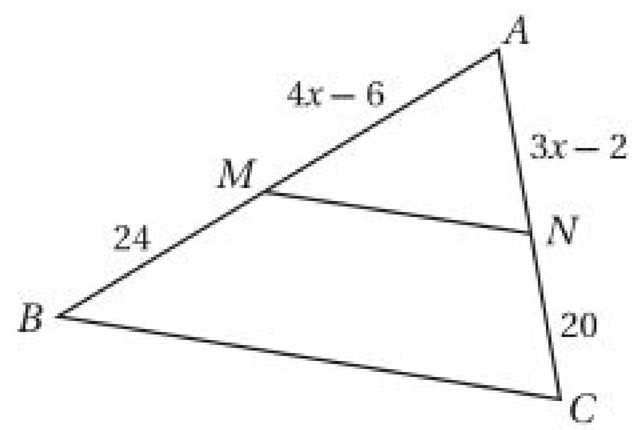
A 14 m
B 17.5 m
C 28 m
D 31.5 m

أسئلة ذات إجابات قصيرة

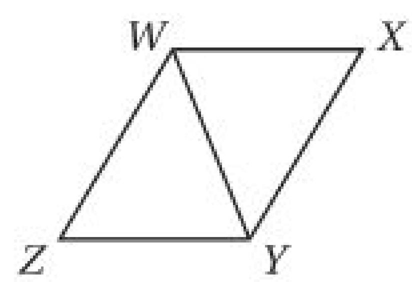
اكتب إجابتك في ورقة الإجابة.

8) **هندسة إحداثية:** مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي $ABCD$ الذي رؤوسه: $A(3, 3), B(8, 2), C(6, -1), D(1, 0)$، وحدّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا.

9) إذا كان $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ في المثلث أدناه، فأوجد قيمة x .



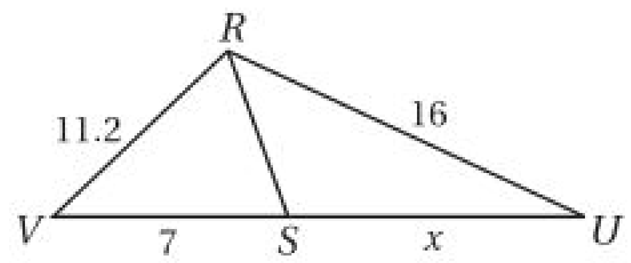
10) الشكل الرباعي $WXYZ$ معين، إذا كان $m\angle XYZ = 110°$، فأوجد $m\angle ZWY$.



11) ما المعاكس الإيجابي للعبارة أدناه؟

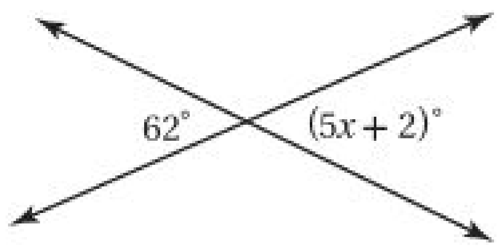
إذا كان صالح مولودًا في الرياض، فإنّه مولود في السعوديّة.

12) إذا كان $\overline{RS}$ تنصّف $\angle VRU$ في المثلث أدناه، فأوجد قيمة x .



13) يبيِّن مقياس رسم خريطة أن $1\,\text{cm} = 25\,\text{km}$، ما المسافة الحقيقية بين مدينتين، إذا كانت المسافة بينهما على الخريطة $4.5\,\text{cm}$؟

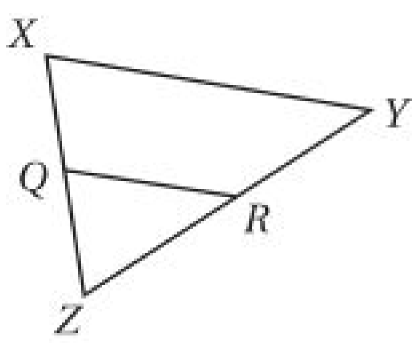
14) ما قيمة x في الشكل أدناه؟



أسئلة ذات إجابات مطولة

اكتب إجابتك في ورقة الإجابة مبينًا خطوات الحل.

15) استعمل الشكل أدناه للإجابة عن كلٍّ من الأسئلة الآتية:



a) إذا كان $\overline{QR} \parallel \overline{XY}$، فما العلاقة بين الأطوال: RZ, YR, QZ, XQ؟

b) إذا كان: $\overline{QR} \parallel \overline{XY}, XQ = 15, QZ = 12, YR = 20$، فما طول $\overline{RZ}$؟

c) إذا كان: $\overline{QR} \parallel \overline{XY}, XQ = QZ, QR = 9.5$، فما طول $\overline{XY}$؟

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

إذا لم تستطع الإجابة عن السؤال..	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
فعد إلى الدرس..	6-2	6-2	مهارة سابقة	مهارة سابقة	مهارة سابقة	مهارة سابقة	6-1	مهارة سابقة	6-3	مهارة سابقة	مهارة سابقة	6-4	6-1	مهارة سابقة	6-3

الفصل 7

التحويلات الهندسية والتماثل
Transformations and Symmetry

فيما سبق:

درستُ التحويلات الهندسية: الانعكاس والإزاحة والدوران.

والآن:

- أرسم صور أشكال بالانعكاس أو الانسحاب أو الدوران أو التمدد.
- أتعرف تركيب تحويلين هندسيين.
- أتعرف التماثل في الأشكال الثنائية الأبعاد والثلاثية الأبعاد.

لماذا؟

تصوير: يستعمل المصوّرون الانعكاس والدوران والتماثل؛ لجعل الصورة مثيرة للاهتمام وجذّابةً بصريًا.

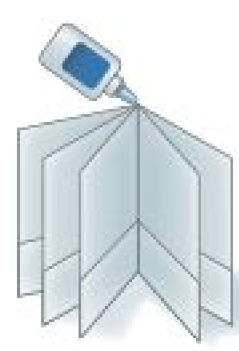
المطويات منظم أفكار

التحويلات الهندسية والتماثل: اعمل هذه المطوية؛ لمساعدتك على تنظيم ملاحظاتك حول الفصل 7 ، مبتدئًا بأربع أوراق A4.

1. اطوِ كل ورقة من المنتصف.

2. ابسط الأوراق ثم اطوها طوليًا بعرض 5 cm لتكوّن جيبين.

3. ألصق الأوراق جنبًا إلى جنب على طول خطّ الطيّ، لتكوّن كتيبًا كما في الشكل أدناه.



4. ضع عنوانًا لكل جيب كما في الشكل أدناه، استعمل أوراقًا أو بطاقات لتسجيل الملاحظات والأمثلة وخصص الجيب الأخير للمفردات الجديدة.

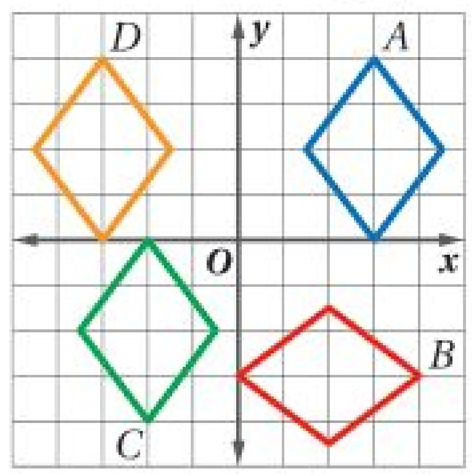
التهيئة للفصل 7

تشخيص الاستعداد :

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

صنِّف كلًّا من التحويلات الهندسية الآتية إلى انعكاس أو إزاحة أو دوران مستعملًا الشكل المجاور.



1) A إلى B

2) D إلى A

3) A إلى C

4) **هندسة إحداثية :** إحداثيات رؤوس $\triangle PQR$ هي $P(-4,2)$,$Q(3,0)$, $R(4\ ,3)$. إذا أُزيح $\triangle PQR$ 4 وحدات إلى أسفل و 6 وحدات إلى اليمين للحصول على $\triangle P'Q'R'$ ، فما إحداثيات رؤوس $\triangle P'Q'R'$ ؟

استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لإيجاد البعد بين كل نقطتين فيما يلي:

5) $(0,1)\ ,(2,8)$

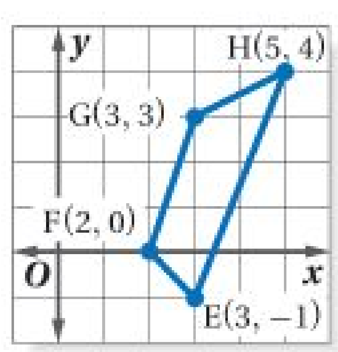
6) $(-2,0)\ ,(3,3)$

7) $(6,4), (2,1)$

8) $(-3,-1), (0,5)$

9) **تصوير:** رسم أسعد صورةً مكبرة لنملة؛ لاستعمالها في درس العلوم، أوجد مقياس الرسم للصورة إذا كان طول النملة الحقيقي $\frac{1}{2}$ in، وكان طول الصورة 1 ft

احسب طول كل ضلع من أضلاع الشكل الرباعي $EFGH$.



10) $\overline{EF}$

11) $\overline{FG}$

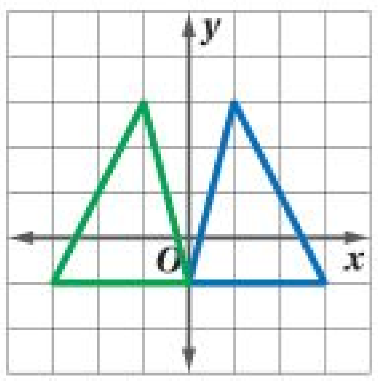
12) $\overline{GH}$

13) $\overline{HE}$

مراجعة سريعة

مثال 1

صنّف التحويل الهندسي المبين في الشكل المجاور إلى انعكاس أو إزاحة أو دوران.



يبعد كل رأس وصورته البعد نفسه عن المحور y ، ولذلك فهذا التحويل انعكاس.

مثال 2

وقف مقدّم استعراض رياضي عند النقطة $(1, 4)$، وتحرك منها 4 وحدات إلى اليمين، ثم 3 وحدات إلى أسفل. ما إحداثيات النقطة التي وصل إليها؟

يمكن التعبير عن حركة 4 وحدات إلى اليمين، ثم 3 وحدات إلى أسفل بالقاعدة:

$$(x, y) \rightarrow (x+4, y-3)$$

$$(1, 4) \rightarrow (1+4, 4-3) = (5, 1)$$

مثال 3

عمل خالد نموذجًا مصغرًا لجسرٍ. أوجد مقياس الرسم للنموذج، إذا كان طول النموذج 2 m ، وطول الجسر 120 m

طول النموذج يساوي **2 m** ، وطول الجسر يساوي **120 m**؛

إذن مقياس رسم النموذج إلى الجسر $\frac{2\text{ m}}{120\text{ m}}$؛ أي $\frac{1}{60}$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

7-1 الانعكاس
Reflection

لماذا؟

تُظهر المسطحات المائية انعكاسات رائعة لما يُحيط بها. ففي مسطحات الماء الراكدة، تلاحظ أن لكل نقطة فوق سطح الماء نقطة مناظرة لها تحته، هي صورتها الناتجة عن الانعكاس. وتكون المسافة بين النقطة الأصلية وسطح الماء مساوية للمسافة بين صورتها وسطح الماء.

فيما سبق:

درستُ الانعكاس بوصفه تحويلًا هندسيًا.

(مهارة سابقة)

والآن:

- أرسم الصورة الناتجة عن الانعكاس.
- ارسم الصورة الناتجة عن الانعكاس في المستوى الإحداثي.

المفردات:

الانعكاس
reflection

محور الانعكاس
line of reflection

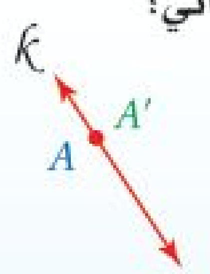
رسم الانعكاسات: تعلّمت أن **الانعكاس** هو تحويل هندسي يقلب الشكل حول مستقيم يسمى **محور الانعكاس**، بحيث يكون بُعد النقطة وبُعد صورتها عن محور الانعكاس متساويين.

مفهوم أساسي — الانعكاس حول مستقيم

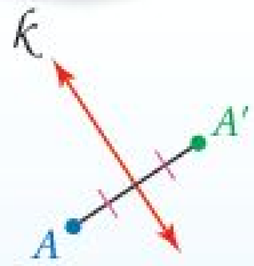
أضف إلى مطويتك

الانعكاس حول مستقيم ينقل النقطة إلى صورتها كما يأتي:

- **إذا كانت النقطة واقعة على محور الانعكاس، فإن صورتها هي النقطة نفسها.**
- **إذا كانت النقطة غير واقعة على محور الانعكاس، يكون محور الانعكاس هو العمود المنصف للقطعة المستقيمة التي تصل بين النقطة وصورتها.**



A تقع على المستقيم k



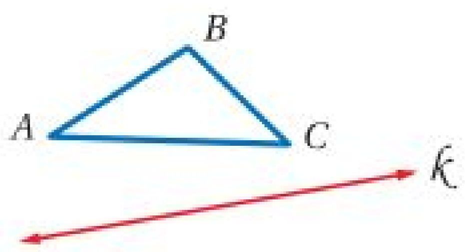
A لا تقع على المستقيم k

الرموز A', A'', A''' تمثل أسماء للنقاط الناتجة عن تحويل هندسي أو أكثر للنقطة A

لرسم صورة مضلع بالانعكاس حول مستقيم، ارسم صورة كل رأس من رؤوسه، ثم صل بين صور الرؤوس لتكوين صورة المضلع بهذا الانعكاس.

مثال 1 — رسم صورة مضلع بالانعكاس حول مستقيم

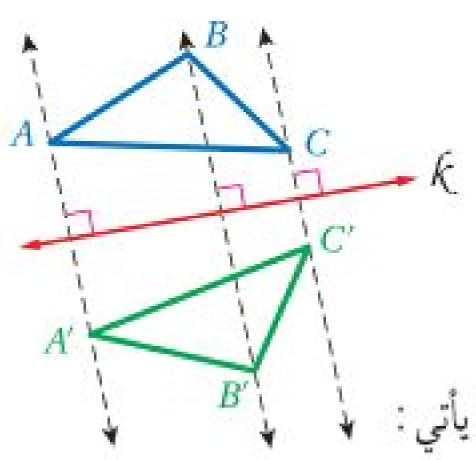
ارسم صورة الشكل بالانعكاس حول المستقيم المعطى.



الخطوة 1: ارسم مستقيمًا يمرُّ بكل رأس من رؤوس المثلث، ويكون عموديًّا على المستقيم k باستعمال مثلث الرسم.

الخطوة 2: قِسِ المسافة بين النقطة A والمستقيم k باستعمال الفرجار، وعيّن النقطة A'؛ بحيث يكون المستقيم k العمود المنصف لـ $\overline{AA'}$.

الخطوة 3: كرِّر الخطوة 2 لتعين B' و C'، ثم صِل الرؤوس A', B', C' لتشكل صورة المثلث الناتجةَ عن الانعكاس.

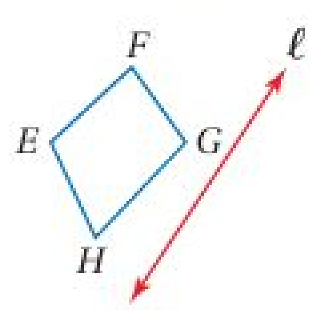


إرشادات للدراسة

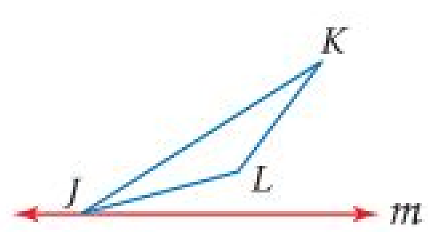
الشكل الأصلي والصورة: سيكون الشكل الأصلي في هذا الكتاب باللون الأزرق دائمًا، وستكون الصورة باللون الأخضر.

تحقق من فهمك ارسم صورة الشكل بالانعكاس حول المستقيم المعطى في كل شكل مما يأتي:

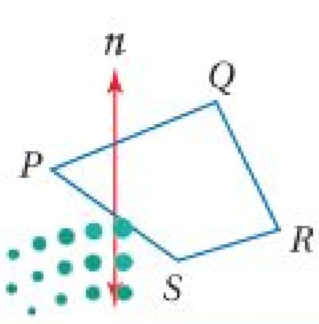
(1A



(1B



(1C

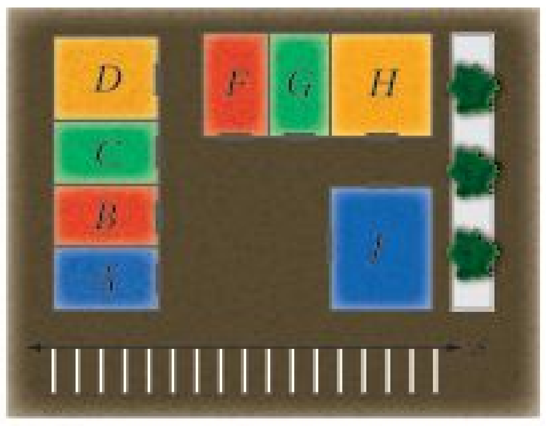


إرشادات للدراسة

تحويل التطابق: هو تحويل تكون فيه الصورة مطابقةً للشكل الأصلي.

لاحظ أن الانعكاس هو تحويل تطابقٍ، ففي المثال 1، يكون $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

مثال 2 من واقع الحياة — اختصار المسافات باستعمال الانعكاس

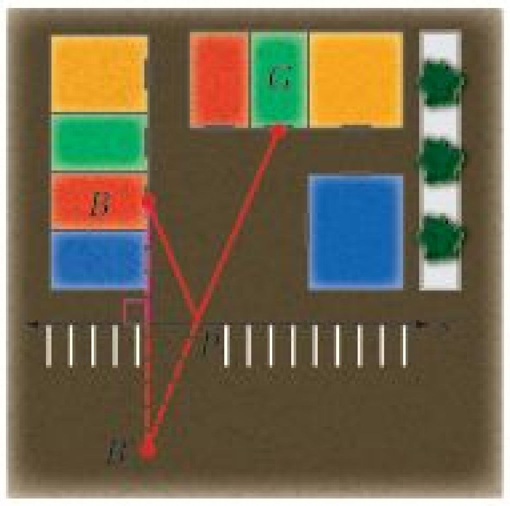


تسوق: اصطحب أحمد صديقه عليًّا في سيارته إلى السوق، حيث يرغب أحمد في الاتجاه إلى المتجر B؛ لشراء بعض الملابس، بينما يرغب عليٌّ في الاتجاه إلى المتجر G؛ لشراء حذاءٍ، ففي أي مكان من المواقف المحددة على المستقيم s يوقف أحمد سيارته، بحيث تكون المسافة التي سيقطعانها سيرًا للوصول إلى المتجرين أقل ما يمكن؟

افهم: **المعطيات:** أوقف أحمد سيارته في الموقف P على المستقيم s.
اتجه أحمد إلى المتجر B لشراء بعض الملابس.
واتجه علي إلى المتجر G لشراء حذاء.

المطلوب: حدد الموقف P على المستقيم s، بحيث يكون $BP + PG$ أقل ما يمكن.

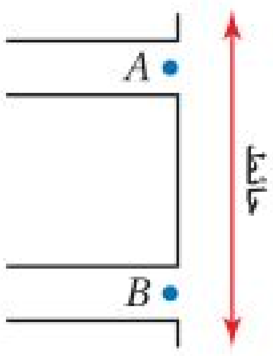
خطط: تكون المسافة الكلية من B إلى P ثم من P إلى G أقل ما يمكن، عندما تكون هذه النقاط على استقامةٍ واحدةٍ.



حُلَّ: ارسم $\overline{B´G}$. وعيّن P عند تقاطع المستقيم s مع $\overline{B´G}$.
علمًا بأن $B´$ هي صورة النقطة B الناتجة عن انعكاس حول المستقيم s

تحقق: اختر مواقع أخرى للنقطة P على المستقيم s، وقارن مجموع $BP + PG$ في كل حالة؛ للتحقق من أن الموقع الذي تم تحديده للنقطة P هو الذي يجعل هذا المجموع أقل ما يمكن.

✓ تحقق من فهمك

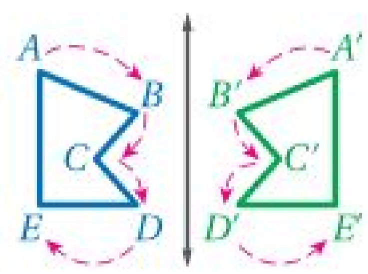


2) **مبيعات تذاكر:** يريد فهد أن يختار موقعًا مناسبًا لبيع تذاكر مباراة كرة قدم، عيّن النقطة P على الحائط، بحيث تكون المسافة التي يسيرها شخصٌ ما من النقطة A إلى P ثم إلى النقطة B أقل ما يمكن.

رسم الانعكاس في المستوى الإحداثي: يمكن أيضًا رسم الصورة الناتجة عن الانعكاس في المستوى الإحداثي حول مستقيم أفقيٍّ أو مستقيمٍ رأسيٍّ.

إرشادات للدراسة

خصائص الانعكاس: يحافظ الانعكاس على الأبعاد وقياسات الزوايا والاستقامة وترتيب مواقع النقاط، ولكن يعكس الاتجاه.

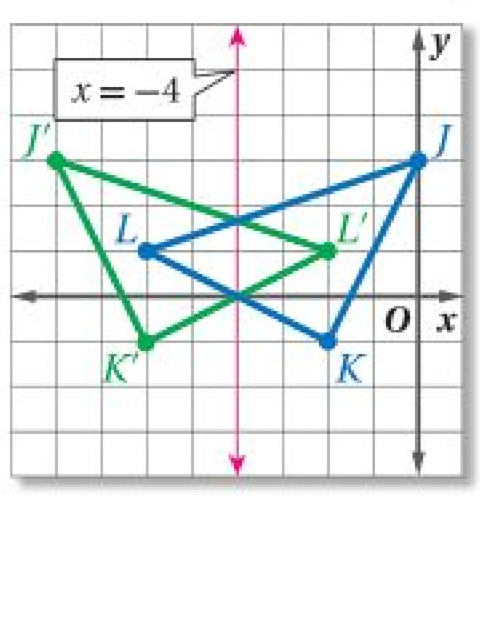


مثال 3 رسم صورة بالانعكاس حول مستقيم أفقي أو مستقيم رأسي

مثِّل بيانيًّا $\triangle JKL$ الذي إحداثيات رؤوسه: $J(0, 3), K(-2, -1), L(-6, 1)$، ثم ارسم صورته بالانعكاس حول المستقيم المُعطى في كلٍّ مما يأتي:

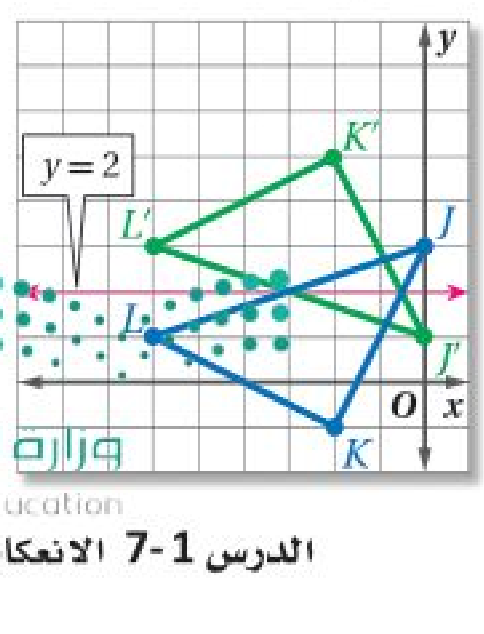
a) $x = -4$

استعمل خطوط الشبكة الإحداثية لإيجاد النقطة المناظرة لكل رأسٍ، بحيث يكون المستقيم $x = -4$ هو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي تصل بين كل رأس وصورته.



b) $y = 2$

استعمل خطوط الشبكة الإحداثية لإيجاد النقطة المناظرة لكل رأس، بحيث يكون المستقيم $y = 2$ هو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي تصل بين كل رأس وصورته.



✓ تحقق من فهمك

مثِّل بيانيًّا شبه المنحرف $RSTV$، الذي إحداثيات رؤوسه هي: $R(-1, 1), S(4, 1), T(4, -1), V(-1, -3)$، وارسم صورته بالانعكاس حول المستقيم المُعطَى في كلٍّ ممّا يأتي:

3A) $y = -3$ **3B)** $x = 2$

يمكنك استعمال القاعدة الآتية، عندما يكون محور الانعكاس هو المحور x أو المحور y .

مفهوم أساسي — الانعكاس حول المحور x أو المحور y

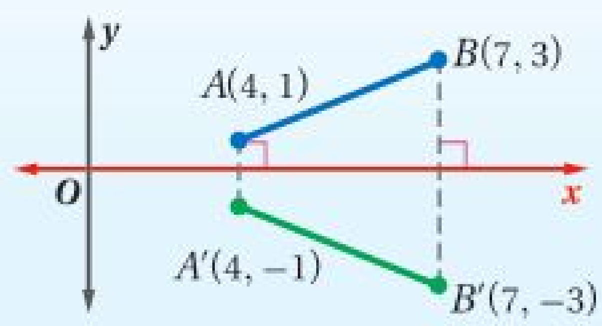
أضف إلى مطويتك

الانعكاس حول المحور x

التعبير اللفظي: لتعيين صورة نقطة بالانعكاس حول المحور x، اضرب إحداثي y لها في -1

الرموز: $(x, y) \rightarrow (x, -y)$

مثال:

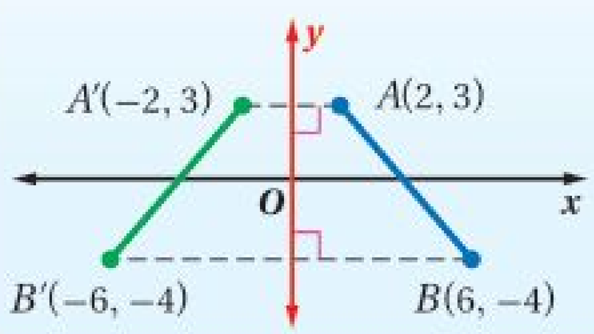


الانعكاس حول المحور y

التعبير اللفظي: لتعيين صورة نقطة بالانعكاس حول المحور y، اضرب إحداثي x لها في -1

الرموز: $(x, y) \rightarrow (-x, y)$

مثال:



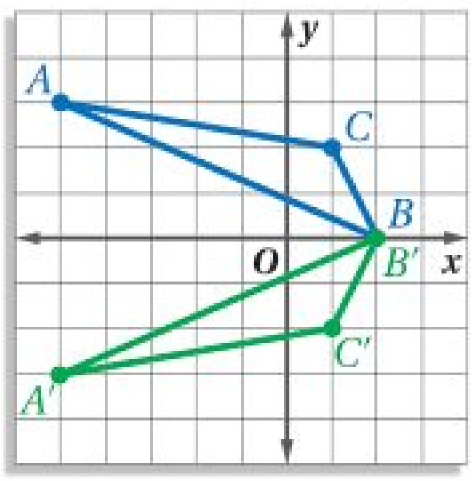
مثال 4 رسم صورة بالانعكاس حول المحور x أو المحور y

مثِّل كل شكل مما يأتي بيانيًّا، ثم ارسم صورته بالانعكاس المحدد.

a) $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(-5, 3), B(2, 0), C(1, 2)$ بالانعكاس حول المحور x .

اضرب الإحداثي y لكل رأس في -1 .

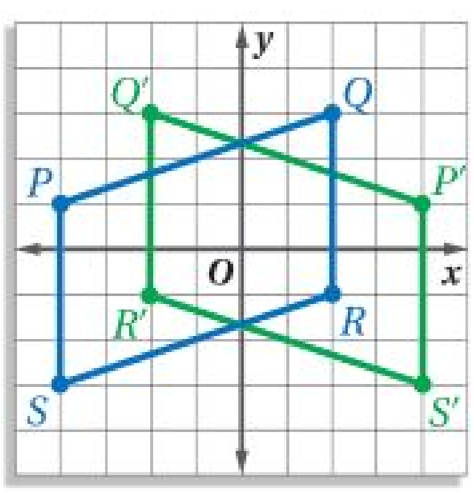
(x, y)	$\rightarrow$	$(x, -y)$
$A(-5, 3)$	$\rightarrow$	$A'(-5, -3)$
$B(2, 0)$	$\rightarrow$	$B'(2, 0)$
$C(1, 2)$	$\rightarrow$	$C'(1, -2)$



b) متوازي الأضلاع $PQRS$ الذي إحداثيات رؤوسه: $P(-4, 1), Q(2, 3), R(2, -1), S(-4, -3)$ بالانعكاس حول المحور y .

اضرب الإحداثي x لكل نقطة في -1

(x, y)	$\rightarrow$	$(-x, y)$
$P(-4, 1)$	$\rightarrow$	$P'(4, 1)$
$Q(2, 3)$	$\rightarrow$	$Q'(-2, 3)$
$R(2, -1)$	$\rightarrow$	$R'(-2, -1)$
$S(-4, -3)$	$\rightarrow$	$S'(4, -3)$



✓ تحقق من فهمك

4A) المستطيل الذي إحداثيات رؤوسه: $E(-4, -1), F(2, 2), G(3, 0), H(-3, -3)$ بالانعكاس حول المحور x.

4B) $\triangle JKL$ الذي إحداثيات رؤوسه: $J(3, 2), K(2, -2), L(4, -5)$ بالانعكاس حول المحور y .

قراءة الرياضيات

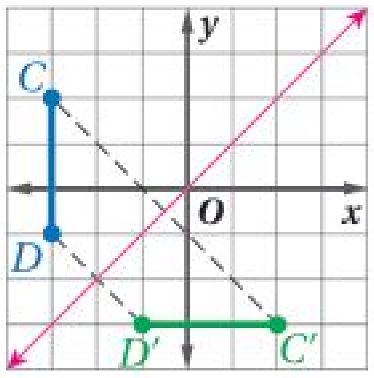
التعبير عن الدالة بالصيغة الإحداثية: يمكن قراءة العبارة: $P(a, b) \rightarrow P'(a, -b)$ على النحو الآتي: تتحول النقطة P التي إحداثيّاها a و b إلى النقطة P شرطة التي إحداثيّاها a وسالب b .

إرشادات للدراسة

النقاط الثابتة: تسمى النقطة B في المثال 4a نقطةً ثابتةً؛ لأنها اقترنت مع نفسها، وأن إحداثيَّيها هما نفس إحداثيَّي صورتها ′B بالانعكاس، فالنقاط الواقعة على محور الانعكاس هي فقط التي تبقى ثابتةً تحت تأثير الانعكاس.

مراجعة المفردات

المستقيمات المتعامدة: يكون المستقيمان غير الرأسيين متعامدين، إذا وفقط إذا كان ناتج ضرب ميليهما يساوي -1
مثال: المستقيمات الأفقية والرأسية تكون متعامدة دائمًا.



ويمكن أيضًا أن تعكس شكلًا حول المستقيم $y = x$، ففي المستوى الإحداثي المجاور، ارسم عمودًا من النقطة C على المستقيم $y = x$، وحيث إن ميل المستقيم $y = x$ يساوي 1، فإن ميل العمود الذي رسمته يساوي -1، لاحظ أنك تحركت من النقطة $C(-3, 2)$، بمقدار 2.5 وحدة إلى اليمين و 2.5 وحدة إلى أسفل فوصلت إلى نقطة تقاطع العمود الذي رسمته مع المستقيم $y = x$.

ومن هذه النقطة على $y = x$، تحرك 2.5 وحدة إلى اليمين و 2.5 وحدة إلى أسفل؛ لتعيّن النقطة $C'(2, -3)$ التي هي صورة النقطة C بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.
وبطريقة مماثلة نجد أن صورة $D(-3, -1)$ هي $D'(-1, -3)$.
وبمقارنة إحداثيات هاتين النقطتين بإحداثيات صورتَيهِمَا، يمكن الوصول إلى القاعدة الآتية للانعكاس حول المستقيم $y = x$.

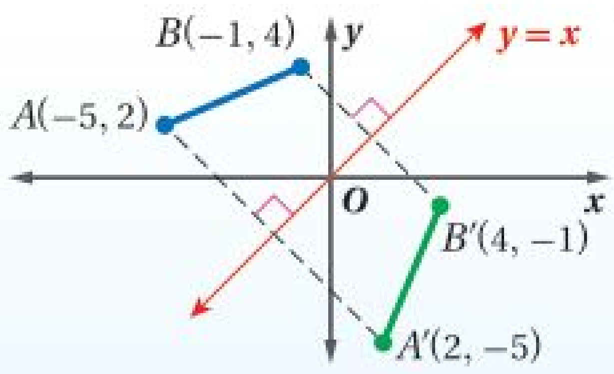
مفهوم أساسي — الانعكاس حول المستقيم $y = x$

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لتعيين صورة نقطة بالانعكاس حول المستقيم $y = x$، بدّل موضعَي الإحداثيين x و y.

الرموز: $(x, y) \to (y, x)$

مثال:

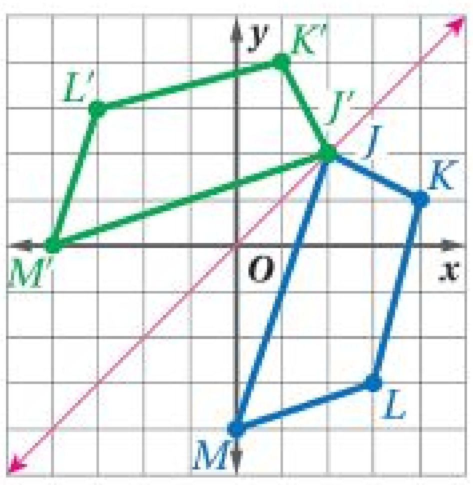


مثال 5 — رسم صورة شكل بالانعكاس حول المستقيم $y = x$

مثّل بيانيًّا الشكل الرباعي $JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: $J(2, 2), K(4, 1), L(3, -3), M(0, -4)$، ثم ارسم صورته $J'K'L'M'$ بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.

بدّل الإحداثيين x و y لكل الرؤوس.

(x, y)	$\to$	(y, x)
$J(2, 2)$	$\to$	$J'(2, 2)$
$K(4, 1)$	$\to$	$K'(1, 4)$
$L(3, -3)$	$\to$	$L'(-3, 3)$
$M(0, -4)$	$\to$	$M'(-4, 0)$

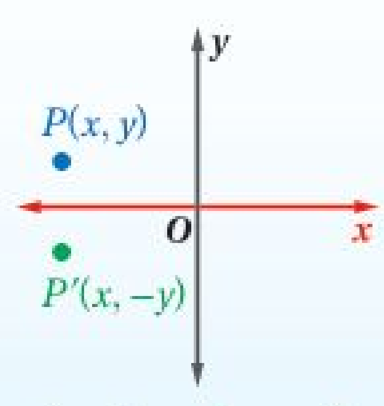
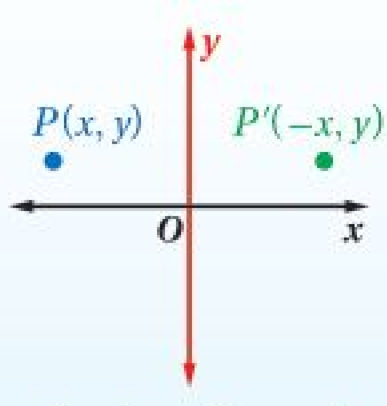
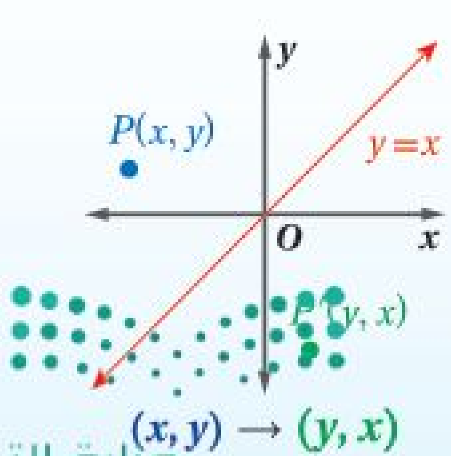


تحقق من فهمك

5) مثّل بيانيًّا $\triangle BCD$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: $B(-3, 3), C(1, 4), D(-2, -4)$، ثم ارسم صورته بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.

ملخص المفهوم — الانعكاس في المستوى الإحداثي

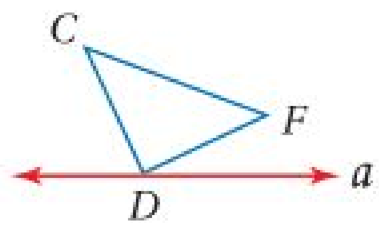
أضف إلى مطويتك

الانعكاس حول المحور x	الانعكاس حول المحور y	الانعكاس حول المستقيم $y = x$
		
$(x, y) \to (x, -y)$	$(x, y) \to (-x, y)$	$(x, y) \to (y, x)$

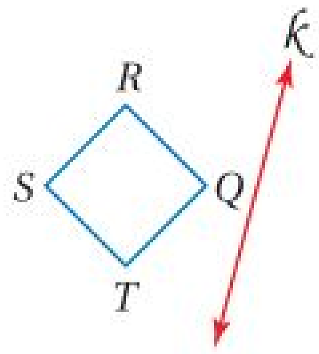
تأكد

المثال 1 ارسم صورة كل شكل مما يأتي بالانعكاس حول المستقيم المعطى:

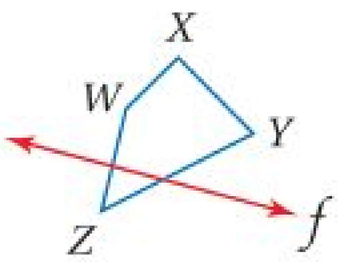
(1



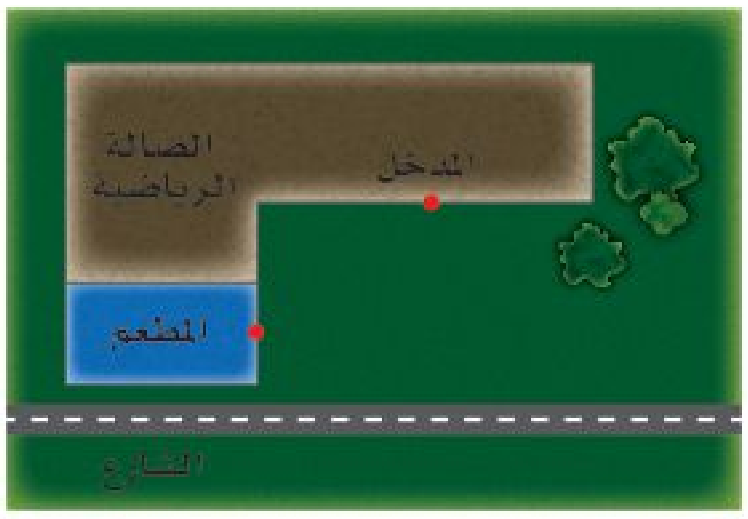
(2



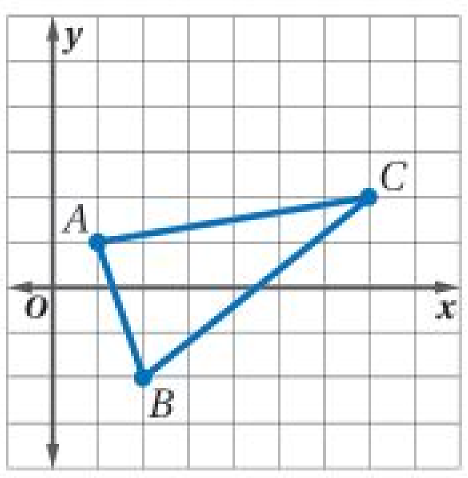
(3



المثال 2 **4)** **مباريات:** ينتظر ماجد في المطعم صديقًا سيأتيه بتذكرة لحضور مباراة في الصالة الرياضية. في أي موقع على الشارع، يجب أن يُوقِفَ صديقه سيارته، حتى تكون المسافة التي يسيرها ماجد من المطعم إلى السيارة ثم إلى مدخل الصالة الرياضية أقل ما يمكن؟ ارسم شكلًا يوضح إجابتك.



المثال 3 مثِّل بيانيًّا صورة $\triangle ABC$ المبيّن جانبًا بالانعكاس حول المستقيم المعطى في كلٍّ من السؤالين 5، 6.



5) $y = -2$

6) $x = 3$

المثالان 4, 5 مثِّل كل شكل مما يأتي بيانيًّا، ثم ارسم صورته بالانعكاس المحدد.

7) $\triangle XYZ$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: $X(0, 4), Y(-3, 4), Z(-4, -1)$ بالانعكاس حول المحور y .

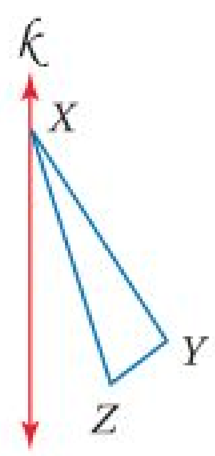
8) $\square QRST$ الذي إحداثيات رؤوسه: $Q(-1, 4), R(4, 4), S(3, 1), T(-2, 1)$ بالانعكاس حول المحور x .

9) الشكل الرباعي الذي إحداثيات رؤوسه: $J(-3, 1), K(-1, 3), L(1, 3), M(-3, -1)$ بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.

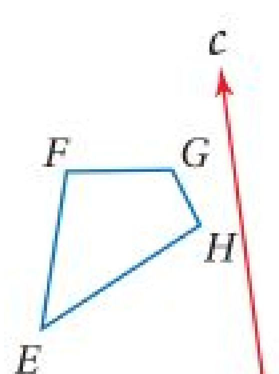
تدرب وحل المسائل

المثال 1 ارسم صورة كل شكل مما يأتي بالانعكاس حول المستقيم المعطى.

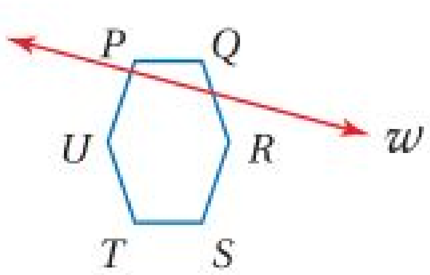
(10



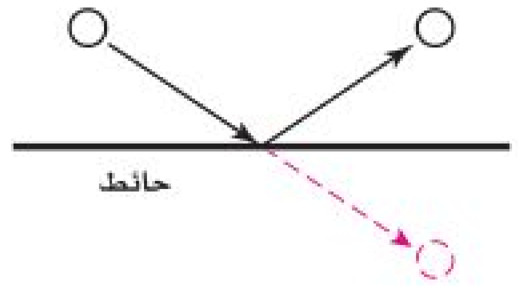
(11



(12



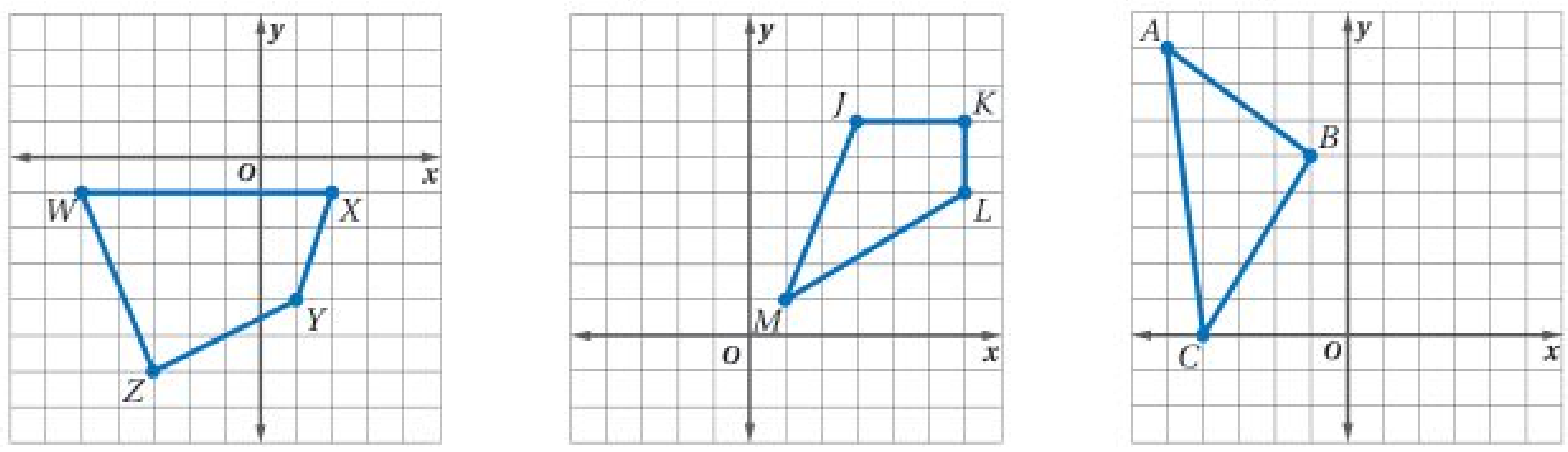
المثال 2



13) **كرة قدم:** عندما ترتطم كرة بحائطٍ فإنها ترتدُّ عنه وتتحرك في مسار نصف مستقيم يمثل انعكاس مسار حركتها لو أنها اخترقت الحائط كما هو موضح جانبًا.
استعمل هذه المعلومات في رسم شكل يبين الموقع الدقيق للنقطة P على الحائط التي يجب أن يصوب سليمان إليها الكرة إذا كان يشارك في مباراة كرة قدم في ملعبٍ داخليٍّ، ويريد أن يمرّر الكرة إلى صديقه يوسف عند النقطة C، متجنبًا لاعبًا من الفريق الخصم عند النقطة B، ولذلك قرر أن يركل الكرة من النقطة A إلى نقطة على الحائط الجانبي، بحيث ترتد عنه نحو النقطة C.

المثال 3

مثِّل صورة كل شكلٍ مما يأتي بيانيًّا بالانعكاس حول المستقيم المُعطَى .



14) $\triangle ABC, y = 3$ 15) $JKLM, x = 1$ 16) $WXYZ, y = -4$

17) $\triangle ABC, x = -1$ 18) $JKLM, y = 4$ 19) $WXYZ; x = -2$

المثالان 4, 5

مثِّل كل شكل مما يأتي بيانيًّا، ثم ارسم صورته بالانعكاس المحدد .

20) المستطيل $ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(-5, 2), B(1, 2), C(1, -1), D(-5, -1)$ بالانعكاس حول المستقيم $y = -2$.

21) المربع $JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه: $J(-4, 6), K(0, 6), L(0, 2), M(-4, 2)$ بالانعكاس حول المحور y.

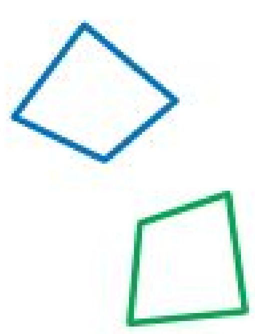
22) $\triangle FGH$ الذي إحداثيات رؤوسه: $F(-3, 2), G(-4, -1), H(-6, -1)$ بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.

23) $\square WXYZ$ الذي إحداثيات رؤوسه: $W(2, 3), X(7, 3), Y(6, -1), Z(1, -1)$ بالانعكاس حول المحور x.

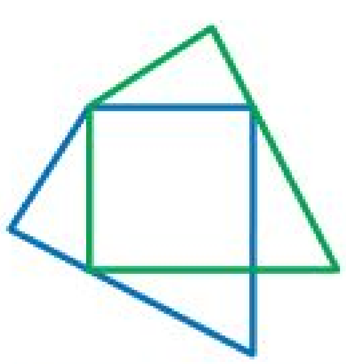
يُبيِّنُ كُلٌّ من الأشكال الآتية مضلعًا وصورته بالانعكاس حول مستقيمٍ ما، ارسم محور الانعكاس في كلٍّ منها.

24)

25)



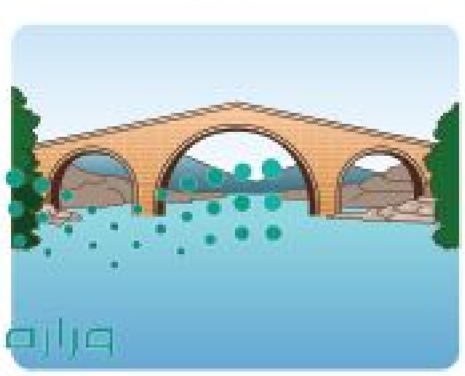
26)



الربط مع الحياة

يلتقط المصورون الصور لأغراض متعددة، مثل الصحافة أو لأغراض علمية، ويتطلب العمل في بعض مجالات التصوير مثل التصوير الصحفي أو التصوير العلمي تدريبًا خاصًّا.

27) **تصوير:** ارسم صورة الجسر الموضح في الصورة المجاورة بالانعكاس في الماء.



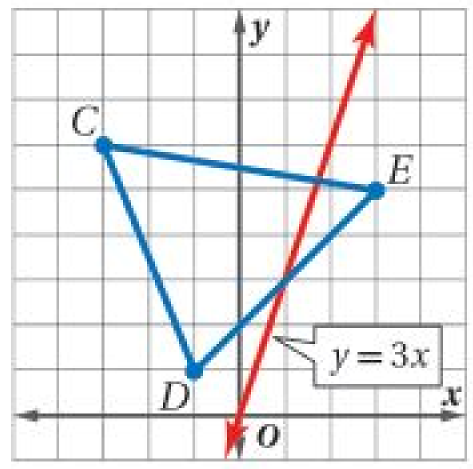
جبر: مثِّل بيانيًّا المستقيم $y = 2x - 3$ وصورته بالانعكاس حول المستقيم المعطى في كلٍّ مما يأتي، ثم اكتب معادلة المستقيم الناتج عن الانعكاس

28) المحور x

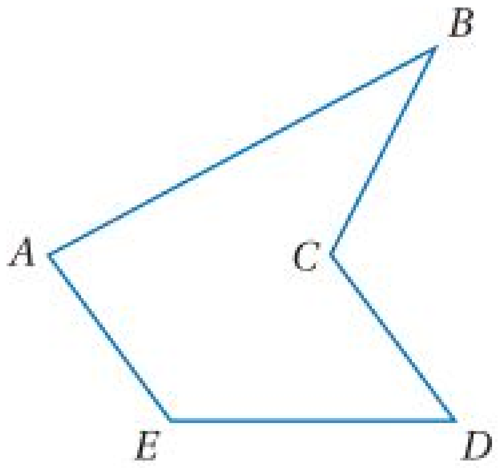
29) المحور y

30) المستقيم $y = x$

31) مثِّل بيانيًّا صورة $\triangle CDE$ المبين أدناه بالانعكاس حول المستقيم $y = 3x$.

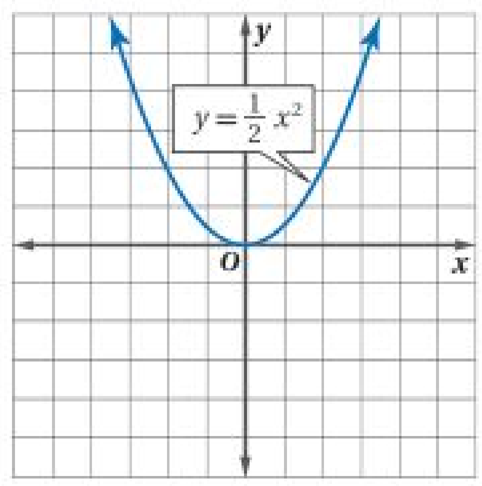


32) غيِّر موقع الرأس C ليصبح المضلع $ABCDE$ محدبًا، وتبقى أطوال أضلاعه كما هي دون تغيير.

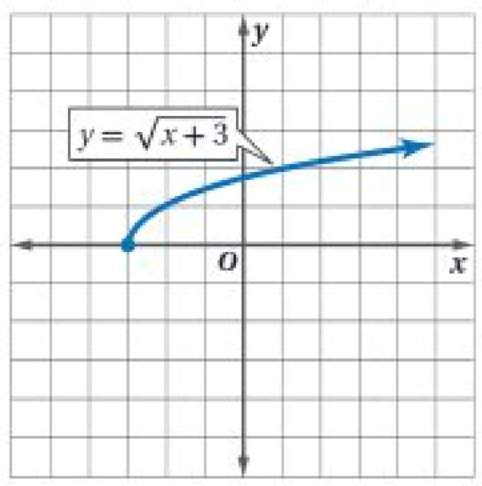


جبر: مثِّل بيانيًّا صورة كلٍّ من الدوال الآتية بالانعكاس حول المحور المحدّد، ثم اكتب معادلة الصورة الناتجة عن الانعكاس.

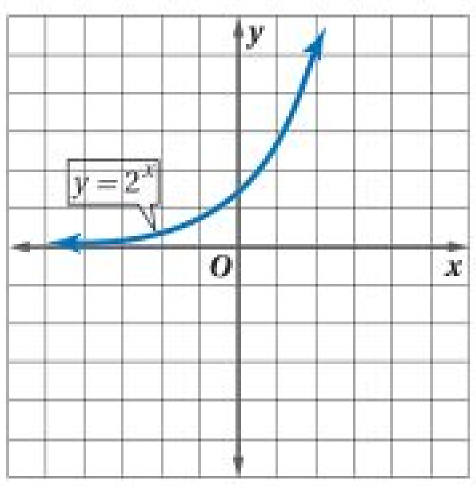
33) المحور x



34) المحور y



35) المحور x



36) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستستقصي الانعكاس حول نقطة الأصل.

a) **هندسيًّا:** ارسم المثلث $\triangle ABC$ في المستوى الإحداثي، بحيث تكون إحداثيات رؤوسه أعدادًا صحيحة موجبة.

b) **بيانيًّا:** عيِّن النقاط A', B', C' الناتجة عن الانعكاس، بحيث تكون النقطة الأصلية وصورتها ونقطة الأصل على استقامةٍ واحدةٍ، وتكون النقطة الأصلية وصورتها على البعد نفسه من نقطة الأصل.

c) **جدوليًّا:** انقل الجدول الآتي وأكمله.

	$\triangle ABC$		$\triangle A'B'C'$	
الإحداثيات	A		A'	
	B		B'	
	C		C'	

d) **لفظيًّا:** ضع تخمينًا حول العلاقة بين إحداثيات الرؤوس المتناظرة لشكلٍ وصورته الناتجة عن انعكاسه حول نقطة الأصل.

مسائل مهارات التفكير العليا

37) **اكتشف الخطأ:** يجد جميل وإبراهيم إحداثيات صورة النقطة $C(2, 3)$ الناتجة عن انعكاس حول المحور x، أيٌّ منهما إجابته صحيحة؟ وضِّح إجابتك.

جميل	إبراهيم
$C'(2, -3)$	$C'(-2, 3)$

38) **مسألة مفتوحة:** ارسم مضلعًا في المستوى الإحداثي، بحيث تكون صورته الناتجة عن انعكاس حول المحور x منطبقةً عليه تمامًا.

39) **مسألة مفتوحة:** ارسم شكلًا في المستوى الإحداثي، يكون اتجاه صورته الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم $y = 1$ مماثلًا لاتجاه الشكل نفسه. وضّح الشروط التي يجب توافرها لتحقيق هذا الأمر.

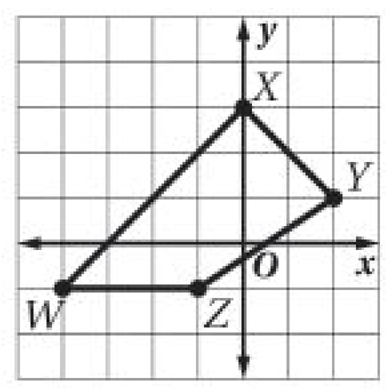
40) **تحدٍّ:** إذا كانت صورة النقطة $A(4, 3)$ بعد الانعكاس حول مستقيمٍ معينٍ هي $A'(-1, 0)$، فأوجد معادلة محور الانعكاس. وضح إجابتك.

41) **تبرير:** هل تقع صورة نقطة بالانعكاس حول مستقيمٍ ما في الجهة الثانية من هذا المستقيم دائمًا أم أحيانًا أم لا تقع فيها أبدًا؟

42) **اكتب:** تقع النقاط P, Q, R على استقامةٍ واحدةٍ حيث أن Q واقعة بين P و R. باستعمال الهندسة الإحداثية، أثبت أن انعكاس هذه النقاط حول مستقيم يحافظ على الاستقامة وترتيب مواقع النقاط.

تدريب على اختبار

43) **إجابة قصيرة:** إذا كانت صورة الشكل الرباعي $WXYZ$ الناتجة عن انعكاسه حول المحور y هي $W'X'Y'Z'$، فما إحداثيات X'؟



44) إحداثيات النقطتين A, B في المستوى الإحداثي هي $(-2, 4), (3, 3)$ على الترتيب، احسب AB.

A $(1, 7)$

B $\sqrt{26}$

C $(5, -1)$

D $\sqrt{50}$

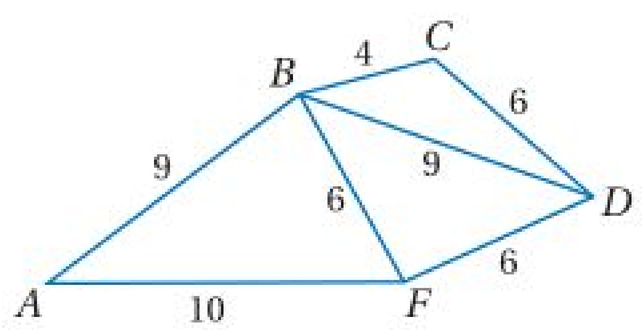
مراجعة تراكمية

45) **هندسة إحداثية:** في $\triangle LMN$، $\overline{PR}$ تقسّم الضلعين NL , MN إلى قطع مستقيمة متناظرة أطوالها متناسبة، إذا كانت $\frac{LP}{PN} = \frac{2}{1}$ وكانت $RN = 3$، فأوجد MR. **(الدرس 6-3)**

استعمل الشكل المجاور لتكتب متباينةً تصف العلاقة بين قياسَي الزاويتين أو طولَي القطعتين المستقيمتين في كلٍّ مما يأتي. (مهارة سابقة)

46) $m\angle BDC, m\angle FDB$

47) $m\angle FBA, m\angle DBF$



استعد للدرس اللاحق

48) إحداثيات طرفَي $\overline{AB}$ هما $A(5, 4)$, $B(3, -1)$، تحركت كلٌّ من هاتين النقطتين 3 وحداتٍ إلى اليمين و5 وحداتٍ إلى أسفل، فكانت مواقعهما الجديدة B' , A' على الترتيب.

a) اكتب قاعدة هذا التحويل الهندسي.

b) أوجد إحداثيات A' , B'.

c) أوجد طول كلٍّ من $\overline{AB}, \overline{A'B'}$.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

2-7 الإزاحة (الانسحاب)
Translation

فيما سبق:
درستُ الانسحاب بوصفه تحويلًا هندسيًا.

(مهارة سابقة)

والآن:
- أرسم الصور الناتجة عن الإزاحة.
- أرسم الصور الناتجة عن الإزاحة في المستوى الإحداثي.

المفردات:
الانسحاب
translation

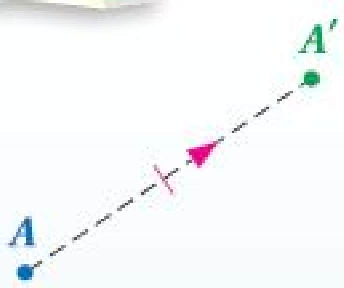
لماذا؟
تُفتتح بعض الاحتفالات الوطنية بعروض عسكرية تزيدها بهجةً وبهاءً. ومعظم حركات أعضاء تلك الفرق العسكرية تمثِّل ما يُعرف في الهندسة بالإزاحة أو الانسحاب.

رسم الإزاحة (الانسحاب): تعلمت سابقًا أن **الانسحاب** هو تحويل هندسي ينقل الشكل من موقع إلى آخر من دون تدويره. حيث يتم نقل جميع نقاط الشكل المسافة نفسها وفي الإتجاه نفسه. ويمكن التعبير عن الإزاحة (الانسحاب) لكل نقطة من الشكل بقطعة مستقيمة طولها يساوي $\overline{AA'}$ حيث إن A' هي صورة النقطة A الناتجة عن الإزاحة (الانسحاب).

مفهوم أساسي — الإزاحة (الانسحاب)
أضف إلى مطويتك

تنقل الإزاحة (الانسحاب) كل نقطة إلى صورتها مسافةً محدَّدةً وفي اتجاه محدَّد (اتجاه الإزاحة). فالإزاحة التي تنقل النقطة A إلى صورتها A'، تنقل نقاط الشكل جميعها أيضًا بحيث إن:

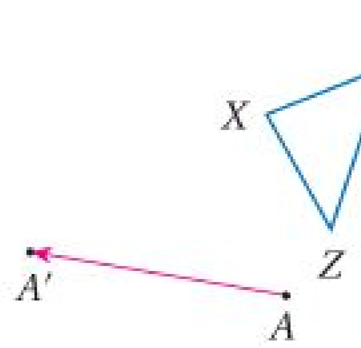
- **مقدار الإزاحة يساوي طول القطعة المستقيمة التي تصل أي نقطة بصورتها يساوي طول $\overline{AA'}$.**
- **القطعة المستقيمة التي تصل أي نقطةٍ بصورتها توازي $\overline{AA'}$.**



النقطة A' هي صورة النقطة A بالإزاحة.

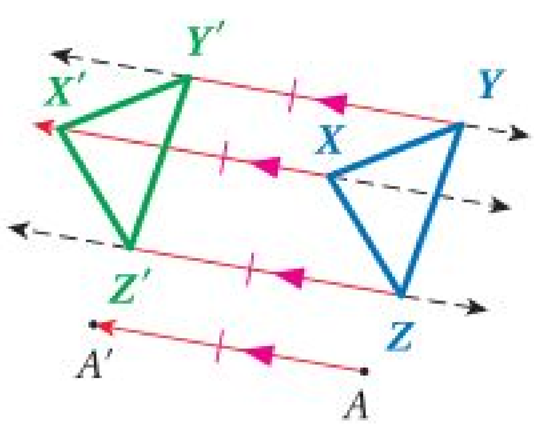
مثال 1 — رسم الإزاحة في المستوى

ارسم صورة الشكل الناتجة عن الإزاحة التي تنقل النقطة A إلى النقطة A'.



الخطوة 1: باستعمال المسطرة ومثلث الرسم، ارسم من كل رأسٍ من رؤوس المثلث XYZ مستقيمًا يوازي $\overline{AA'}$.

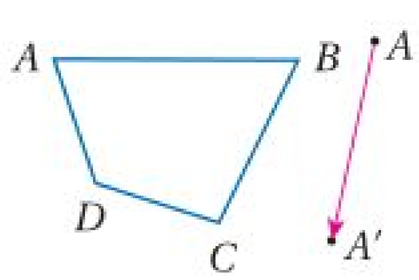
الخطوة 2: قِسْ طول $\overline{AA'}$، ثم عيِّن على المستقيم المار بالرأس X النقطة X'، التي تبعد عن X في الاتجاه من A إلى A' مسافةً تساوي طول $\overline{AA'}$.



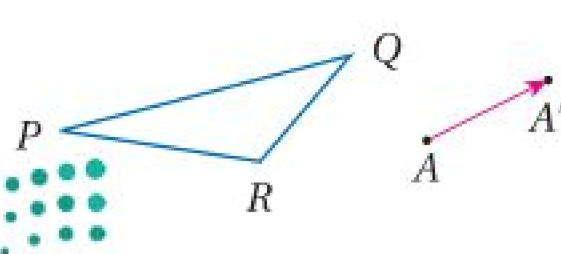
الخطوة 3: كرِّر الخطوة 2 لتعيِّن Z' , Y'، ثم صِلِ الرؤوس X', Y', Z' لتشكل المثلث $X'Y'Z'$ الناتج عن الإزاحة.

تحقق من فهمك: ارسم صورة الشكل الناتجة عن الإزاحة التي تنقل النقطةA إلى A'

(1A



(1B



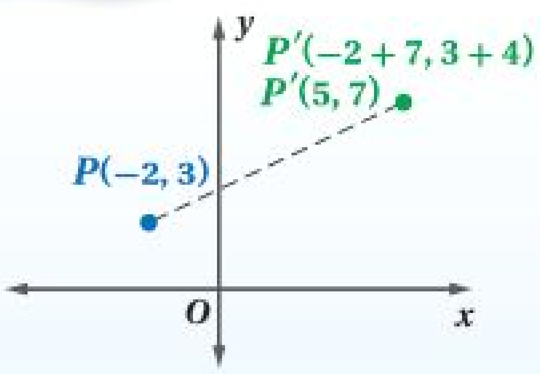
وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رسم الإزاحة في المستوى الإحداثي: يمكن رسم الإزاحات في المستوى الإحداثي، إذا علمنا مقدار الإزاحة واتجاهها أفقيًّا أو رأسيًّا، فإذا رمزنا للمسافة الأفقية من النقطة الأصلية إلى صورتها بالرمز a، وللمسافة الرأسية من النقطة الأصلية إلى صورتها بالرمز b، فإنه يمكن التعبير عن هذه الإزاحة بالقاعدة: $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$، ويمكن استعمال هذه القاعدة لإجراء إزاحةٍ للشكل في المستوى الإحداثي.

مفهوم أساسي — الإزاحة في المستوى الإحداثي

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لإزاحة نقطة ما مسافة a وحدةً أفقيًّا، و b وحدةً رأسيًّا، اجمع a إلى الإحداثي x، و b إلى الإحداثي y.



الرموز: $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$

مثال: إذا كانت: $a = 7$, $b = 4$، فإن صورة النقطة $P(-2, 3)$ الناتجة عن هذه الإزاحة هي $P'(5, 7)$.

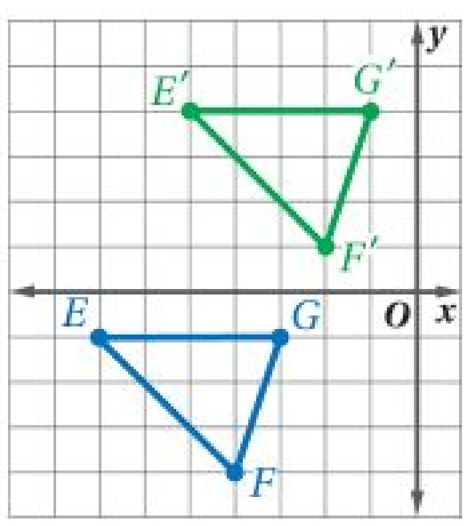
قراءة الرياضيات

الإزاحة الأفقية والإزاحة الرأسية: عندما يكون $b = 0$، تكون الإزاحة أفقيةً فقط. وعندما يكون $a = 0$، تكون الإزاحة رأسية فقط.

مثال 2 — الإزاحة في المستوى الإحداثي

مثِّل الشكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المحددة في كلٍّ مما يأتي بيانيًّا:

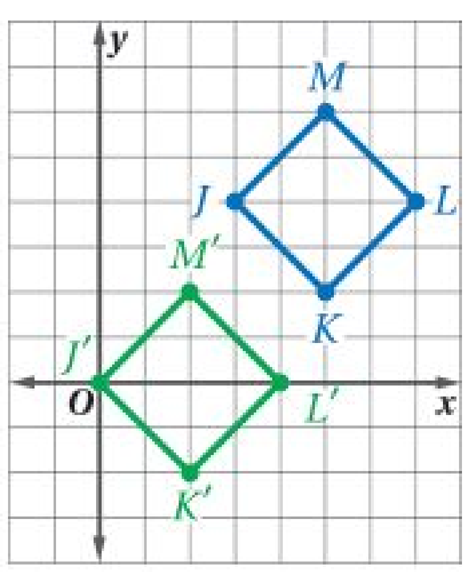
a) $\triangle EFG$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: $E(-7, -1), F(-4, -4), G(-3, -1)$، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x + 2, y + 5)$



تدل هذه القاعدة على إزاحة مقدارها وحدتان إلى اليمين و 5 وحدات إلى أعلى.

(x, y)	$\rightarrow$	$(x + 2, y + 5)$
$E(-7, -1)$	$\rightarrow$	$E'(-5, 4)$
$F(-4, -4)$	$\rightarrow$	$F'(-2, 1)$
$G(-3, -1)$	$\rightarrow$	$G'(-1, 4)$

b) المربع $JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه: $J(3, 4), K(5, 2), L(7, 4), M(5, 6)$، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x - 3, y - 4)$



تدل هذه القاعدة على إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليسار و 4 وحدات إلى أسفل.

(x, y)	$\rightarrow$	$(x - 3, y - 4)$
$J(3, 4)$	$\rightarrow$	$J'(0, 0)$
$K(5, 2)$	$\rightarrow$	$K'(2, -2)$
$L(7, 4)$	$\rightarrow$	$L'(4, 0)$
$M(5, 6)$	$\rightarrow$	$M'(2, 2)$

إرشادات للدراسة

الإشارة السالبة: إشارة a السالبة تعني أن الإزاحة إلى اليسار، وإشارة b السالبة تعني أن الإزاحة إلى أسفل.

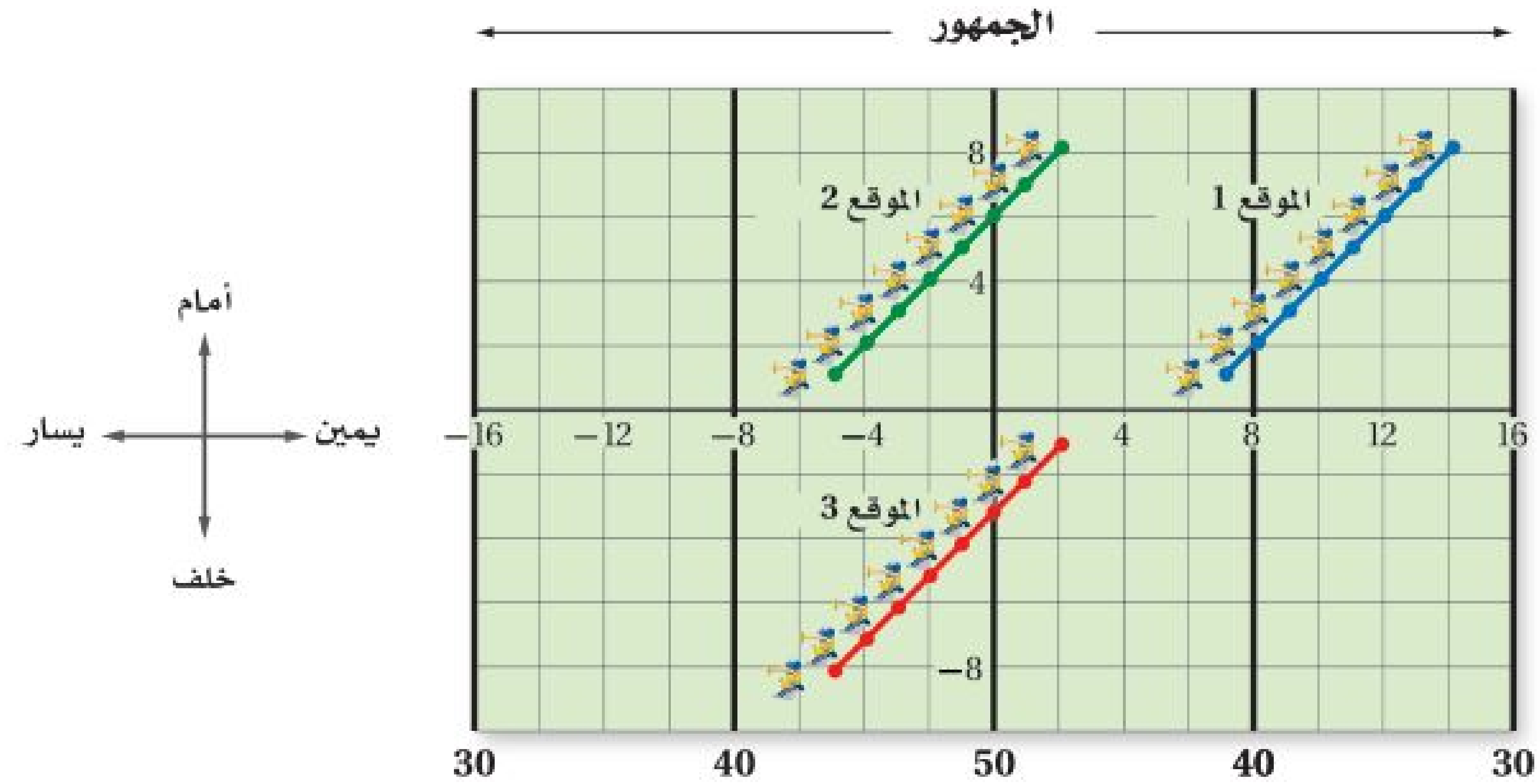
تحقق من فهمك

2A) $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(2, 6), B(1, 1), C(7, 5)$، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x - 4, y - 1)$

2B) الشكل الرباعي $QRST$ الذي إحداثيات رؤوسه: $Q(-8, -2), R(-9, -5), S(-4, -7), T(-4, -2)$، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x + 7, y + 1)$

مثال 3 من واقع الحياة — وصف الإزاحة

استعراض: في استعراض لفرقةٍ عسكريةٍ، يسير الأفراد من الموقع 1 إلى الموقع 2 ثم إلى الموقع 3، وكل وحدة على الشبكة تمثلُ خطوةً واحدةً.



a) اكتب قاعدةً لحركة أفراد الفرقة العسكرية عند انتقالهم من الموقع 1 إلى الموقع 2 ثم صفها لفظيًّا.

إحدى النقاط في الموقع 1 عند $(14, 8)$، وتحركت هذه النقطة إلى $(2, 8)$ في الموقع 2، استعمل قاعدة الإزاحة $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$ لكتابة معادلتين وحلّهما لإيجاد قيمة كلٍّ من a , b.

$$(14 + a, 8 + b) = (2, 8)$$

$$14 + a = 2 \qquad 8 + b = 8$$

$$a = -12 \qquad b = 0$$

إذن قاعدة هذه الإزاحة هي : $(x, y) \rightarrow (x - 12, y)$

أي أن كلًّا من أفراد الفرقة العسكرية تحرك 12 خطوةً إلى اليسار، ولم يتحرك أي خطوةٍ إلى الأمام أو إلى الخلف في أثناء انتقاله من الموقع 1 إلى الموقع 2

b) صِفْ حركة أفراد الفرقة العسكرية عند انتقالهم من الموقع 1 إلى الموقع 3 باستعمال قاعدة الإزاحة.

$$(14 + a, 8 + b) = (2, -1)$$

$$14 + a = 2 \qquad 8 + b = -1$$

$$a = -12 \qquad b = -9$$

إذن قاعدة هذه الإزاحة هي : $(x, y) \rightarrow (x - 12, y - 9)$

إرشادات للدراسة

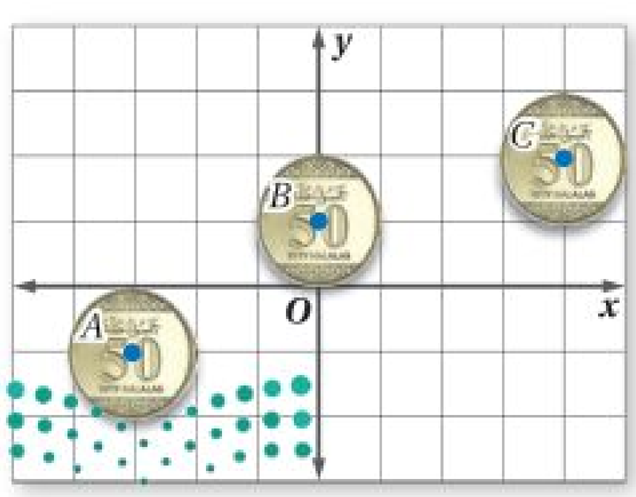
تحويلات التطابق: الإزاحة هي تحويل تطابق أيضًا، فهي تحافظ على الأبعاد وقياسات الزوايا وترتيب مواقع النقاط والاستقامة.

تحقق من فهمك

3) **نقود:** تمَّ تصوير حركة قطعة نقود في مواقع مختلفة على المستوى الإحداثي.

A) صِفْ حركة القطعة عند انتقالها من الموقع A إلى الموقع B لفظيًّا.

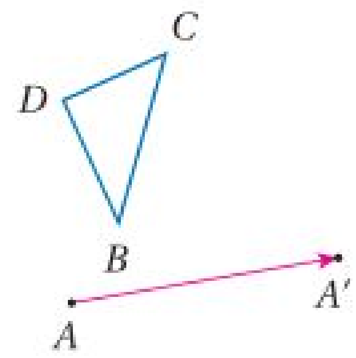
B) صِفْ حركة القطعة عند انتقالها من الموقع A إلى الموقع C باستعمال قاعدة الإزاحة.



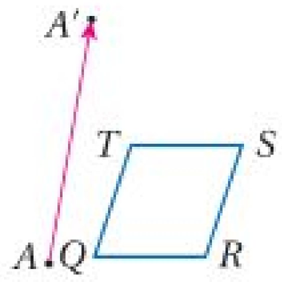
تأكـــد

المثال 1 ارسم صورة الشكل الناتجة عن الإزاحة التي تنقل النقطة A إلى النقطة A' في كلٍّ ممَّا يأتي:

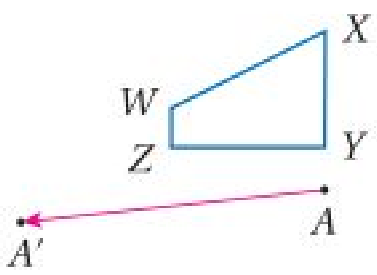
1)



2)



3)



المثال 2 مثِّل الشكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المحددة في كلٍّ مما يأتي بيانيًّا:

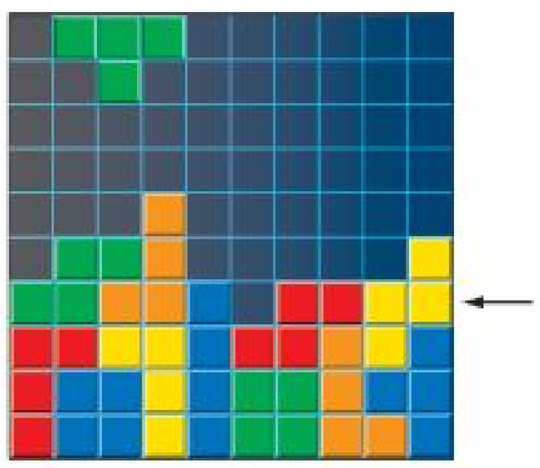
4) شبه المنحرف $JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه: $J(2, 4), K(1, 1), L(5, 1), M(4, 4)$، أزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x + 7, y + 1)$

5) $\triangle DFG$ الذي إحداثيات رؤوسه: $D(-8, 8), F(-10, 4), G(-7, 6)$، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x + 5, y - 2)$

6) متوازي الأضلاع $WXYZ$ الذي إحداثيات رؤوسه: $W(-6, -5), X(-2, -5), Y(-1, -8), Z(-5, -8)$، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x - 1, y + 4)$

المثال 3

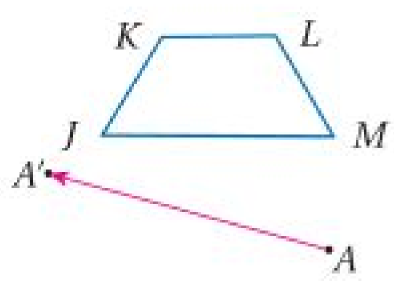
7) ألعاب فيديو: إن هدف اللعبة المجاورة هو تحريك القطع الملونة إلى اليمين أو اليسار، عندما تنزل من أعلى الشاشة لملء كل صف دون ترك فراغاتٍ فيه. إذا كان الموقع الابتدائي للقطعة في أعلى الشاشة (x, y)، فاكتب قاعدةً لوصف الانسحاب الذي يملأ الصف المشار إليه بالسهم.



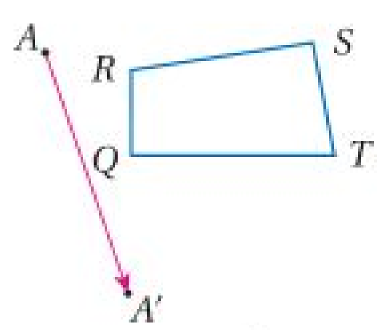
تدرب وحل المسائل

المثال 1 ارسم صورة الشكل الناتجة عن الإزاحة التي تنقل النقطة A إلى النقطة A' في كلٍّ مما يأتي:

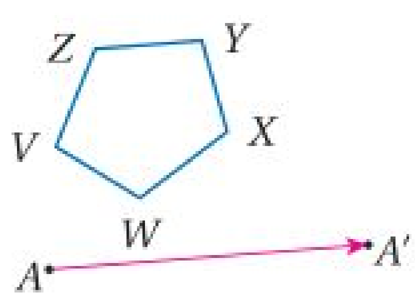
8)



9)



10)



المثال 2 مثِّل الشكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المحددة في كلٍّ مما يأتي بيانيًّا:

11) $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(1, 6), B(3, 2), C(4, 7)$، أزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x + 4, y - 1)$

12) المستطيل $QRST$ الذي إحداثيات رؤوسه: $Q(-8, 4), R(-8, 2), S(-3, 2), T(-3, 4)$، أزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x + 2, y + 3)$

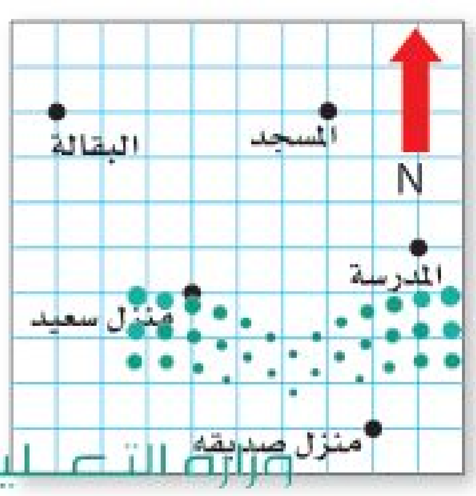
13) الشكل الرباعي $FGHJ$ الذي إحداثيات رؤوسه: $F(-4, -2), G(-1, -1), H(0, -4), J(-3, -6)$، أزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x - 3, y - 6)$

المثال 3

14) مواقع: تبين الشبكة المجاورة بعض المواقع في الحي الذي يقطنه سعيد.

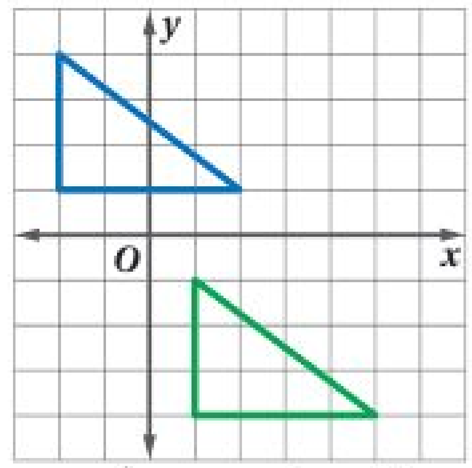
a) إذا غادر سعيد منزله، وانتقل 4 وحدات إلى الشمال و 3 وحدات إلى الشرق، فأين يصل؟

b) صِف لفظيًّا إزاحتين تنقلان سعيد من المدرسة إلى منزله.

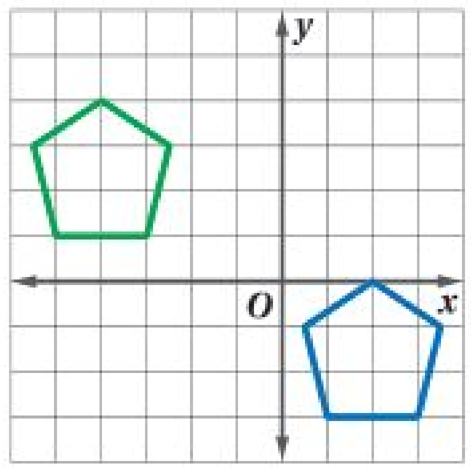


اكتب قاعدة الإزاحة التي تنقل الشكل الأزرق إلى الشكل الأخضر في كلٍّ من السؤالين الآتيين.

15)

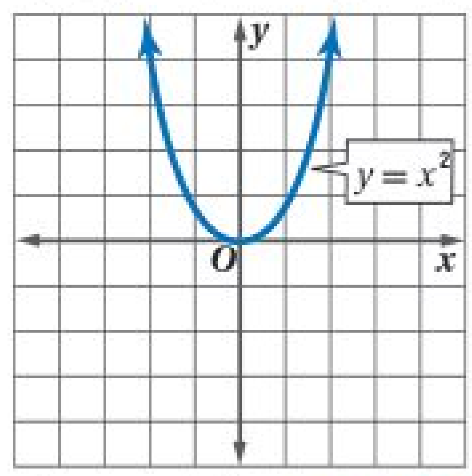


16)

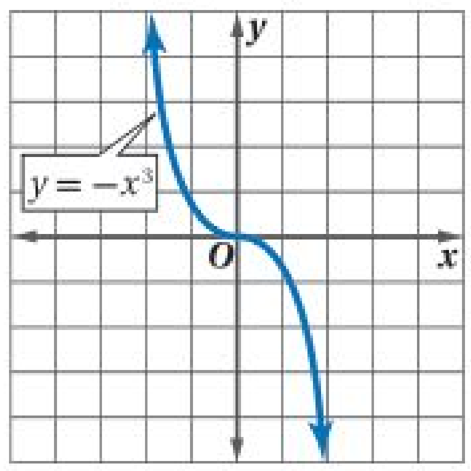


جبر: مثِّل بيانيًّا صورة كلٍّ من الدالتين الآتيتين الناتجة عن الإزاحة المعطاة، ثم اكتب معادلة هذه الصورة.

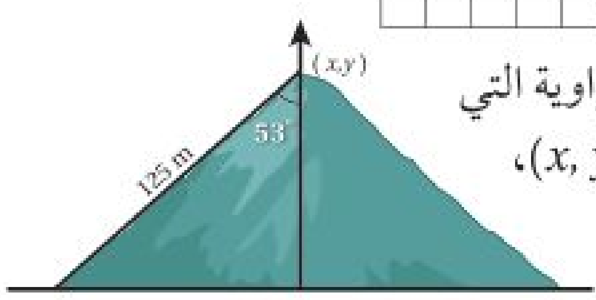
17) $(x, y) \rightarrow (x + 4, y + 1)$



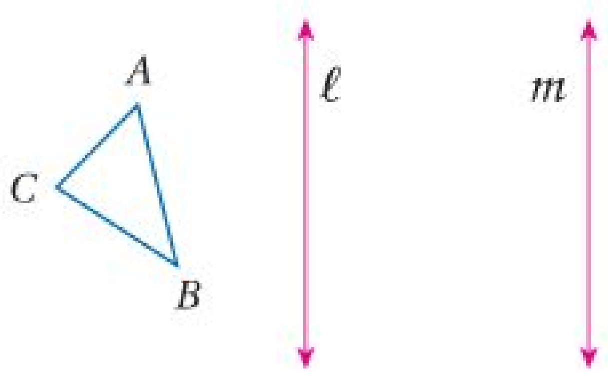
18) $(x, y) \rightarrow (x - 2, y)$



19) **تضاريس:** طول منحدر تلةٍ من قمتها حتى أسفلها 125 m، وقياس الزاوية التي يصنعها مع المستقيم الرأسي $53°$، إذا كان موقع منصور عند قمة التلة (x, y)، فاكتب قاعدة الإزاحة التي تمثل انتقاله إلى أسفل التلة.



20) **تمثيلات متعددة:** ستستقصي في هذه المسألة نتيجة انعكاسين حول مستقيمين رأسيَّين.



a) **هندسيًّا:** ارسم على ورق شفاف $\triangle ABC$ ، والمستقيمين الرأسيّين ℓ, m ، وارسم صورة $\triangle ABC$ الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم ℓ ، بطيِّ الورقة على امتداد المستقيم ℓ وسمِّ هذه الصورة $\triangle A'B'C'$، ثم ارسم صورة $\triangle A'B'C'$ الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم m ، بطيّ الورقة على امتداد المستقيم m ، وسمّ هذه الصورة $\triangle A''B''C''$.

b) **هندسيًّا:** كرّر العملية التي نفذتها في الفرع **a** لرسم صورة $\triangle DEF$ الناتجة عن انعكاسين متعاقبين حول المستقيمين الرأسيين n, p، وصورة $\triangle MNP$ الناتجة عن انعكاسين متعاقبين حول المستقيمين الرأسيين q, r.

c) **جدوليًّا:** انسخ الجدول الآتي وأكمله.

المسافة بين المستقيمين الرأسيين (cm)		المسافة بين النقاط المتناظرة (cm)	
ℓ, m		A و A'' ، B و B'' ، C و C''	
n, p		D و D'' ، E و E'' ، F و F''	
q, r		M و M'' ، N و N'' ، P و P''	

d) **لفظيًّا:** صِفْ نتيجة الانعكاسين حول المستقيمين الرأسيين باستعمال الإزاحة.

مسائل مهارات التفكير العليا

21) **تبرير:** أُجريت إزاحةٌ لشكلٍ ما، وفقًا للقاعدة: $(x, y) \rightarrow (x - 3, y + 8)$، ثم إزاحةٌ أخرى للصورة الناتجة وفقًا للقاعدة: $(x, y) \rightarrow (x + 3, y - 8)$. من دون استعمال الرسم، حدِّد مكان الشكل النهائي وبرِّر إجابتك.

إرشادات للدراسة

انسحاب الدالة المتصلة: عند إجراء تحويل هندسي على دالة متصلة تمثل بخطٍّ منحنٍ من دون انقطاع كما في السؤالين 17, 18، تبقى الدالة محافظة على شكلها كما هو الحال في تحويلات التطابق.

قراءة الرياضيات

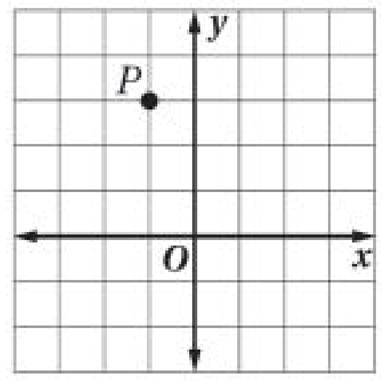
الشرطتان: تستعمل الشرطتان للدلالة على أن هذا الرأس صورة ناتجة عن تحويل هندسي ثانٍ.

22) **تحدٍّ:** أُزيح المستقيم $y = mx + b$ وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$. اكتب معادلة صورته الناتجة عن هذه الإزاحة. ما مقطع المحور y للمستقيم الجديد؟

23) **اكتب:** تذكر من الدرس السابق أن النقطة الثابتة هي النقطة التي تنطبق صورتها عليها. هل توجد نقاط ثابتة في الإزاحة؟ وضح أسباب وجودها أو أسباب عدم وجودها.

تدريب على اختبار

24) أوجد صورة النقطة P الناتجة عن الإزاحة: $(x, y) \rightarrow (x + 3, y + 1)$.



A $(0, 6)$

B $(0, 3)$

C $(2, -4)$

D $(2, 4)$

25) يحتوي كيس على 5 كرات حمراء وكرتين زرقاوين و 4 كرات بيضاء وكرة واحدة صفراء. إذا سُحب من الكيس كرتان على التوالي من دون إرجاع، فما احتمال سحب كرتين بيضاوين؟

A $\frac{1}{66}$

B $\frac{1}{11}$

C $\frac{1}{9}$

D $\frac{5}{33}$

26) **إجابة قصيرة:** ما قاعدة الإزاحة التي تنقل النقطة $A(3, -5)$ إلى النقطة $A'(-2, -8)$؟

مراجعة تراكمية

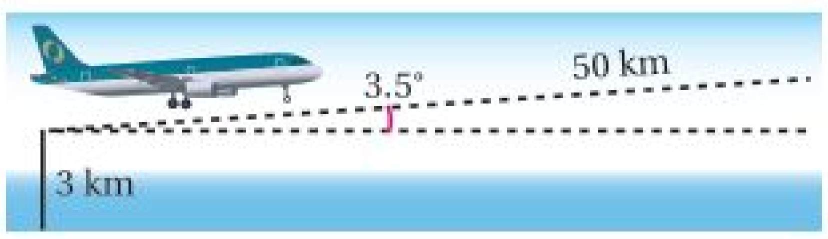
مثِّل كل شكل مما يأتي بيانيًّا، ثم ارسم صورته بالانعكاس المحدد. (الدرس 1-7)

27) $\overline{DJ}$ التي إحداثيات طرفَيها $D(4, 4), J(-3, 2)$ ، بالانعكاس حول المحور y .

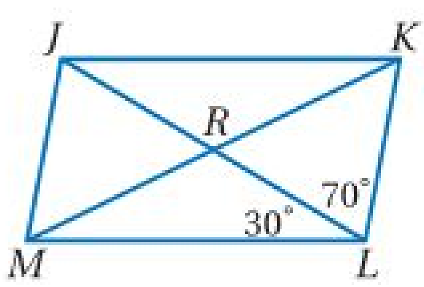
28) $\triangle XYZ$ الذي إحداثيات رؤوسه: $X(0, 0), Y(3, 0), Z(0, 3)$ ، بالانعكاس حول المحور x .

29) $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(-3, -1), B(0, 2), C(3, -2)$ ، بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.

30) **الملاحة الجوية:** كان ارتفاع طائرة 3 km فوق سطح البحر عندما بدأت بالارتفاع بزاوية °3.5 ، إذا بقيت هذه الزاوية ثابتةً، فكم كيلو مترًا يكون ارتفاعها فوق سطح البحر بعد طيرانها مسافة 50 km؟ (مهارة سابقة)



أوجد كلًّا من القياسات الآتية مستعملًا $\square JKLM$ المجاور. (مهارة سابقة)



31) $m\angle MJK$

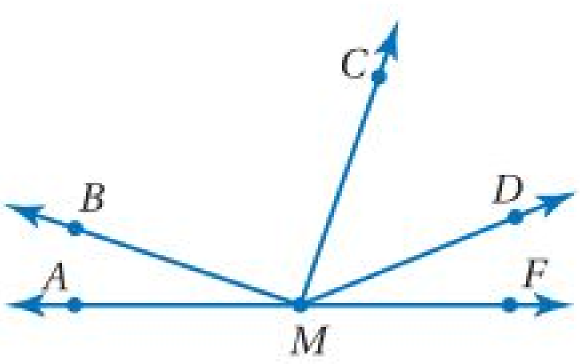
32) $m\angle JML$

33) $m\angle JKL$

34) $m\angle KJL$

استعد للدرس اللاحق

صنّف كلًّا من الزوايا الآتية إلى قائمةٍ أو حادةٍ أو منفرجةٍ، ثم استعمل المنقلة لقياس الزاوية إلى أقرب درجةٍ.



35) $\angle AMC$

36) $\angle FMD$

37) $\angle BMD$

38) $\angle CMB$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

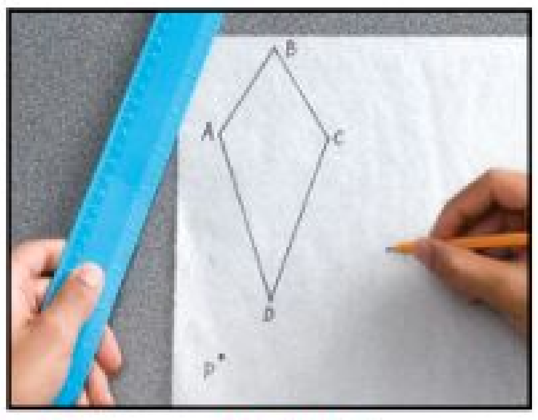
استكشاف

7-3 معمل الهندسة: الدوران Rotations

درست سابقًا التماثل الدوراني حول نقطة، والذي يحرك الشكل حول نقطة ثابتة تسمى مركز الدوران بزاوية معينة وفي اتجاه محدد، وستستعمل الورق الشفاف في هذا النشاط لاستكشاف خصائص الدوران.

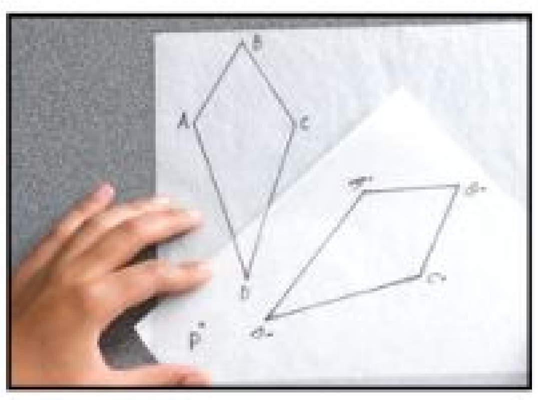
نشاط: استكشاف الدوران باستعمال الورق الشفاف

الخطوة 1: ارسم في قطعة من الورق الشفاف الشكل الرباعي $ABCD$ والنقطة P.


الخطوة 1

الخطوة 2: انسخ الشكل الرباعي $ABCD$ والنقطة P في قطعةٍ أخرى من الورق الشفاف، وسمّ الشكل الجديد $A'B'C'D'$.

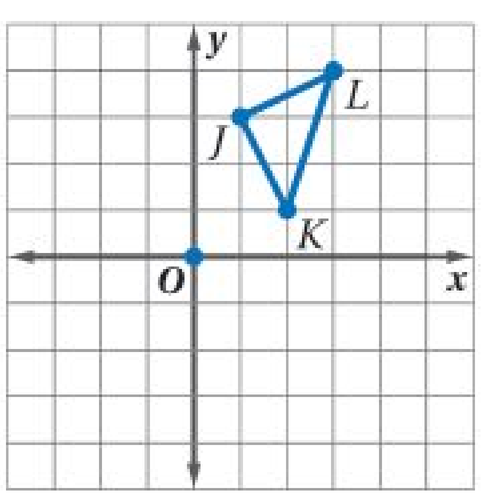
الخطوة 3: ضع الورقتين بحيث تنطبق النقطة P من الأولى على النقطة P من الثانية، ودوّر الورقتين بحيث لا يكون هناك تداخل بين $ABCD$، و $A'B'C'D'$، وألصق الورقتين معًا.


الخطوتان 2, 3

الخطوة 4: قِسِ المسافة بين النقطة P وكل رأس من رؤوس الشكلين $ABCD$ و $A'B'C'D'$، ثم انقل الجدول الآتي وأكمله.

الشكل الرباعي	الطول			
$ABCD$	AP	BP	CP	DP
$A'B'C'D'$	$A'P$	$B'P$	$C'P$	$D'P$

تمارين:



1) انسخ $\triangle JKL$ الموضح في الشكل المجاور الذي إحداثيات رؤوسه هي: $L(3, 4)$, $K(2, 1)$, $J(1, 3)$ في قطعة من الورق الشفاف ثم أجب عما يأتي:

a) استعمل الورق الشفاف والمنقلة لتدوير كل رأس بزاوية $90°$ في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل. ما إحداثيات رؤوس صورة المثلث الناتجة عن الدوران؟

b) استعمل الورق الشفاف والمنقلة لتدوير $\triangle JKL$ بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل. ما إحداثيات رؤوس صورة المثلث الناتجة عن الدوران؟

c) استعمل صيغة المسافة بين نقطتين؛ لإيجاد المسافة بين نقطة الأصل وكلٍّ من النقاط J, K, L. ثم أوجد المسافة بين نقطة الأصل وكلٍّ من رؤوس المثلثين $J''K''L''$, $J'K'L'$.

2) **اكتب:** إذا تم تدوير النقطة $(4, 2)$ في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل بزاويةٍ $90°$، وبزاوية $180°$، فما التغيير الذي يطرأ على الإحداثي x وعلى الإحداثي y لهذا النقطة في كل حالة؟

3) **تخمين:** ما إحداثيًّا صورة النقطة (x, y) الناتجة عن دوران بزاوية $270°$ في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل؟

4) **تخمين:** اكتب تخمينًا حول المسافة بين مركز الدوران P، والرؤوس المتناظرة للشكلين $A'B'C'D'$, $ABCD$ في النشاط أعلاه.

7-3 الدوران
Rotations

لماذا؟

استُعملت الطاقة المتولدة من المراوح الهوائية في الماضي؛ لضخِّ الماء أو لطحن الحبوب، أما في الوقت الحاضر، فيمكن أن تكون مراوح الهواء الحديثة بديلًا مهمًّا عن الوقود الأحفوري (النفط والغاز والفحم). إذ تُحوِّل هذه المراوح طاقة الرياح إلى طاقة كهربائية.

رسم الأشكال الناتجة عن الدوران: تعلمت أن الدوران يحرك كل نقطة في الشكل الأصلي بزاوية محددة وفي اتجاه محدد حول نقطة ثابتة.

مفهوم أساسي — الدوران

أضف إلى مطويتك

الدوران حول نقطة ثابتة (تسمى **مركز الدوران**) بزاوية معينة قياسها $x°$ واتجاهٍ معين، يحول النقطة إلى صورتها بحيث:

- إذا كانت النقطة هي مركز الدوران، فإن صورتها هي النقطة نفسها.
- إذا كانت النقطة غير مركز الدوران، فإن النقطة الأصلية وصورتها تبعُدان المسافة نفسها عن مركز الدوران، والزاوية المتشكّلة من النقطة ومركز الدوران والصورة تُسمى **زاوية الدوران** وقياسها يساوي $x°$.

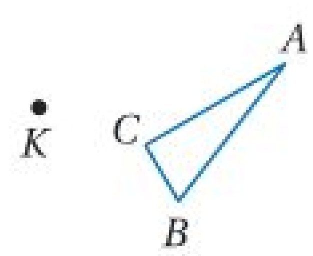
A' هي صورة A الناتجة عن دوران بزاوية $120°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول النقطة C.

يمكن أن يكون اتجاه الدوران في اتجاه حركة عقارب الساعة أو عكس اتجاه حركة عقارب الساعة. ومن الآن فصاعدًا سيكون كل دوران عكس اتجاه حركة عقارب الساعة إلا إذا ورد خلاف ذلك.

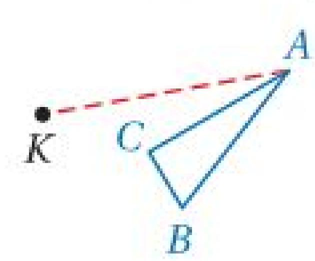
اتجاه حركة عقارب الساعة — عكس اتجاه حركة عقارب الساعة

مثال 1 — رسم الشكل الناتج عن الدوران

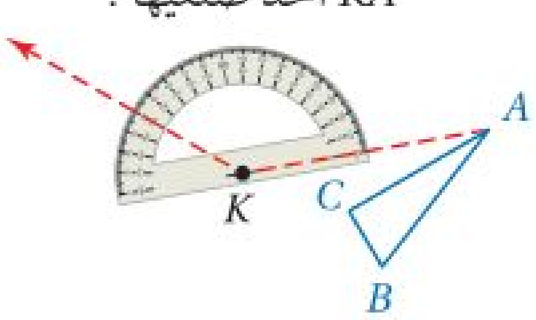
استعمل منقلة ومسطرة لرسم صورة $\triangle ABC$ الناتجة عن دوران بزاوية $140°$ حول النقطة K.



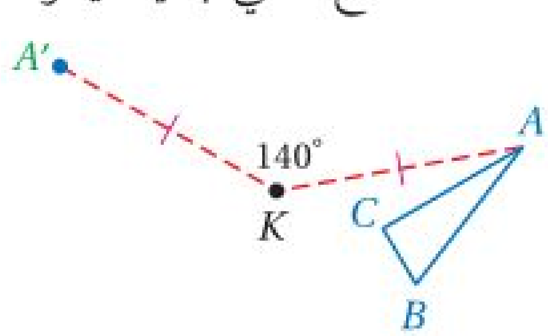
الخطوة 1: ارسم قطعةً مستقيمةً من الرأس A إلى النقطة K.



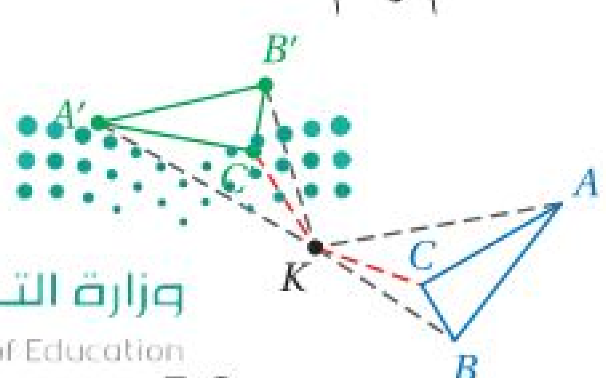
الخطوة 2: ارسم زاويةً قياسها $140°$ تكون $\overline{KA}$ أحد ضلعَيها.



الخطوة 3: استعمل مسطرةً لتعيين A' على الضلع الثاني، بحيث يكون $KA' = KA$.



الخطوة 4: كرِّر الخطوات 3–1 للرأسين B و C ثم ارسم $\triangle A'B'C'$.



فيما سبق:

درستُ التماثل الدوراني حول نقطة.

(مهارة سابقة)

والآن:

- أرسم الصورة الناتجة عن دوران شكل مستعملًا المنقلة.
- أرسم الصورة الناتجة عن دوران شكلٍ في المستوى الإحداثي.

المفردات:

الدوران
rotation

مركز الدوران
center of rotation

زاوية الدوران
angle of rotation

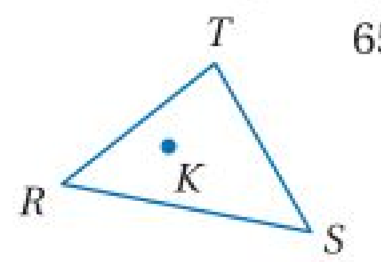
إرشادات للدراسة

تحويلات التطابق: الدوران هو تحويل تطابق أيضًا، فهو يحافظ على الأبعاد وقياسات الزوايا وترتيب مواقع النقاط والاستقامة، حيث تكون فيه الصورة مطابقة للشكل الأصلي.

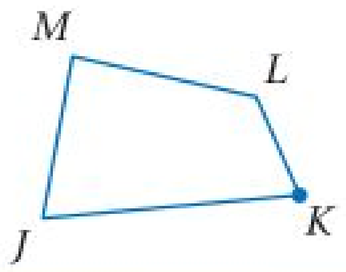
✓ تحقق من فهمك

استعمل منقلةً ومسطرةً؛ لرسم صورة الشكل الناتجة عن الدوران حول النقطة K بالزاوية المحددة في كل من السؤالين الآتيين:

1A) $65°$



1B) $170°$



رسم الصورة الناتجة عن الدوران في المستوى الإحداثي: يمكنك استعمال القواعد الآتية لتحديد صورة نقطةٍ ما، عندما يتم تدويرها بزاوية $90°$ أو $180°$ أو $270°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

مفهوم أساسي — الدوران في المستوى الإحداثي

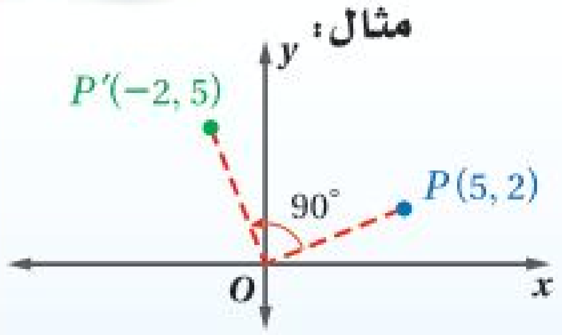
أضف إلى مطويتك

الدوران بزاوية $90°$

عند تدوير نقطة بزاوية $90°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب الإحداثي y في -1، ثم بدّل موقعَي الإحداثيَّين x, y.

الرموز: $(x, y) \to (-y, x)$

مثال:

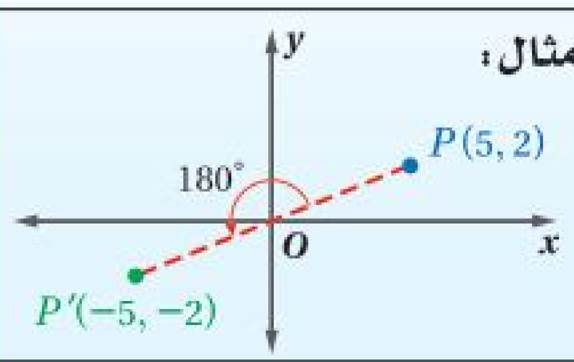


الدوران بزاوية $180°$

عند تدوير نقطة بزاوية $180°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب كلًّا من الإحداثيَّين x, y في -1

الرموز: $(x, y) \to (-x, -y)$

مثال:

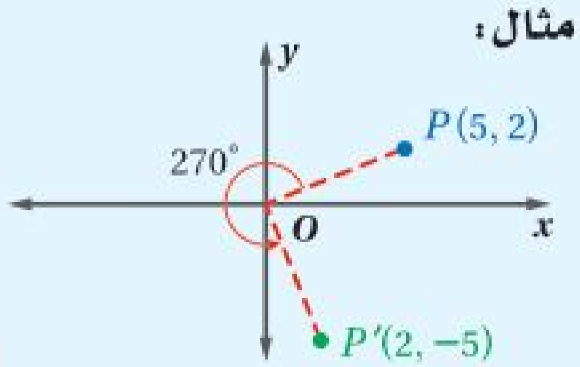


الدوران بزاوية $270°$

عند تدوير نقطة بزاوية $270°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب الإحداثي x في -1
ثم بدّل موقعَي الإحداثيَّين x, y.

الرموز: $(x, y) \to (y, -x)$

مثال:



إرشادات للدراسة

الدوران في اتجاه حركة عقارب الساعة: يُشير قياس زاوية الدوران السالب إلى أن الدوران في اتجاه حركة عقارب الساعة. فالدوران بزاوية $-90°$ حول نقطة الأصل هو دوران بزاوية $90°$ في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

إرشادات للدراسة

الدوران بزاوية $360°$: الدوران بزاوية $360°$ حول نقطة ما يُعيد الشكل إلى وضعه الأصلي؛ أي أن الصورة الناتجة عن دوران بزاوية $360°$ هي الشكل الأصلي نفسه.

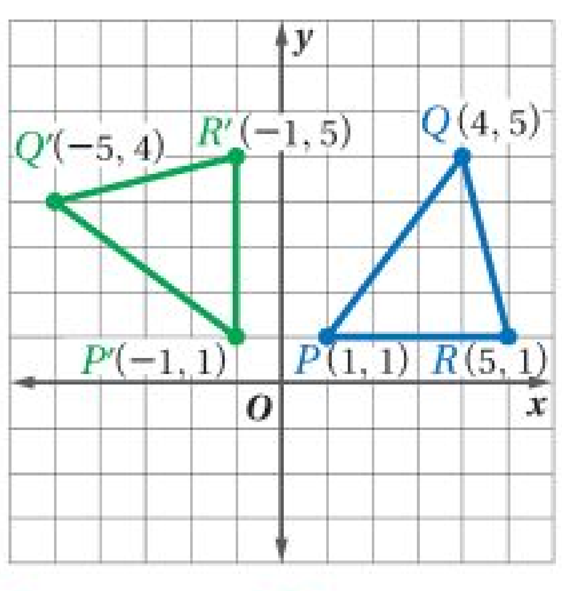
مثال 2 الدوران في المستوى الإحداثي

إحداثيات رؤوس المثلث PQR هي: $P(1, 1), Q(4, 5), R(5, 1)$، مثّل بيانيًّا $\triangle PQR$ وصورته الناتجة عن دوران بزاوية $90°$ حول نقطة الأصل.

اضرب الإحداثي y لكل رأس في -1 ثم بدّل الإحداثيَّين.

$$(x, y) \to (-y, x)$$
$$P(1, 1) \to P'(-1, 1)$$
$$Q(4, 5) \to Q'(-5, 4)$$
$$R(5, 1) \to R'(-1, 5)$$

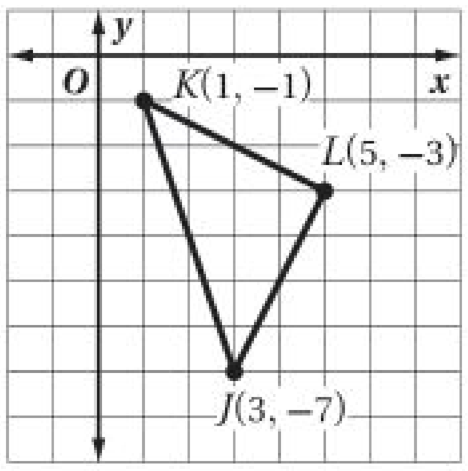
ثم مثّل $\triangle PQR$ وصورته $\triangle P'Q'R'$ في المستوى الإحداثي.



✓ تحقق من فهمك

2) إحداثيات رؤوس متوازي الأضلاع $FGHJ$ هي: $F(2, 1), G(7, 1), H(6, -3), J(1, -3)$.
مثّل بيانيًّا $FGHJ$ وصورته الناتجة عن دوران بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل.

مثال 3 من اختبار



ما صورة النقطة J الناتجة عن دوران $\triangle JKL$ بزاوية $270°$ حول نقطة الأصل؟

A $(-3, -7)$

B $(-7, 3)$

C $(-7, -3)$

D $(7, -3)$

اقرأ سؤال الاختبار

لقد أعطيت $\triangle JKL$ الذي إحداثيات رؤوسه: $J(3, -7), K(1, -1), L(5, -3)$، وطُلب إليك أن تحدد إحداثيَّي صورة النقطة J الناتجة عن دوران بزاوية $270°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

حُل سؤال الاختبار

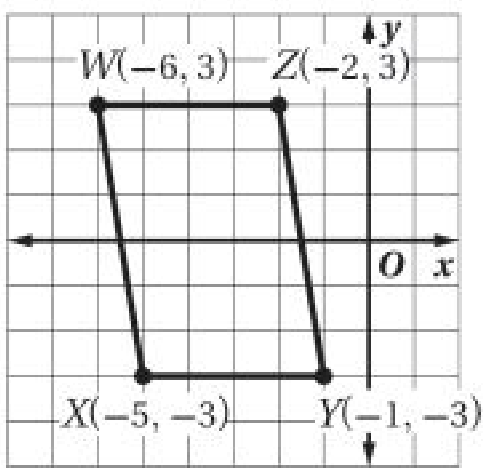
لإيجاد إحداثيَّي صورة النقطة J الناتجة عن الدوران بزاوية $270°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب الإحداثي x في -1، ثم بدّل الإحداثيَّين x , y

$(x, y) \rightarrow (y, -x)$ $\qquad$ $(3, -7) \rightarrow (-7, -3)$

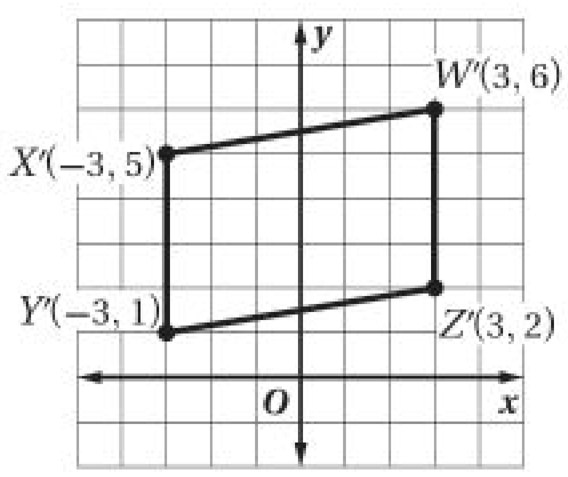
فالإجابة الصحيحة هي C.

تحقق من فهمك

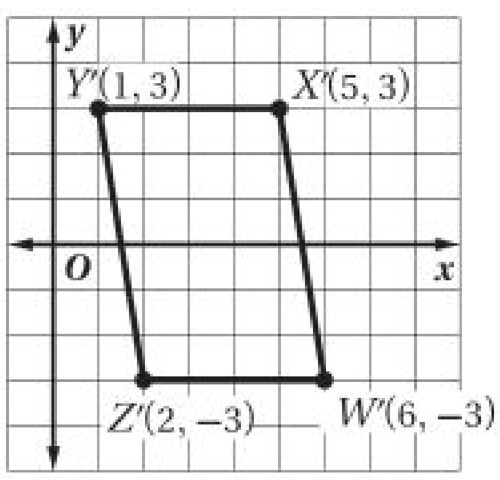
3) تمّ تدوير متوازي الأضلاع $WXYZ$ في الشكل المجاور بزاوية $180°$عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، أيُّ الأشكال الآتية يمثل صورة متوازي الأضلاع الناتجة عن الدوران؟



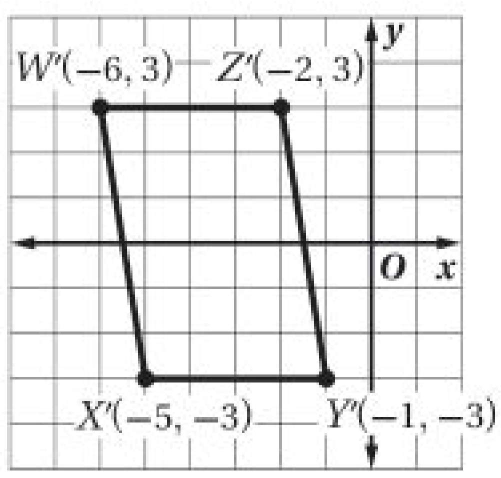
A



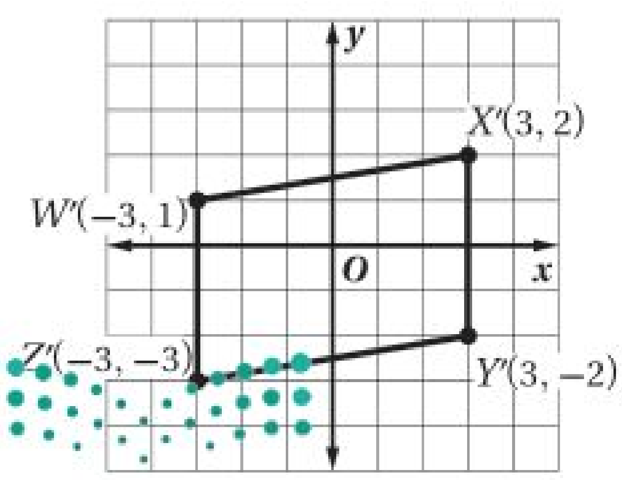
C



B



D



إرشادات للدراسة

الدوران $270°$: يمكن إجراء دوران بزاوية $270°$ بعمل دورانين متعاقبين؛ أحدهما بزاوية $90°$ والآخر بزاوية $180°$، كما يمكن إجراء هذا الدوران أيضًا بعمل دوران بزاوية $90°$ في اتجاه عقارب الساعة.

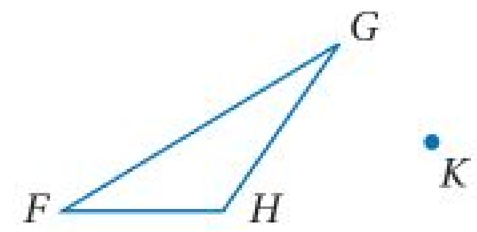
إرشادات للاختبار

حل مسألة أبسط: يمكنك أن تتحقق من صورة رأس واحد فقط مثل النقطة X هنا، بدلًا من التحقق من صور رؤوس متوازي الأضلاع $WXYZ$ الأربعة كلها، فإذا كانت صحيحة فأكمل للرؤوس الباقية، وإلا فانتقل إلى شكل آخر.

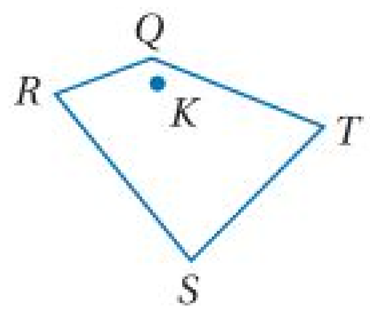
تأكد

المثال 1 **استعمل منقلةً ومسطرةً؛ لرسم صورة الشكل الناتجة عن الدوران حول النقطة K بالزاوية المحددة في كلٍّ من السؤالين الآتيين:**

1) $45°$



2) $240°$

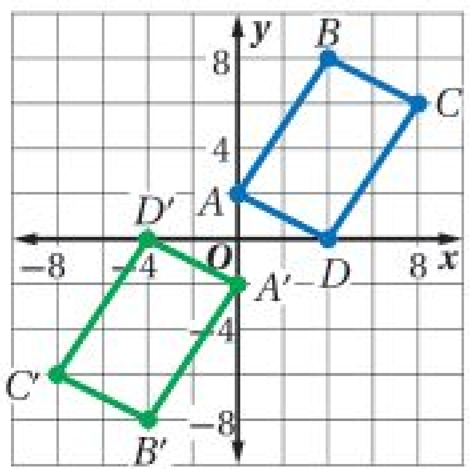


المثال 2 **3)** إحداثيات رؤوس المثلث DFG هي: $D(-2, 6)$, $F(2, 8)$, $G(2, 3)$، مثّل بيانيًّا $\triangle DFG$ وصورته الناتجة عن دوران بزاوية $270°$ حول نقطة الأصل .

المثال 3 **4)** **اختيار من متعدد:** الشكل المجاور يبيّن الشكل الرباعي $ABCD$ وصورته $A'B'C'D'$ الناتجة عن دوران حول نقطة الأصل.
ما قياس زاوية الدوران؟

A $90°$　　**C** $270°$

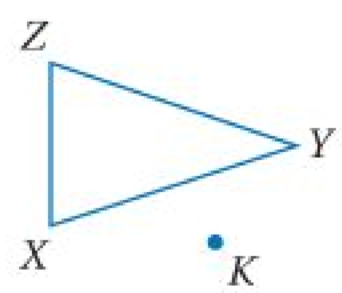
B $180°$　　**D** $360°$



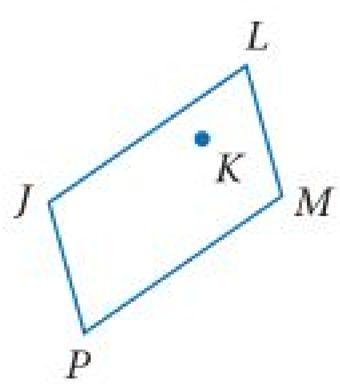
تدرب وحل المسائل

المثال 1 **استعمل منقلةً ومسطرةً؛ لرسم صورة الشكل الناتجة عن الدوران حول النقطة K بالزاوية المحددة في كلٍّ ممَّا يأتي:**

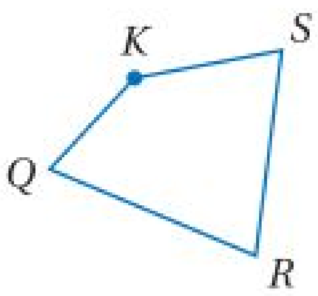
5) $90°$



6) $145°$



7) $260°$



المثالان 2, 3 **مثّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الدوران حول نقطة الأصل بالزاوية المحددة في كلٍّ ممَّا يأتي:**

8) المعين $WXYZ$ الذي إحداثيات رؤوسه: $W(-3, 4), X(0, 7), Y(3, 4), Z(0, 1)$. $90°$

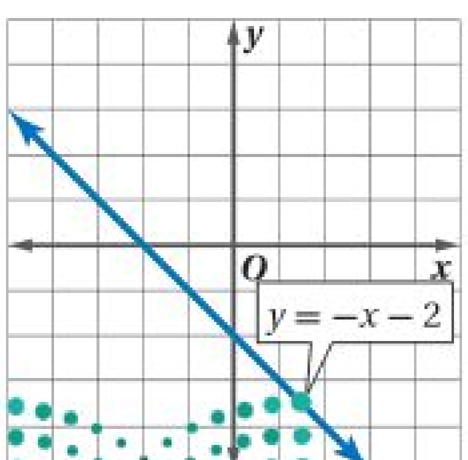
9) $\triangle FGH$ الذي إحداثيات رؤوسه: $F(2, 4), G(5, 6), H(7, 2)$. $180°$

10) متوازي الأضلاع $MPQV$ الذي إحداثيات رؤوسه: $M(-6, 3), P(-2, 3), Q(-3, -2), V(-7, -2)$. $270°$

جبر: **أوجد معادلة صورة المستقيم $y = -x - 2$ الناتجة عن دوران حول نقطة الأصل بالزاوية المحددة في كلٍّ من الأسئلة الآتية، ثم صِفِ العلاقة بين المستقيم الأصلي وصورته.**

11) $90°$　　**12)** $180°$

13) $270°$　　**14)** $360°$



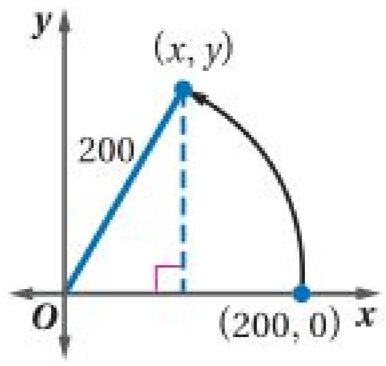
جبر: أوجد معادلة صورة المستقيم الناتجة عن دورانه بالزاوية المحددة حول نقطة تقاطعه مع المحور x وحول نقطة تقاطعه مع المحور y في كلٍّ ممَّا يأتي:

15) $y = x - 5$ ، $90°$

16) $y = 2x + 4$ ، $180°$

17) $y = 3x - 2$ ، $270°$

18) **سباق الدراجات:** يشارك سليمان وعبد الله في سباق دراجات على مسار دائري الشكل نصف قطره 200 ft



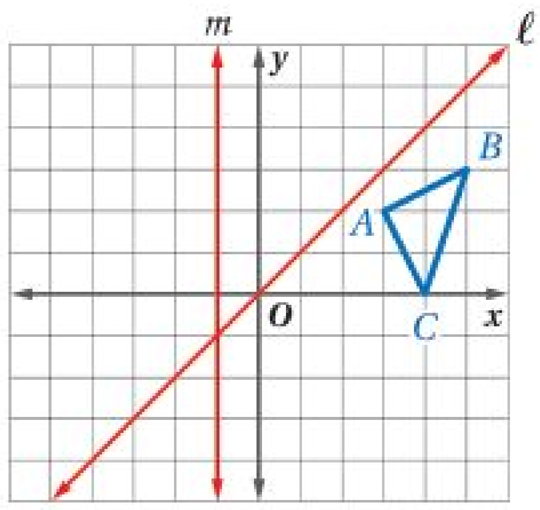
a) إذا بدأ السباق من النقطة (200, 0) وأتمَّ الاثنان دورة واحدة في 30 ثانيةً، فما إحداثيات موقعهما بعد 5 ثوانٍ؟

b) افترض أن السباق يتكون من 50 دورةً، وأن سليمان استمر بالسرعة نفسها. إذا أنهى عبد الله مسافة السباق في 26.2 دقيقةً، فمن الفائز؟

الربط مع الحياة

تتحمل إطارات الدراجات ما يصل إلى 400 مرّة من وزنها، ولا تتحطم إلا تحت حمل يعادل 700 مرّة من وزنها.

19) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستستقصي الانعكاس حول مستقيمين متقاطعين.



a) **هندسيًّا:** في المستوى الإحداثي المجاور، رسم $\triangle ABC$ والمستقيمان المتقاطعان ℓ, m.
ارسم صورة $\triangle ABC$ الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم ℓ. وسمّها $\triangle A'B'C'$، ثم ارسم صورة $\triangle A'B'C'$ الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم m. وسمّها $\triangle A''B''C''$.

b) **هندسيًّا:** كرِّر العملية السابقة مرتين في رُبعين مختلفين، سمّ المثلث الثاني DEF، وارسم صورته الناتجة عن الانعكاس حول المستقيمين المتقاطعين n, p. وسمّ المثلث الثالث MNP، وارسم صورته الناتجة عن الانعكاس حول المستقيمين المتقاطعين q, r.

c) **جدوليًّا:** قِسْ زاوية الدوران لكل مثلثٍ حول نقطة تقاطع المستقيمين، وانسخ الجدول الآتي وأكمله.

قياس الزاوية بين المستقيمين المتقاطعين		قياس زاوية الدوران بين الشكلين	
ℓ, m		$\triangle ABC, \triangle A''B''C''$	
n, p		$\triangle DEF, \triangle D''E''F''$	
q, r		$\triangle MNP, \triangle M''N''P''$	

d) **لفظيًّا:** اكتب تخمينًا حول قياس زاوية الدوران الذي تحصل عليه عند إجراء انعكاسين متعاقبين للشكل حول مستقيمين متقاطعين.

إرشادات للدراسة

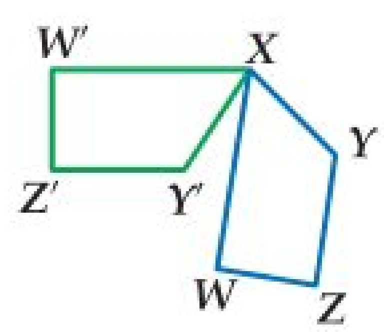
علاقة الدوران بالانعكاس: إن إجراء انعكاسين متعاقبين حول مستقمين متقاطعين يمثل دورانًا حول نقطة تقاطع المستقيمين.

مسائل مهارات التفكير العليا

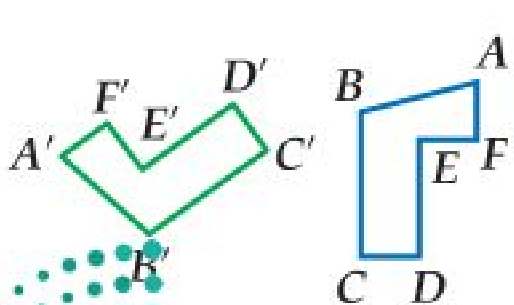
20) **تحدٍّ:** إحداثيًّا النقطة C هما $C(5, 5)$، وإحداثيًّا صورتها الناتجة عن دوران بزاوية $100°$ حول نقطة معينة هما $C'(-5, 7.5)$، أوجد إحداثيَّي مركز الدوران. وضّح إجابتك.

يظهر في كلٍّ من السؤالين الآتيين الشكل الأصلي وصورته الناتجة عن دوران حول النقطة P، انسخ في دفترك كلًّا من الشكلين وحدِّد موقع النقطة P، ثم أوجد قياس زاوية الدوران.

21)



22)



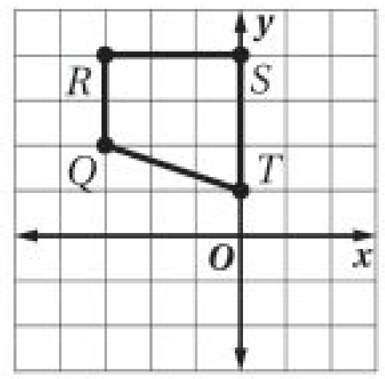
23) **مسألة مفتوحة:** ارسم شكلًا في المستوى الإحداثي، وصف دورانًا زاويته لا تساوي الصفر، وتنطبق فيه الصورة والشكل الأصلي أحدهما على الآخر.

24) **تبرير:** هل يكافئ انعكاس شكل حول المحور x دورانًا حول نقطة الأصل للشكل نفسه بزاوية $180°$ ؟ وضِّح إجابتك.

25) **اكتب:** هل تبقى نقاط ثابتة في الدوران دائمًا أو أحيانًا أو لا تبقى أي نقاطٍ ثابتةٍ أبدًا؟

تدريب على اختبار

26) ما الدوران الذي يُجرى على شبه المنحرف $QRST$ لينقل الرأس R إلى $R'(4, 3)$؟



A $270°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول النقطة T.

B $185°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول النقطة T.

C $180°$ في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

D $90°$ في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

27) يرتكز سُلَّم طوله 18 ft على حائط رأسي وأرض أفقية، إذا كان أسفل السلم يبعد 8 ft عن الحائط، فما ارتفاع رأس السلم عن الأرض مقربًا إلى أقرب عُشر قدمٍ؟

A 10.0 ft

B 16.1 ft

C 19.7 ft

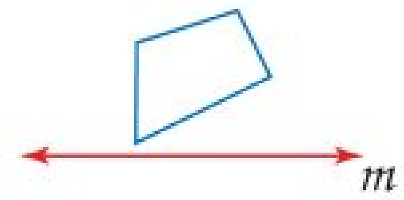
D 26.0 ft

مراجعة تراكمية

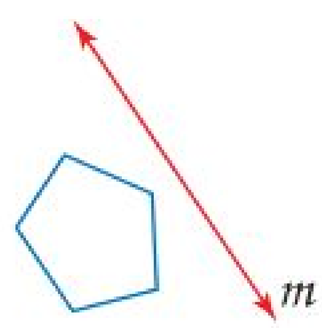
28) **براكين:** تحركت سُحُب من الغبار والغازات المنبعثة من بركان مسافة 64 km غربًا و48 km شمالًا.
ارسم شكلًا يوضح الإزاحة التي وقعت على حُبيبات الغبار، ثم أوجد طول أقصر مسار ينقل الغبار إلى الموقع نفسه. (مهارة سابقة)

ارسم صورة المضلع الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم m في كلٍّ ممَّا يأتي: (مهارة سابقة)

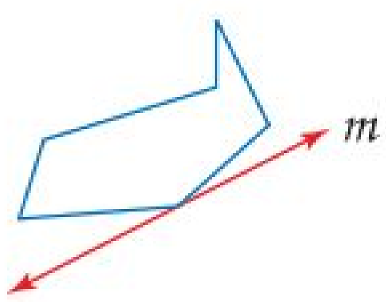
29)



30)



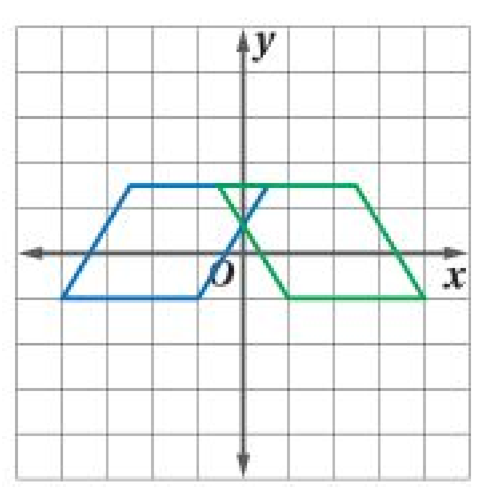
31)



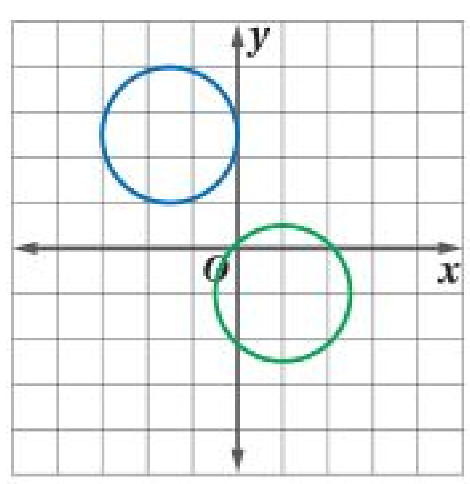
استعد للدرس اللاحق

صنِّف التحويل المبيَّن في كلٍّ من الأشكال الآتية إلى انعكاس أو إزاحة أو دوران.

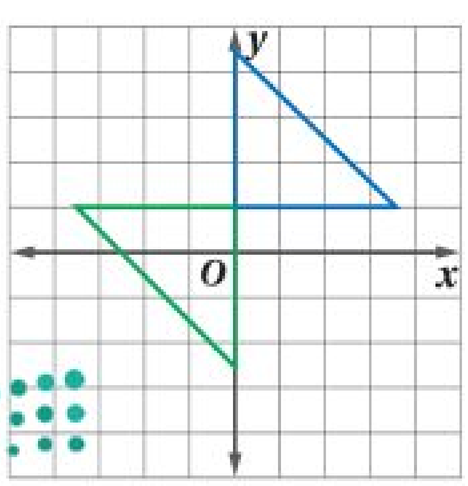
32)



33)



34)



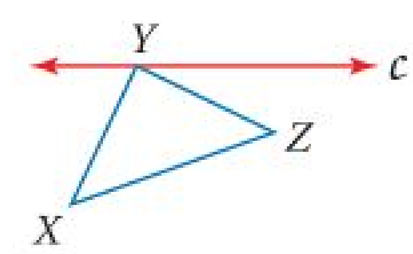
الفصل 7

اختبار منتصف الفصل

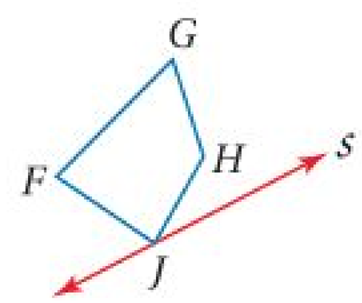
الدروس 1-7 إلى 3-7

ارسم صورة كلٍّ من الشكلين الآتيين بالانعكاس حول المستقيم المعطى. (الدرس 1-7)

1)



2)

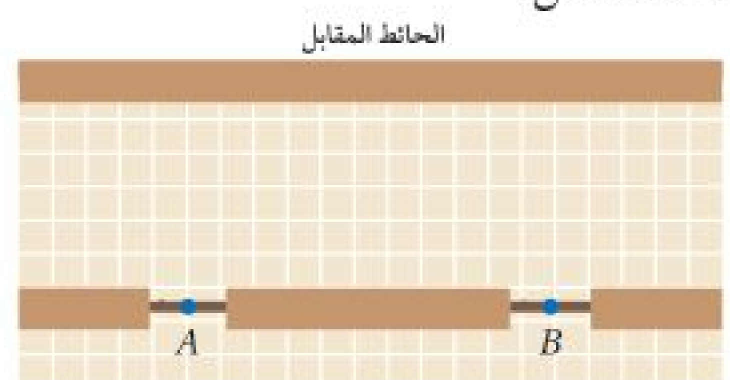


مثل كلًّا من الشكلين الآتيين بيانيًّا، ثم ارسم صورة كلٍّ منهما بالانعكاس المحدد: (الدرس 1-7)

3) $\triangle FGH$ الذي إحداثيات رؤوسه: $F(-4, 3), G(-2, 0), H(-1, 4)$، بالانعكاس حول المحور y.

4) المعين $QRST$ الذي إحداثيات رؤوسه: $Q(2, 1), R(4, 3), S(6, 1), T(4, -1)$، بالانعكاس حول المحور x.

5) **احتفالات:** وضع المشرفون على احتفال المدرسة طاولة قرب الحائط المقابل للمدخلين A, B لقاعة الاحتفال؛ لتقديم بعض الحلوى للحضور بعد نهاية الاحتفال. حدّد موقع النقطة P التي تمثل موقع الطاولة، بحيث يسير الأشخاص الذين يعبرون من المدخل A أو المدخل B المسافة نفسها حتى يصلوا إلى الطاولة مستخدمًا الانعكاس. (الدرس 1-7)



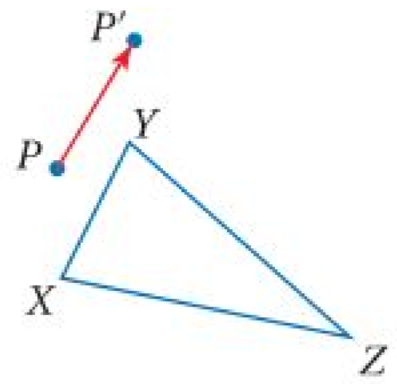
مثّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المحدّدة في كلٍّ من السؤالين الآتيين: (الدرس 2-7)

6) $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(0, 0), B(2, 1), C(1, -3)$، إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليمين ووحدة واحدة إلى أسفل.

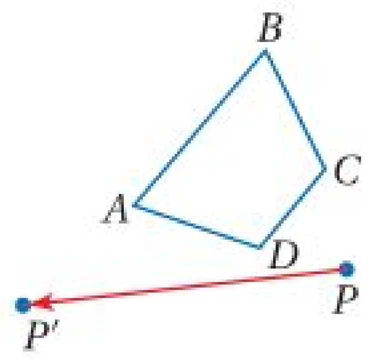
7) المستطيل $JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه: $J(-4, 2), K(-4, -2), L(-1, -2), M(-1, 2)$، إزاحة مقدارها 5 وحدات إلى اليمين و3 وحدات إلى أسفل.

ارسم صورة الشكل الناتجة عن الإزاحة التي تنقل النقطة P إلى P' في كلٍّ من السؤالين الآتيين. (الدرس 2-7)

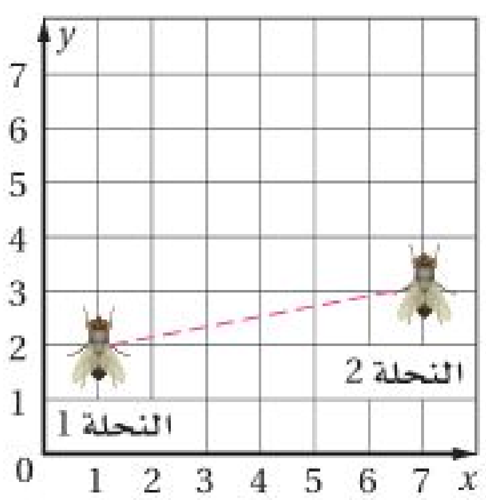
8)



9)

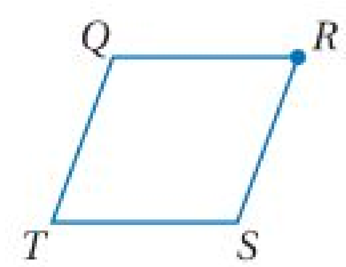


10) **قصص مصورة:** يكتب سامي قصة مصورة وهو يستعمل ورق الرسم البياني؛ ليتأكد من أن قياسات الأشكال التي يرسمها دقيقة. إذا رسم مستوى إحداثيًّا ونحلتين كما في الشكل المجاور، فما الإزاحة التي تنقل النحلة 1 إلى موقع النحلة 2؟ (الدرس 2-7)

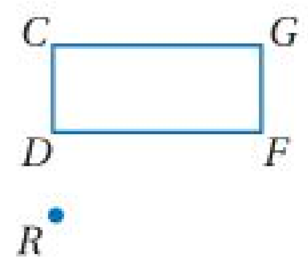


استعمل منقلةً ومسطرةً؛ لرسم صورة الشكل الناتجة عن الدوران حول النقطة R بالزاوية المحدّدة في كلٍّ من السؤالين الآتيين: (الدرس 3-7)

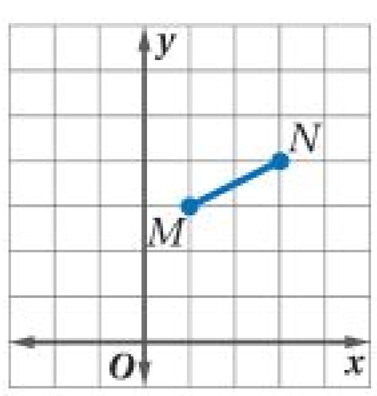
11) $45°$



12) $60°$



13) **اختيار من متعدد:** ما صورة النقطة M الناتجة عن الدوران بزاوية $90°$ حول نقطة الأصل؟ (الدرس 3-7)



A $(-3, 1)$ **C** $(-1, -3)$

B $(-3, -1)$ **D** $(3, 1)$

مثّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الدوران حول نقطة الأصل بالزاوية المحدّدة في كلٍّ من السؤالين الآتيين: (الدرس 3-7)

14) $\triangle RST$ الذي إحداثيات رؤوسه: $R(-3, 0), S(-1, -4), T(0, -1)$، وزاوية دورانه $90°$

15) المربع $JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه: $J(-1, 2), K(-1, -2), L(3, -2), M(3, 2)$ وزاوية دورانه $180°$

استكشاف

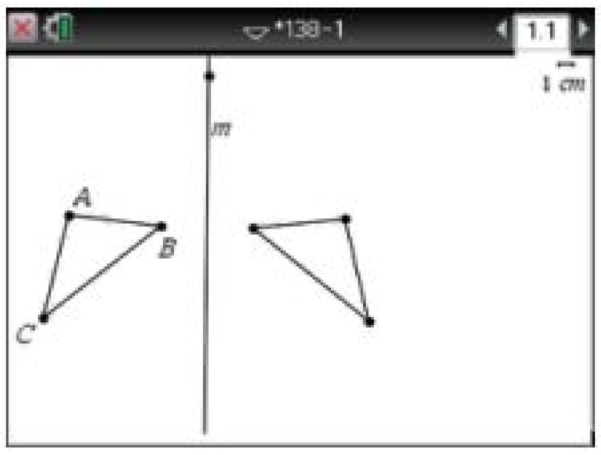
7-4 معمل الحاسبة البيانية: تركيب التحويلات الهندسية Composition of Transformations

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

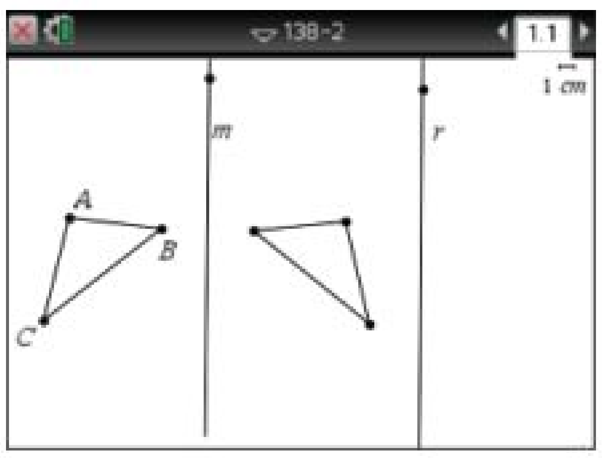
ستستعمل الحاسبة البيانية TI–nspire في هذا المعمل؛ لاستكشاف أثر إجراء عدة تحويلاتٍ هندسيةٍ على شكلٍ هندسيٍّ.

نشاط انعكاس شكل حول محورين رأسيين



الخطوة 1: ارسم مثلثًا وسمِّه.

- افتح الآلة بالضغط على on ، ثم ارسم مثلثًا بالضغط على مفتاح: menu ، ثم اختار 5: الأشكال الهندسية ومنها 2: مثلث ، ثم الضغط على ثلاث مواقع لاختيار نقاط المثلث، قم بتحديد ثلاث نقاط يظهر المثلث، ثم اضغط esc
- سمّ المثلث ABC، وذلك بوضع المؤشر عند كل نقطة رأس، ثم الضغط على menu ctrl ، ثم اختار 2: التسمية ، وكتابة اسم النقطة بالضغط على shift ثم الحرف؛ لجعل الحروف كبيرة، والضغط على enter بعد كل تسمية.

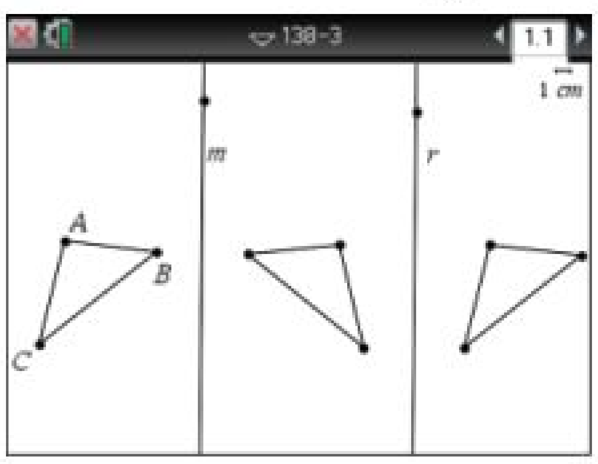


الخطوة 2: ارسم مستقيمًا عن يمين $\triangle ABC$ وسمِّه.

- ارسم مستقيمًا بالضغط على المفاتيح menu . ثم اختيار 4: النقاط والمستقيمات ومنها 4: مستقيم ثم ارسم المستقيم بتحديد نقطة عن يمين $\triangle ABC$، ثم الضغط على enter ثم esc .
- سمّ المستقيم m بالضغط على المستقيم، ثم على المفاتيح menu ctrl ، ثم اختيار 2: التسمية وسمّه m واضغط enter .

الخطوة 3: ارسم انعكاسًا لـ $\triangle ABC$ حول المستقيم m .

- ارسم انعكاس $\triangle ABC$ حول المستقيم m بالضغط على مفتاح menu ، ثم اختار 8: التحويل الهندسي ومنها 2: الانعكاس ، ثم الضغط على المستقيم والمثلث ليظهر الانعكاس.



الخطوة 4: ارسم مستقيمًا موازيًا لـ m .

- ارسم مستقيمًا عن يمين المثلث الناتج بحيث يكون موازيًا لـ m وسمِّه r بالضغط على مفتاح menu ثم اختار 7: الإنشاء الهندسي ومنها 2: مستقيم موازي .
- اضغط على المستقيم m والنقطة المطلوب رسم r عندها عن يمين المثلث الناتج من الخطوة 3

الخطوة 5: كرّر العملية التي نفذتها في الخطوة 3؛ لرسم صورة الشكل الجديد بالانعكاس حول المستقيم r.

تحليل النتائج:

1) ما العلاقة بين الشكل الأصلي والشكل النهائي؟
2) ما التحويل الهندسي الذي يمكن استعماله للحصول على الشكل النهائي؟
3) ماذا يحدث إذا حركت المستقيم m؟ وماذا يحدث إذا حركت المستقيم r؟
4) **خمِّن:** إذا أُجرِي انعكاس لهذا الشكل حول مستقيمٍ ثالثٍ، فما التحويل الهندسي الواحد الذي يمكن أن يستعمل للحصول على الشكل النهائي؟ وضّح إجابتك.
5) كرّر هذا النشاط مع مستقيمين متعامدين. ما التحويل الهندسي الذي يمكن أن يُستعمل للحصول على الشكل النهائي؟
6) **خمِّن:** إذا أجريت انعكاسًا للشكل الناتج في السؤال 5 حول مستقيمٍ ثالثٍ يعامد المستقيم الثاني، فما التحويل الهندسي الواحد الذي يمكن أن يستعمل لإنتاج الشكل النهائي؟ وضّح إجابتك.

7-4 تركيب التحويلات الهندسية
Composition of Transformations

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ رسم صورة شكل هندسي ناتجة عن الانعكاس والانسحاب والدوران.

(الدروس 7-3 ,7-2 ,7-1)

والآن:

- أرسم صورة شكل هندسي ناتجة عن تركيب تحويلين هندسيين أحدهما هو الانعكاس.
- أرسم صورة شكل هندسي ناتجة عن تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين وحول مستقيمين متقاطعين .

المفردات:

التحويل الهندسي المركب
composite transformation

تركيب إزاحة انعكاس
glide reflection

لماذا؟

يوضح نمط آثار الأقدام على رمال الشاطئ في الصورة المجاورة إجراء تحويلين هندسيين مختلفين هما الإزاحة والانعكاس.

عند إجراء تحويل هندسي على شكل ما، ثم إجراء تحويل هندسي آخر على صورته، فإن التحويل الهندسي الذي ينقل الشكل الأصلي إلى الصورة النهائية هو تركيب لتحويلين هندسيين، ويُسمى **تحويلًا هندسيًّا مركبًا**. وأحد أنواع التحويلات الهندسية المركبة هو التحويل الهندسي الناتج عن تركيب إزاحة وانعكاس.

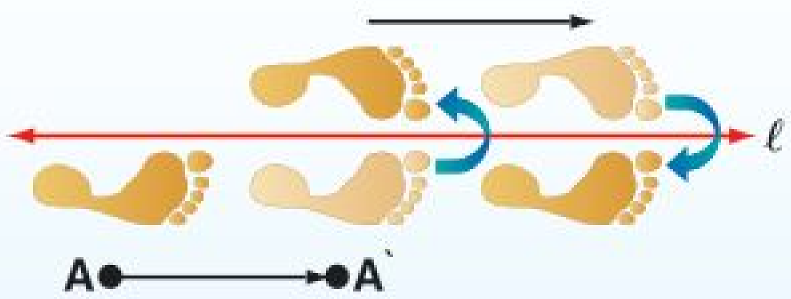
مفهوم أساسي — تركيب إزاحة انعكاس

أضف إلى مطويتك

تركيب إزاحة انعكاس هو تحويل هندسي مركب ينتج عن إزاحة يليها انعكاس في خطٍّ مستقيمٍ موازٍ لخط اتجاه الإزاحة.

مثالٌ:

تركيب إزاحة انعكاس المجاور هو تحويل هندسي مركب ينقل الشكل في اتجاه الإزاحة التي تنقل النقطة A إلى النقطة A′ مع انعكاسٍ حول المستقيم l.



مثال 1 تمثيل تركيب الإزاحة والانعكاس بيانيًّا

إحداثيات رؤوس المثلث JKL هي: $J(6, -1), K(10, -2), L(5, -3)$، مثِّل بيانيًّا $\triangle JKL$ وصورته الناتجة عن إزاحةٍ مقدارها 4 وحداتٍ إلى أعلى ثم انعكاس حول المحور y .

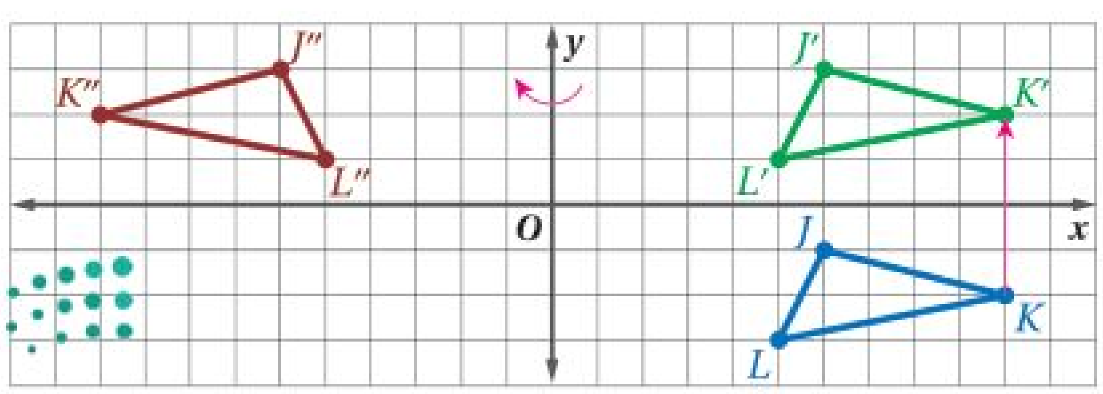
الخطوة 1: الإزاحة 4 وحدات إلى أعلى

(x, y)	$\rightarrow$	$(x, y+4)$
$J(6, -1)$	$\rightarrow$	$J'(6, 3)$
$K(10, -2)$	$\rightarrow$	$K'(10, 2)$
$L(5, -3)$	$\rightarrow$	$L'(5, 1)$

الخطوة 2: الانعكاس حول المحور y

(x, y)	$\rightarrow$	$(-x, y)$
$J'(6, 3)$	$\rightarrow$	$J''(-6, 3)$
$K'(10, 2)$	$\rightarrow$	$K''(-10, 2)$
$L'(5, 1)$	$\rightarrow$	$L''(-5, 1)$

الخطوة 3: مثِّل بيانيًّا $\triangle JKL$ وصورته $\triangle J''K''L''$.



إرشادات للدراسة

تمييز التحويلات الهندسية: يستخدم السهم ⟵ للدلالة على الانسحاب، بينما يستخدم السهم ↶ للدلالة على الانعكاس. أما صورة الصورة فستكون باللون البنيّ.

تحقق من فهمك

إحداثيات رؤوس المثلث PQR هي: $P(1, 1), Q(2, 5), R(4, 2)$ ، مثِّل بيانيًّا $\triangle PQR$ وصورته الناتجة عن التحويل الهندسي المركب المحدّد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

1A) إزاحة مقدارها وحدتين إلى اليسار، ثم انعكاس حول المحور x .

1B) إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى أسفل و3 وحدات إلى اليسار، ثم انعكاس حول المستقيم $y = x$.

في المثال 1 تلاحظ أنّ: $\triangle JKL \cong \triangle J'K'L'$، و كذلك: $\triangle J'K'L' \cong \triangle J''K''L''$ ، وبحسب خاصية التعدي للتطابق فإن: $\triangle JKL \cong \triangle J''K''L''$. وهذا يقود إلى النظرية الآتية:

إرشادات للدراسة

تحويلات التطابق: إنّ الانعكاس والإزاحة والدوران والتحويلات المركبة منها، هي تحويلات تطابقٍ أيضًا.

نظرية 7.1 تركيب تحويلات التطابق

أضف إلى مطويتك

تركيب تحويليَ تطابق (أو أكثر) هو تحويل تطابق أيضًا.

ستبرهن النظرية 7.1 في السؤال 20

لذا فإن الصورة الناتجة عن تركيب أي تحويلين هندسيين من تحويلات التطابق كالإزاحة أو الانعكاس أو الدوران تكون مطابقةً للشكل الأصلي.

قراءة الرياضيات

الشرطتان: تستعمل الشرطتان للدلالة على أن هذا الرأس صورة ناتجة من تحويل هندسي ثان.

مثال 2 تمثيل تركيب تحويليَ تطابق بيانيًا

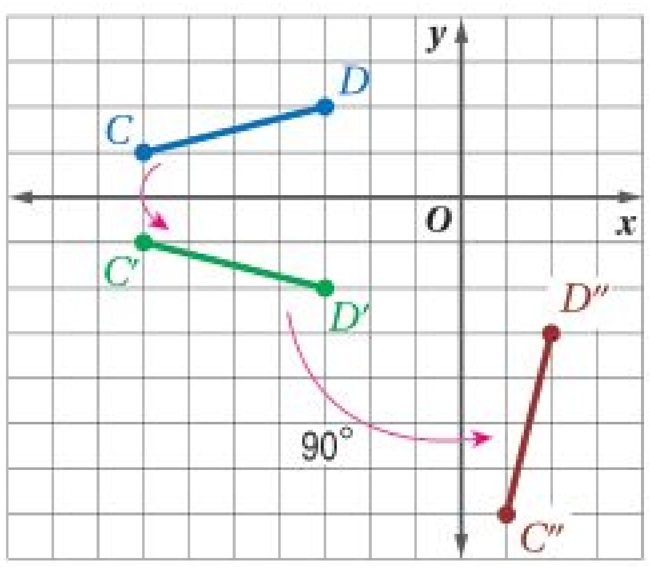
إحداثيات طرفَي $\overline{CD}$ هما $C(-7, 1), D(-3, 2)$، مثِّل بيانيًّا $\overline{CD}$ وصورتها الناتجة عن انعكاس حول المحور x ثم دوران بزاوية $90°$ حول نقطة الأصل.

الخطوة 1: الانعكاس حول المحور x

(x, y)	$\rightarrow$	$(x, -y)$
$C(-7, 1)$	$\rightarrow$	$C'(-7, -1)$
$D(-3, 2)$	$\rightarrow$	$D'(-3, -2)$

الخطوة 2: الدوران حول نقطة الأصل بزاوية $90°$

(x, y)	$\rightarrow$	$(-y, x)$
$C'(-7, -1)$	$\rightarrow$	$C''(1, -7)$
$D'(-3, -2)$	$\rightarrow$	$D''(2, -3)$



الخطوة 3: مثِّل بيانيًّا $\overline{CD}$ وصورتها $\overline{C''D''}$.

تحقق من فهمك

إحداثيات رؤوس المثلث ABC هي: $A(-6, -2), B(-5, -5), C(-2, -1)$ ، مثِّل بيانيًّا $\triangle ABC$ وصورته الناتجة عن تركيب التحويلين الهندسيين بالترتيب المحدّد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

2A) إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليمين ووحدة واحدة إلى أسفل، ثم انعكاس حول المحور y .

2B) دوران بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل، ثم إزاحة مقدارها وحدتين إلى اليسار و4 وحدات إلى أعلى.

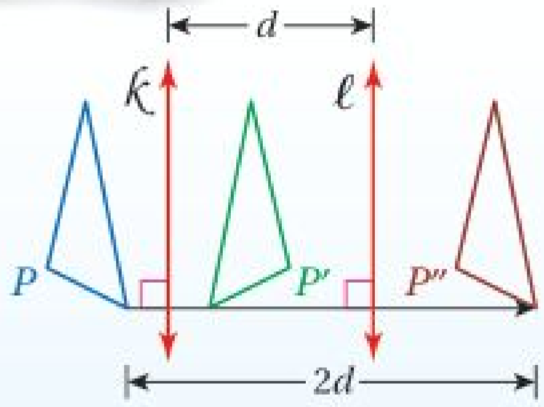
تركيب انعكاسين: إن تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين يكافئ إزاحة.

نظرية 7.2 تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين

أضف إلى مطويتك

يمكن وصف تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين بأنه إزاحة، ويكون:

- اتجاهها عموديًّا على كلٍّ من المستقيمين.
- مقدارها يساوي ضعف المسافة بين المستقيمين المتوازيين.



ستبرهن النظرية 7.2 في السؤال 26

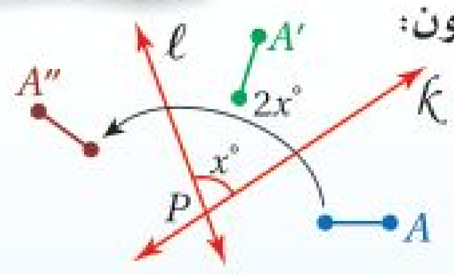
إن تركيب انعكاسين حول مستقيمين متقاطعين يكافئ دورانًا .

نظرية 7.3 تركيب انعكاسين حول مستقيمين متقاطعين

أضف إلى مطويتك

يمكن وصف تركيب انعكاسين حول مستقيمين متقاطعين بأنه دوران، ويكون:

- مركزه هو نقطة تقاطع المستقيمين.
- قياس زاويته يساوي ضعف قياس الزاوية التي يشكّلها تقاطع هذين المستقيمين.



ستبرهن النظرية 7.3 في السؤال 27

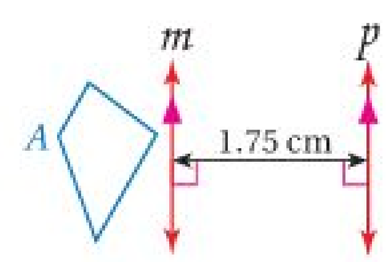
تنبيه !

ترتيب التركيب: احرص على تركيب التحويلين الهندسيين بالترتيب المحدَّد في المسألة.

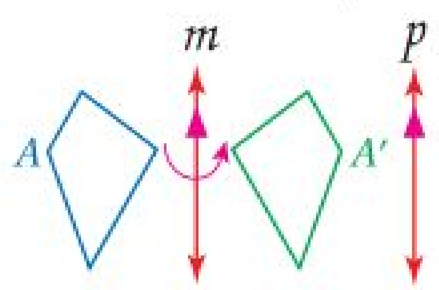
مثال 3 رسم الصورة الناتجة عن انعكاسين حول مستقيمين

ارسم صورة الشكل A الناتجة عن انعكاسٍ حول المستقيم m ثم حول المستقيم p ، ثم صف تحويلًا هندسيًّا واحدًا ينقل A إلى A'' في كلٍّ ممَّا يأتي:

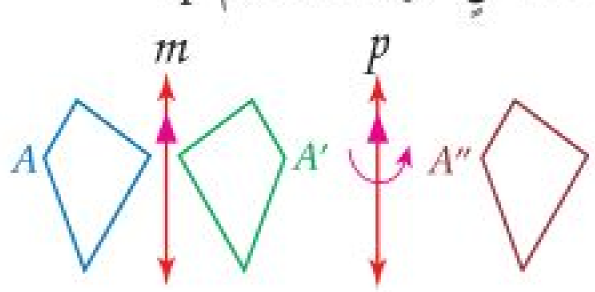
(a



الخطوة 1: ارسم صورة الشكل A الناتجة عن انعكاسٍ حول المستقيم m .

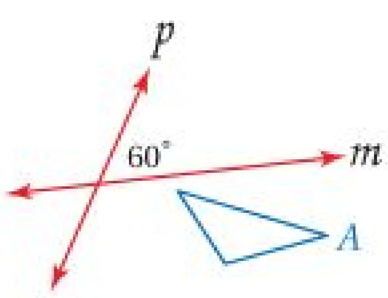


الخطوة 2: ارسم صورة الشكل A' الناتجة عن انعكاسٍ حول المستقيم p .

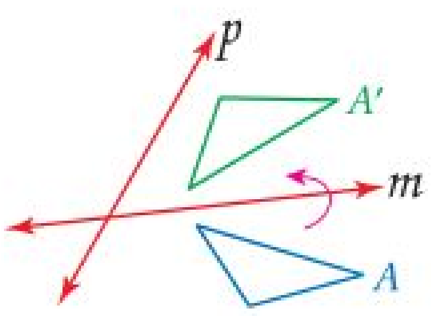


بناءً على النظرية 7.2، فإن تركيب هذين الانعكاسين حول المستقيمين المتوازيين m, p يكافئ إزاحةً أفقيةً إلى اليمين مقدارها $2\times1.75 = 3.5$ cm

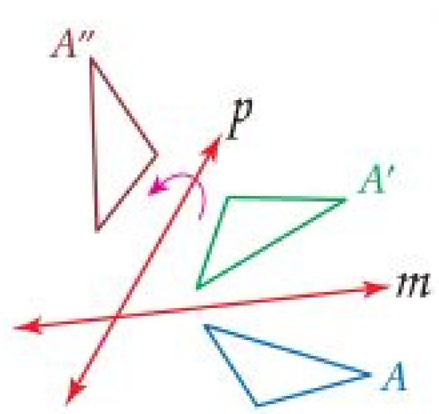
(b



الخطوة 1:



الخطوة 2:



بناءً على النظرية 7.3، فإن تركيب هذين الانعكاسين حول المستقيمين المتقاطعين m, p يكافئ دورانًا بزاوية تساوي $2\times60°$ أي $120°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة تقاطع المستقيمين m, p

تاريخ الرياضيات

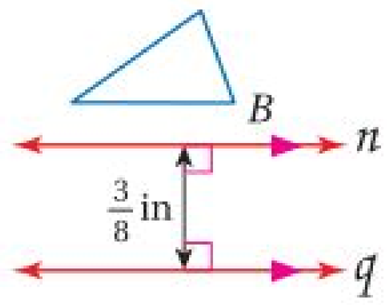
فيلكس كلاين (1849–1925)

هو عالم رياضيات ألماني عرَف الهندسة بأنها دراسة خصائص الفضاء التي تبقى دون تغيير تحت تأثير مجموعةٍ من التحويلات الهندسية.

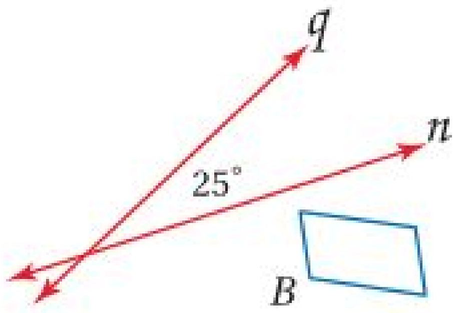
تحقق من فهمك

ارسم صورة الشكل B الناتجة عن انعكاس حول المستقيم n ثم حول المستقيم q، ثم صِفْ تحويلًا هندسيًّا واحدًا ينقل B إلى B'' .

(3A



(3B



الربط مع الحياة

تستعمل تحويلات هندسية مركبة عند تصميم السجاد، لاحظ تكرار الجزء نفسه في إطار السجادة أعلاه.

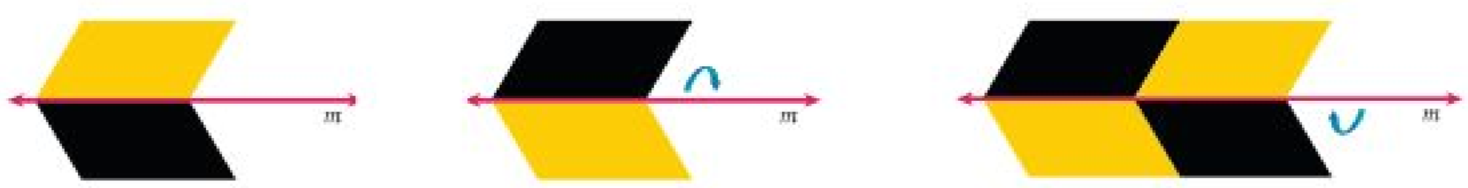
يتم إنشاء كثيرٍ من الأنماط في الحياة الواقعية باستعمال تركيب التحويلات الهندسية.

مثال 4 من واقع الحياة — وصف التحويلات الهندسية

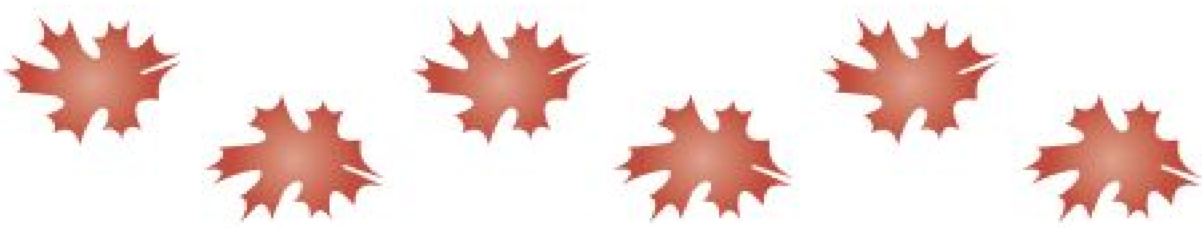
أنماط: صِفْ تحويلًا هندسيًّا مركبًا، يمكن استعماله لتكوين النمط في كلٍّ ممَّا يأتي:

(a

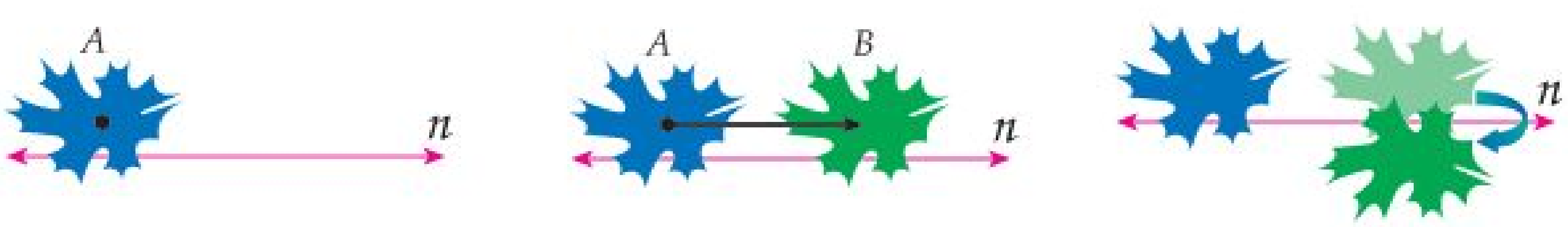
يمكن تكوين هذا النمط بتركيب انعكاس وإزاحة الشكلين المتقابلين (وحدة النمط)، بتركيب انعكاس حول المستقيم m، ثم إزاحة إلى اليمين موازية للمستقيم m كما في الشكل أدناه. لاحظ أن المستقيم m يمرُّ في منتصف الشكل الأصلي (وحدة النمط).



(b



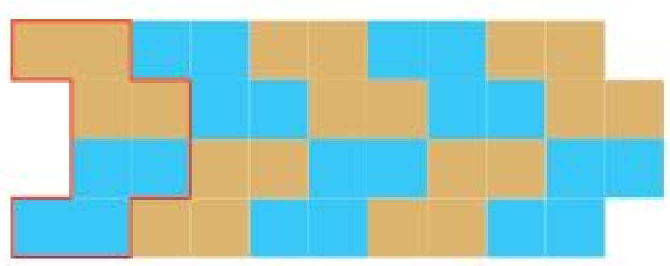
تمَّ تكوين هذا النمط بتركيب إزاحة وانعكاس؛ أي أنه يمكن تكوينه بتركيب إزاحة إلى اليمين موازية للمستقيم n تنقل A إلى B متبوعةً بانعكاسٍ حول المستقيم n كما في الشكل الآتي.



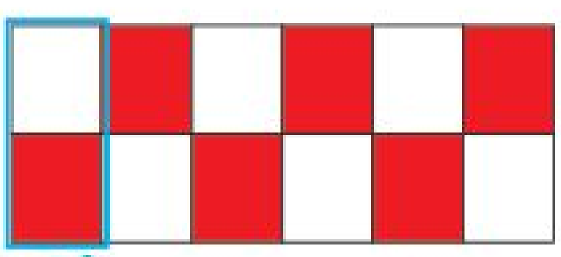
تحقق من فهمك

4) **سجاد:** صِفْ تحويلًا هندسيًّا مركبًا يمكن استعماله لتكوين النمط في كل مِمَّا يأتي:

(A



(B



ملخص المفهوم

أضف إلى مطويتك

تركيب التحويلات الهندسية

الإزاحة	الدوران
تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين .	تركيب انعكاسين حول مستقيمين متقاطعين .

تأكـد

المثال 1 إحداثيات رؤوس المثلث CDE هي: $C(-5, -1), D(-2, -5), E(-1, -1)$، مثِّل بيانيًّا $\triangle CDE$ وصورته الناتجة عن التحويل الهندسي المركّب المحدّد في كلٍّ من السؤالين الآتيين :

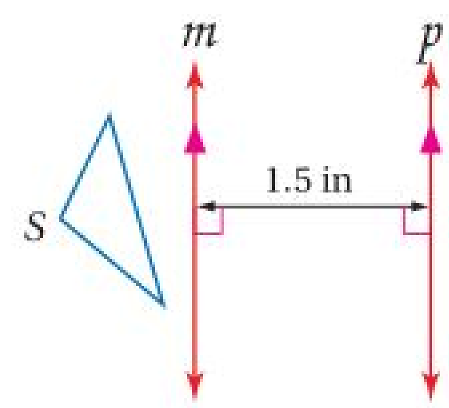
1) إزاحة مقدارها 4 وحدات إلى اليمين، ثم انعكاس حول المحور x

2) إزاحة مقدارها 6 وحدات إلى أعلى، ثم انعكاس حول المحور y

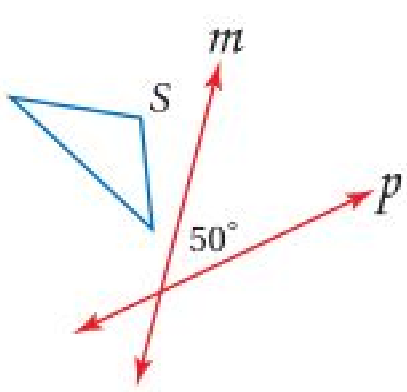
المثال 2 **3)** إحداثيات طرفَي $\overline{JK}$ هما $J(2, 5), K(6, 5)$، مثِّل بيانيًّا $\overline{JK}$ وصورتها الناتجة عن انعكاس حول المحور x، ثم دوران بزاوية $90°$ حول نقطة الأصل.

المثال 3 ارسم صورة الشكل S الناتجة عن انعكاسٍ حول المستقيم m ثم حول المستقيم p، ثم صِفْ تحويلًا هندسيًّا واحدًا ينقل S إلى S''.

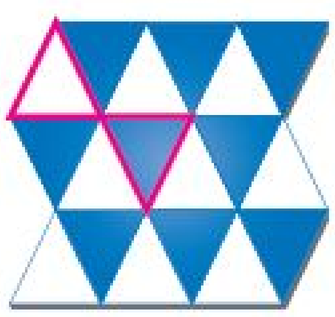
4)



5)



المثال 4 **6)** **أنماط البلاط:** صنع راشدٌ نمطًا من بلاطٍ على شكل مثلث متطابق الضلعين، صِفِ التحويل الهندسي المركّب الذي يمكن استعماله لتكوين هذا النمط.



تدرب وحل المسائل

المثال 1 مثِّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن التحويل المركّب المحدّد في كلٍّ ممّا يأتي:

7) $\triangle RST$ الذي إحداثيات رؤوسه: $R(1, -4), S(6, -4), T(5, -1)$، إزاحة مقدارها وحدتان إلى اليمين ثم انعكاس حول المحور x

8) $\triangle DFG$ الذي إحداثيات رؤوسه: $D(2, 8), F(1, 2), G(4, 6)$، إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليمين و3 وحدات إلى أعلى، ثم انعكاس حول المستقيم $y = x$

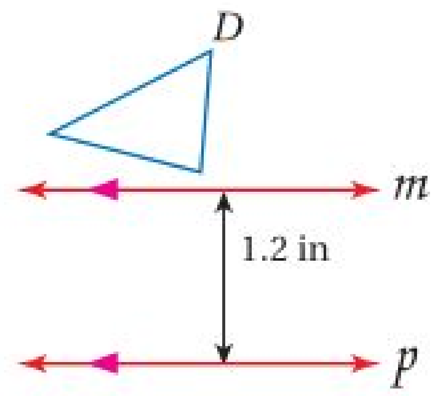
المثال 2 مثِّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن التحويل المركّب المحدّد في كلٍّ ممّا يأتي:

9) $\overline{WX}$ ، حيث $W(-4, 6), X(-4, 1)$، انعكاس حول المحور x ثم دوران بزاوية $90°$ حول نقطة الأصل.

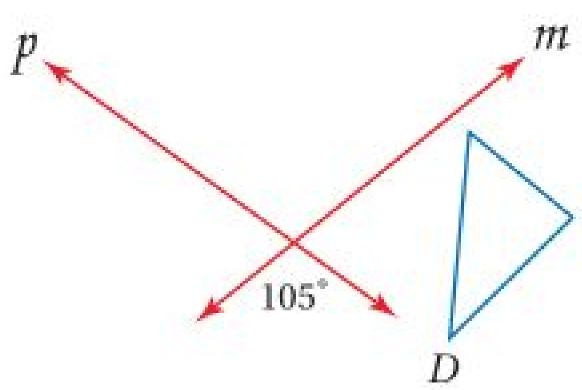
10) $\overline{RS}$ ، حيث $R(2, -1), S(6, -5)$، إزاحة مقدارها وحدتان إلى اليسار ووحدتان إلى أسفل، ثم انعكاس حول المحور y

المثال 3 ارسم صورة الشكل D الناتجة عن انعكاسٍ حول المستقيم m ثم حول المستقيم p. ثم صِفْ تحويلًا هندسيًّا واحدًا ينقل D إلى D''.

(11

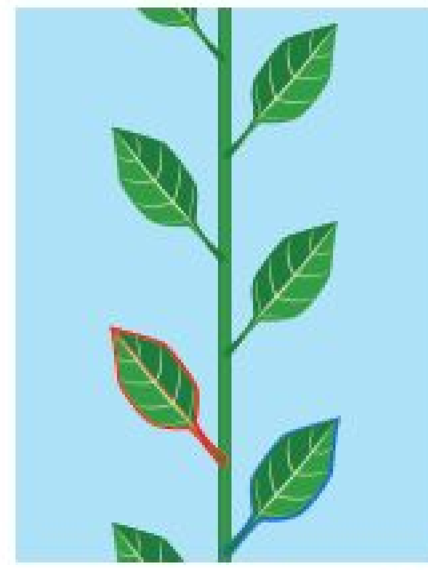


(12

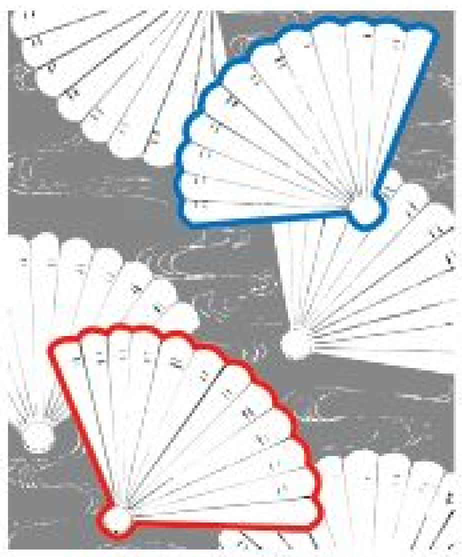


المثال 4 صِفْ تحويلًا هندسيًّا مركبًا يمكن استعماله لتكوين نمط الأقمشة في كلٍّ ممَّا يأتي:

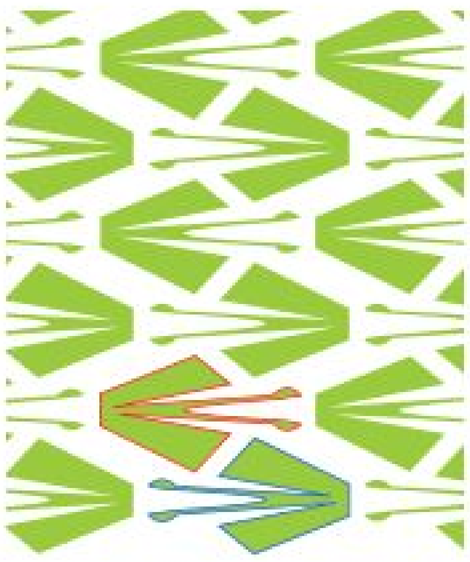
(13



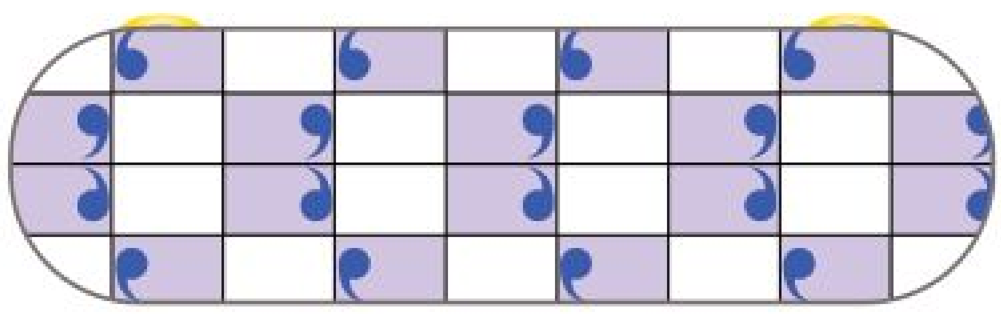
(14



(15

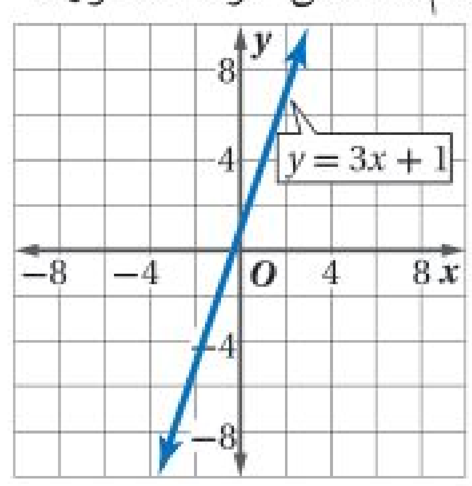


16) **زلَّاجات:** رسم صالح على زلاجته نمطًا، ما التحويل الهندسي المركب الذي استعمله صالح لرسم هذا النمط؟

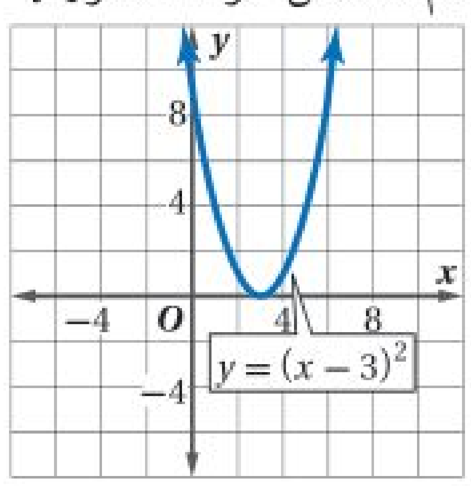


جبر: مثّل بيانيًّا صورة كلٍّ من الشكلين الآتيين الناتجة عن التحويل الهندسي المركّب المحدد:

17) دوران بزاوية 90° حول نقطة الأصل
ثم انعكاس حول المحور x



18) انعكاس حول المحور x
ثم انعكاس حول المحور y

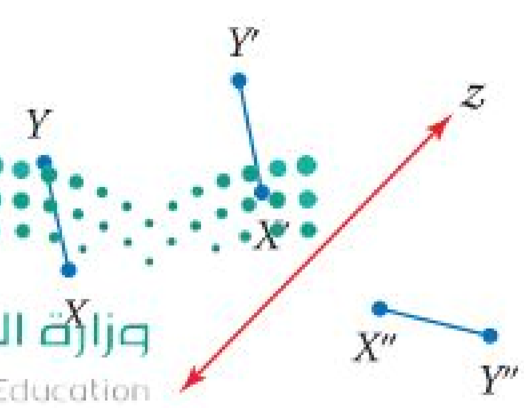


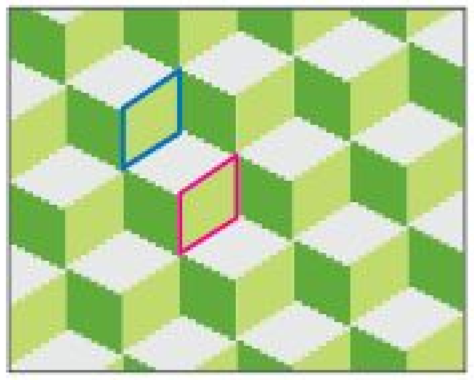
19) أوجد إحداثيات رؤوس $\triangle A''B''C''$ الناتج عن انعكاس حول المحور x ثم دوران بزاوية 180° حول نقطة الأصل للمثلث $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: $A(-3, 1), B(-2, 3), C(-1, 0)$.

20) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للحالة الآتية من نظرية 7.1 (تركيب تحويلات التطابق).

المعطيات: تنقل الإزاحة بمقدار a وحدةً إلى اليمين و b وحدةً إلى أعلى النقطة X إلى X' والنقطة Y إلى Y'.
وينقل الانعكاس حول المستقيم z النقطة X' إلى X'' والنقطة Y' إلى Y''.

المطلوب: $\overline{XY} \cong \overline{X''Y''}$





21) **حياكة:** تحيك خولة منديلًا باستعمال النمط الظاهر في الشكل المجاور، صف تركيب التحويلات الهندسية الذي تستعمله خولة لإنشاء هذا النمط.

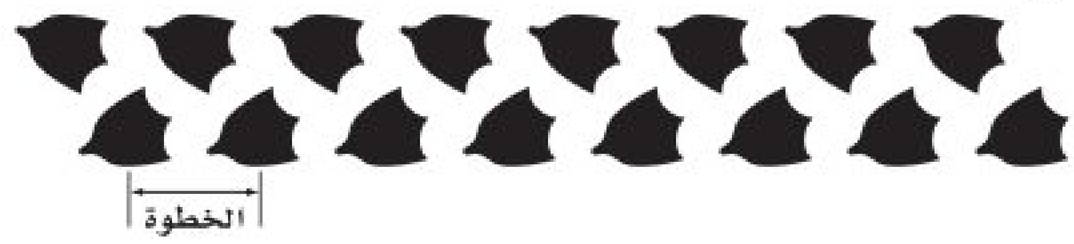
آثار الأقدام: استعن بمعلومات الربط مع الحياة، وصِفِ التحويل المركّب من إزاحة وانعكاس الذي يمكن استعماله للتنبؤ بموقع أثر القدم اللاحق في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

الربط مع الحياة

طول خطوة الحيوان يساوي المسافة بين أثري قدمٍ متتاليين. فمتوسط طول خطوة طائر الحبش 11 in تقريبًا، ومتوسط طول خطوة البطة 5 in تقريبًا.

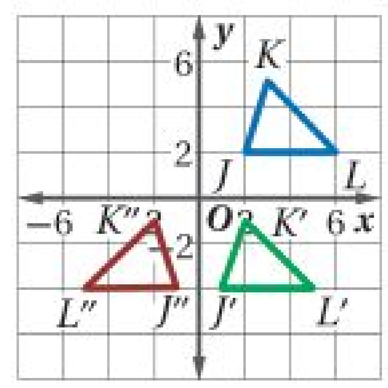
22) طائر الحبش

23) البطة

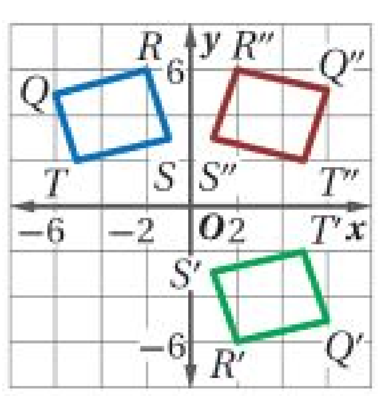


صِفِ التحويل الهندسي المركب الذي ينقل الشكل الأزرق إلى البني في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

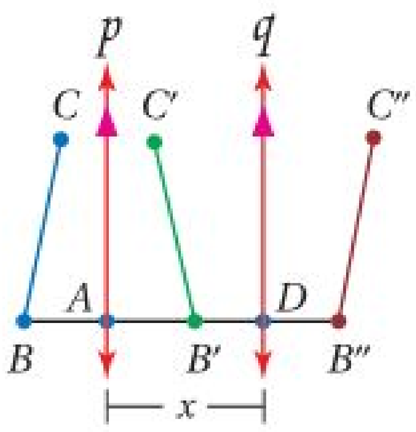
24)



25)



26) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 7.2



المعطيات: ينقل الانعكاس حول المستقيم p القطعة $\overline{BC}$ إلى $\overline{B'C'}$،

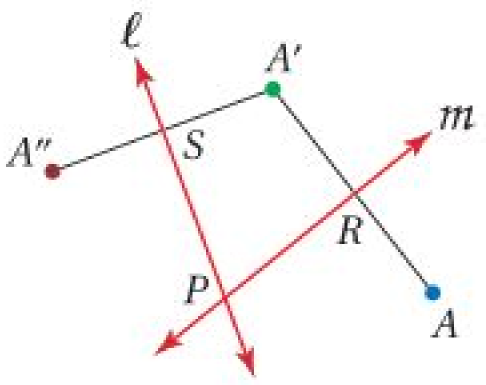
وينقل الانعكاس حول المستقيم q القطعة $\overline{B'C'}$ إلى $\overline{B''C''}$.

$p \parallel q, AD = x$.

المطلوب: a) $\overline{BB''} \perp p$, $\overline{BB''} \perp q$

b) $BB'' = 2x$

27) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 7.3



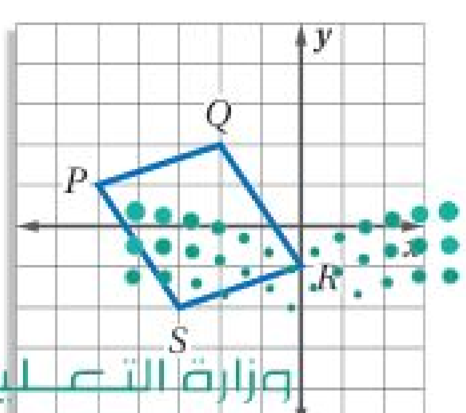
المعطيات: يتقاطع المستقيمان ℓ , m في النقطة P.

A نقطة لا تقع على أيٍّ من المستقيمين ℓ أو m.

المطلوب: a) إذا أُجري انعكاس للنقطة A حول المستقيم m، ثم أُجري انعكاس لصورتها حول المستقيم ℓ، فإن A'' تكون صورة A بدورانٍ حول النقطة P.

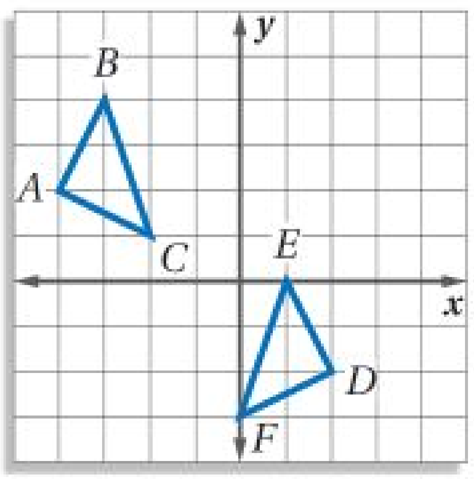
b) $m\angle APA'' = 2(m\angle SPR)$

مسائل مهارات التفكير العليا



28) **تحدٍّ:** إذا أُزيح الشكل $PQRS$ بمقدار 3 وحدات إلى اليمين ووحدتين إلى أسفل، ثم عُكست الصورة حول المستقيم $y = -1$، وبعد ذلك تم تدوير الصورة الجديدة بزاوية $90°$ حول نقطة الأصل، فما إحداثيات رؤوس الشكل الناتج $P'''Q'''R'''S'''$؟

29) **تبرير:** إذا أُجري انعكاسان متعاقبان بشكلٍ ما؛ أحدهما حول المستقيم $y = x$، والآخر حول المحور x، فهل يؤثر ترتيب الانعكاسين في الصورة الناتجة؟ اشرح إجابتك .



30) **مسألة مفتوحة:** صِفْ تحويلًا هندسيًّا مركبًا يمكن استعماله لتحويل $\triangle ABC$ إلى $\triangle DEF$ في الشكل المجاور.

31) **تبرير:** إذا أُخضع شكلٌ ما لدورانين، فهل لترتيب الدورانين تأثير في موقع الصورة الناتجة دائمًا، أو أحيانًا، أو ليس له تأثير أبدًا؟

32) **اكتب:** هل تبقى أي نقاط ثابتةً في التحويلات الهندسية المركبة؟ وضّح إجابتك.

تدريب على اختبار

33) ما صورة النقطة $A(4, 1)$ الناتجة عن انعكاس حول المستقيم $y = x$؟

A $(1, -4)$ **C** $(-1, 4)$

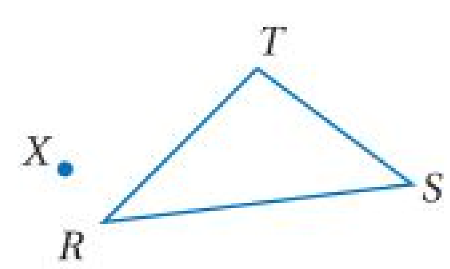
B $(1, 4)$ **D** $(-1, -4)$

34) **إجابة قصيرة:** إحداثيات طرفَي $\overline{CD}$ هما $C(2, 4)$ و $D(8, 7)$، إذا أُزيحت هذه القطعة المستقيمة بمقدار 6 وحدات إلى اليسار ووحدتين إلى أعلى، ثم عكست الصورة حول المحور y، فما إحداثيات D''؟

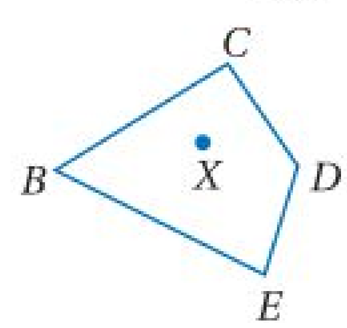
مراجعة تراكمية

استعمل منقلةً ومسطرةً؛ لرسم صورة الشكل الناتجة عن الدوران حول النقطة X بالزاوية المبينة في كلٍّ ممَّا يأتي: (الدرس 3-7)

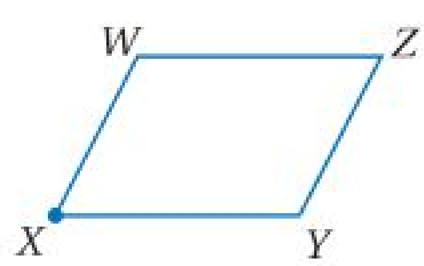
35) $60°$



36) $120°$



37) $180°$



مثِّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المحدّدة في كلٍّ ممَّا يأتي: (الدرس 2-7)

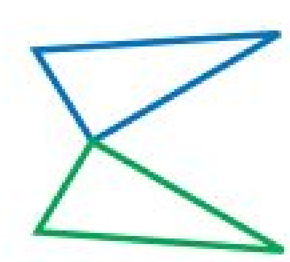
38) $\triangle FGH$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: $F(1, -4), G(3, -1), H(7, -1)$ ؛ إزاحة مقدارها وحدتان إلى اليمين و6 وحدات إلى أعلى.

39) الشكل الرباعي $ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(-2, 7), B(-1, 4), C(2, 3), D(2, 7)$ ؛ إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليسار و5 وحدات إلى أسفل.

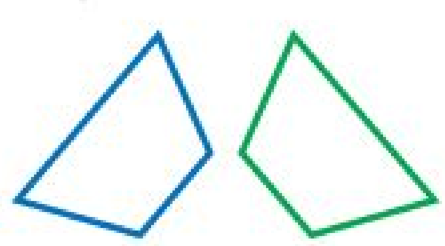
استعد للدرس اللاحق

يبيِّن كل من الأشكال الآتية الأصل والصورة الناتجة عن انعكاسٍ حول مستقيمٍ ما، ارسم محور الانعكاس.

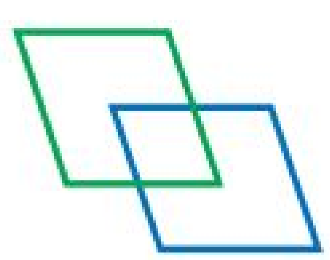
40)



41)



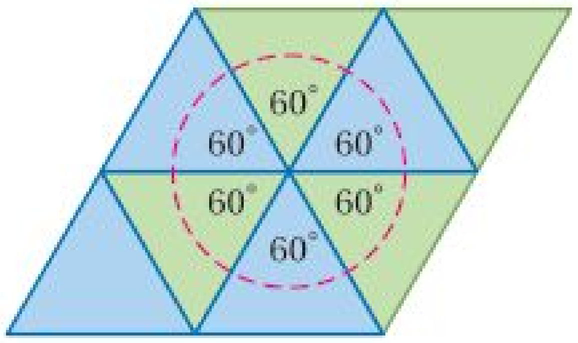
42)



وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

توسع 7-4

معمل الهندسة: التبليط
Tessellation



التبليط نمطٌ يتكون من شكل أو أكثر، يغطّي سطحًا من دون تقاطعات أو فراغات، ويكون مجموع قياسات الزوايا حول كل رأس في التبليط °360

و**التبليط المنتظم** هو التبليط الذي يُستعمل فيه نوع واحد فقط من المضلعات المنتظمة، ويمكن تبليط سطح بمضلع منتظم، إذا كان قياس زاويته الداخلية أحد عوامل العدد 360، ويمكن عمل تبليط باستعمال أكثر من نوع واحد من المضلعات المنتظمة، ويسمى التبليط الذي يتكون من مضلعين منتظمين أو أكثر **تبليطًا شبه منتظم**.

نشاط 1 التبليط المنتظم

حدِّد ما إذا كان استعمال كلٍّ من المضلعين المنتظمين الآتيين لتكوين تبليط في المستوى ممكنًا أم لا، فسِّر إجابتك.

a) مضلع سداسي

افترض أن قياس الزاوية الداخلية للسداسي المنتظم يساوي $x°$

$x = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$ صيغة الزاوية الداخلية للمضلع المنتظم

$= \frac{(n-2) \cdot 180°}{6}$ $n = 6$

$= 120°$ بالتبسيط

وبما أن 120 أحد عوامل 360، فإنه يمكن استعمال المضلع السداسي المنتظم لتبليط المستوى.

b) مضلع عشاري

افترض أن قياس الزاوية الداخلية للعشاري المنتظم يساوي x.

$x = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$ صيغة الزاوية الداخلية للمضلع المنتظم

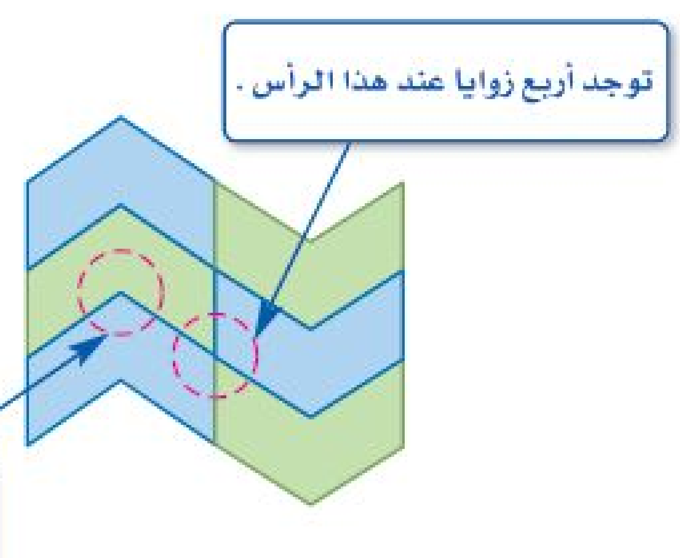
$= \frac{(n-2) \cdot 180°}{10}$ $n = 10$

$= 144$ بالتبسيط

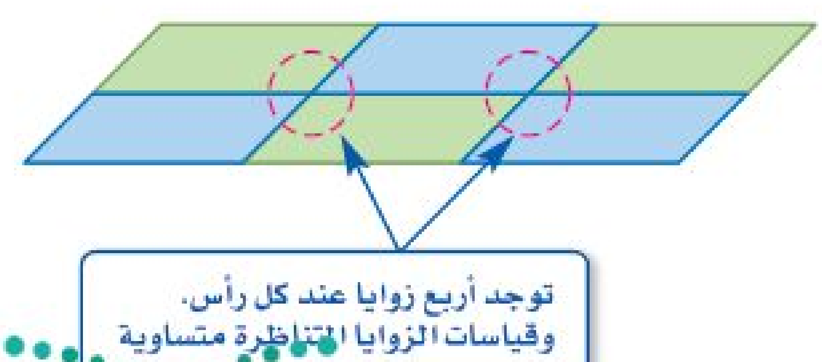
وبما أن 144 ليست من عوامل 360، إذن لا يمكن استعمال العشاري المنتظم لتبليط المستوى.

يقال: إن التبليط **متّسق** إذا احتوى الترتيب نفسه من الأشكال والزوايا عند كل رأس.

غير متسق



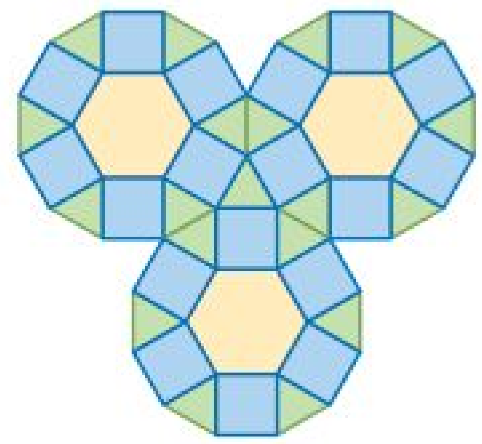
متسق



نشاط 2 تصنيف التبليط

حدّد ما إذا كان كلٌّ من الأنماط الآتية تبليطًا أم لا، وإذا كان كذلك فصنّفه إلى منتظمٍ أو شبه منتظم أو غير منتظمٍ وإلى متسقٍ أو غير متسقٍ.

(a

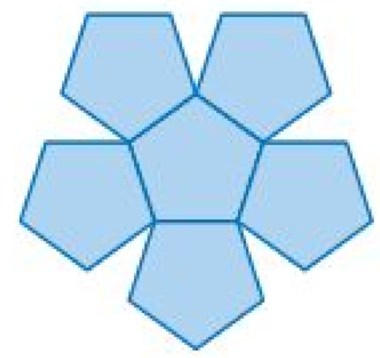


بما أنه لا توجد فراغات في الشكل، وليس هنالك تقاطعات، فإن هذا النمط يشكّل **تبليطًا،**

وهذا التبليط يتكون من أشكال سداسية منتظمة ومربعات ومثلثات متطابقة الأضلاع، إذن هو تبليط **شبه منتظم** .

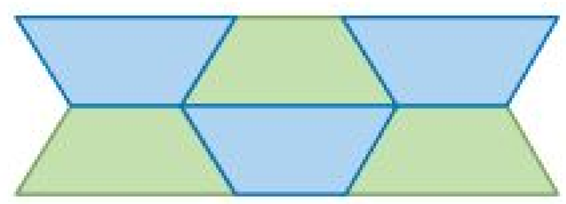
بما أنه عند بعض الرؤوس يوجد 5 زوايا، وعند بعضها 4 زوايا، ، إذن هذا التبليط **غير متسق**.

(b



توجد فراغات في الشكل فهذا النمط **ليس تبليطًا**.

(c



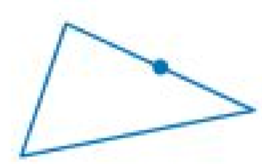
لا توجد فراغات ولا تقاطعات في هذا النمط فهو **تبليط** .
يتكون هذا التبليط من شبه منحرف، وهو مضلع **غير منتظم**؛ لذا فهذا التبليط **غير منتظم**، لكنه **متسق**؛ لأنه يحتوي على ترتيبات الأشكال نفسها والزوايا نفسها عند كل رأسٍ.

يمكن استعمال خصائص التبليط؛ لتصميم وإنشاء أشكال تبليط مختلفة.

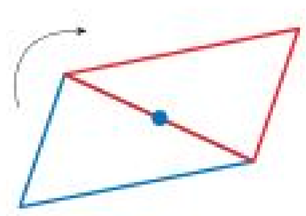
نشاط 3 رسم التبليط

ارسم مثلثًا واستعمله لإنشاء تبليط.

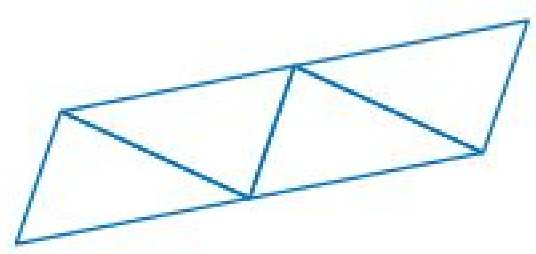
الخطوة 1: ارسم مثلثًا وعيّن نقطةً منتصف أحد أضلاعه.



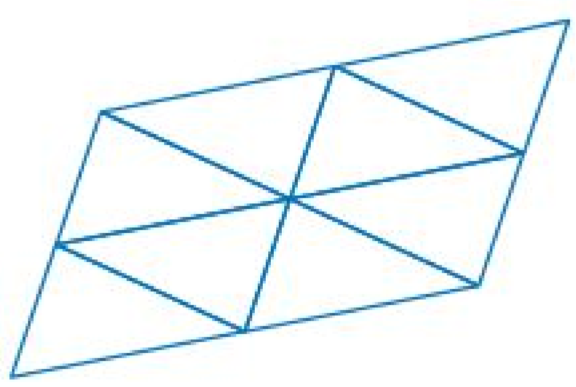
الخطوة 2: دوّر المثلث بزاوية °180 في اتجاه عقارب الساعة حول تلك النقطة.



الخطوة 3: اعمل إزاحة للمثلثين لتكوّن صفًا.

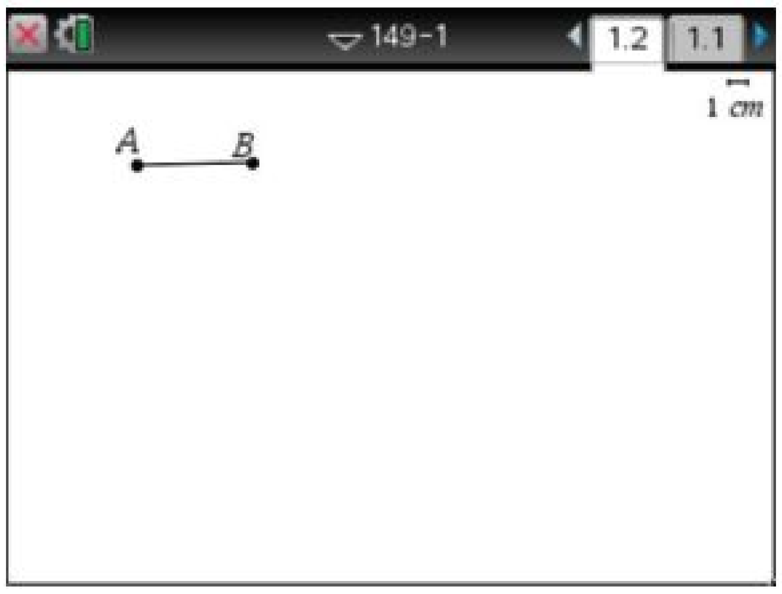


الخطوة 4: اعمل إزاحة للصف لتكون تبليطًا.



نشاط 4 إنشاء تبليط باستعمال الآلة الحاسبة البيانية TI-nspire

الخطوة 1: ارسم قطعةً مستقيمةً.

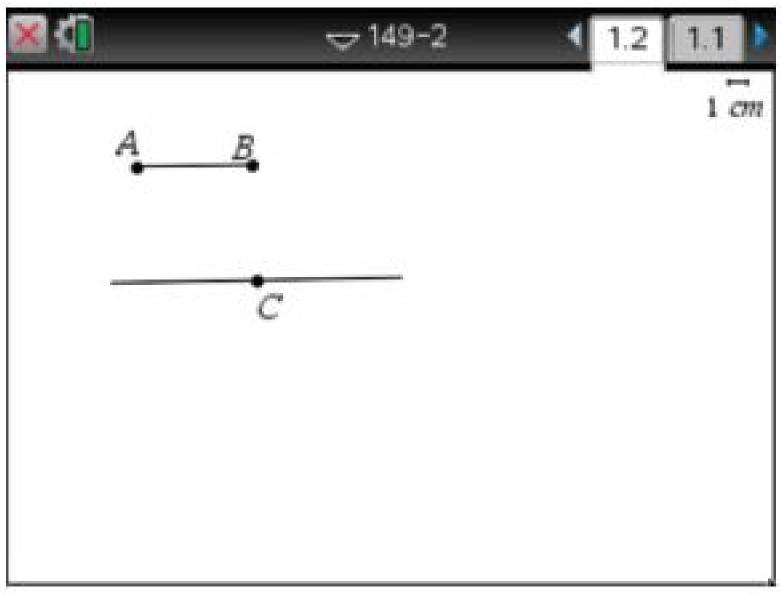


- افتح تطبيق الهندسة بالضغط على المفاتيح on

ارسم قطعةً مستقيمةً بالضغط على مفتاح menu ، ثم اختار 4: النقاط والمستقيمات ، ثم 5: قطعة مستقيمة ، واضغط في موقعين لتظهر القطعة المستقيمة.

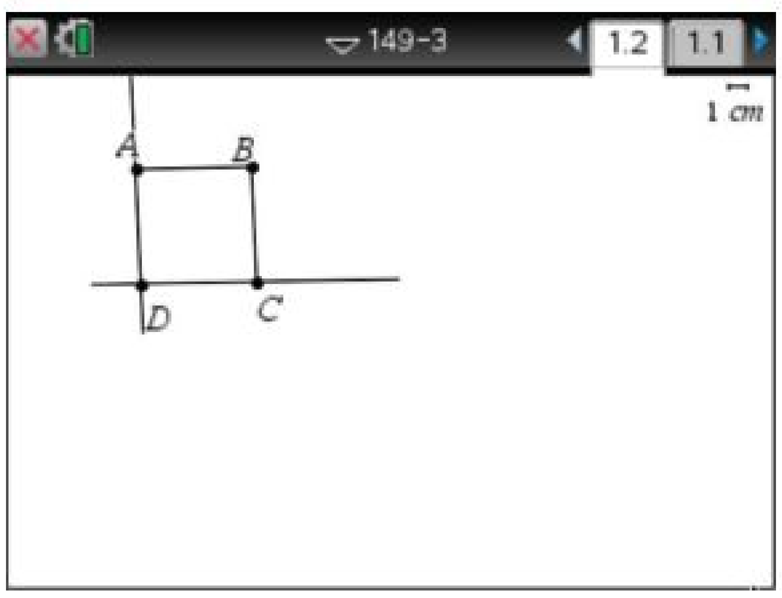
- سمِّ القطعة المستقيمة التي رسمتها، بوضع المؤشر عند أحد طرفَيها، ثم اضغط menu ctrl واختار 2: التسمية ثم اضغط shift (ليكون الحرف كبيرًا) واكتب A ، وبالمثل سمِّ الطرف الآخر B.

الخطوة 2: ارسم مستقيمًا موازيًا لـ $\overline{AB}$.



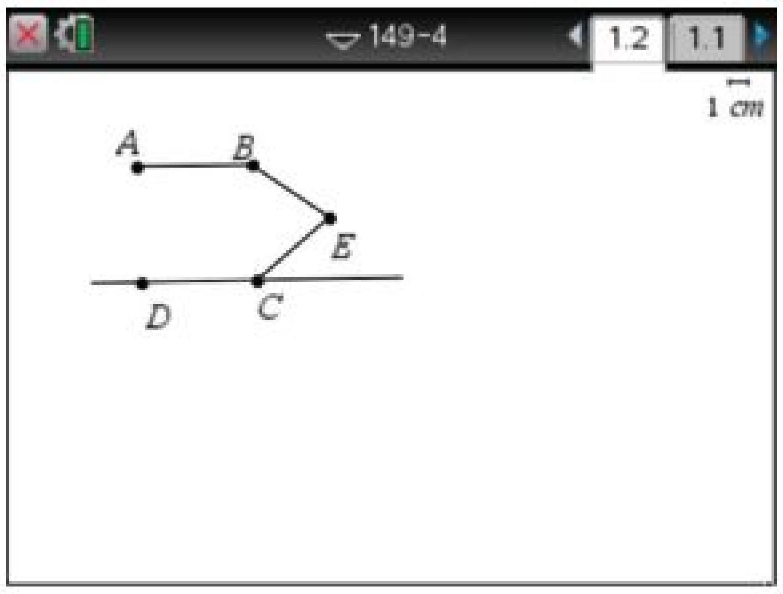
- ارسم نقطةً أسفل $\overline{AB}$، وذلك بالضغط على menu ، ثم اختار 4: النقاط والمستقيمات ، ثم 1: نقطة في المستوى ، ثم الضغط على الموقع المراد للنقطة C.
- سمّ النقطة المرسومة، بوضع المؤشر عند النقطة والضغط على menu ctrl ثم اختار 2: التسمية ثم الضغط على shift وكتابة C.
- ارسم مستقيمًا موازيًا لـ $\overline{AB}$ ويمر بالنقطة C، بالضغط على menu ثم اختار 7: الإنشاء الهندسي ، ومنها 2: مستقيم موازي ثم الضغط على القطعة $\overline{AB}$ والنقطة C.

الخطوة 3: ارسم مستقيمًا موازيًا لـ $\overline{BC}$.



- ارسم القطعة المستقيمة $\overline{BC}$ بالضغط على menu ، ثم اختار 4: النقاط والمستقيمات ثم 5: قطعة مستقيمة ، ثم الضغط على النقطتين B, C.
- ارسم مستقيمًا موازيًا لـ $\overline{BC}$ ويمرُّ في A (بطريقة مماثلة لما ورد في الخطوة 2)، وسمّه $\overleftrightarrow{AD}$، (حيث D نقطة تقاطع المستقيم الموازي لـ $\overline{AB}$ والمستقيم الموازي لـ $\overline{BC}$) ، وذلك بالضغط على مفتاح menu ، ثم اختار 4: النقاط والمستقيمات ثم 3: نقطة (نقاط) التقاطع ثم على كلٍّ من المستقيمين الموازيين لـ $\overline{AB}$ وَ $\overline{BC}$ ؛ لتظهر نقطة تقاطعهما وسمِّها D.

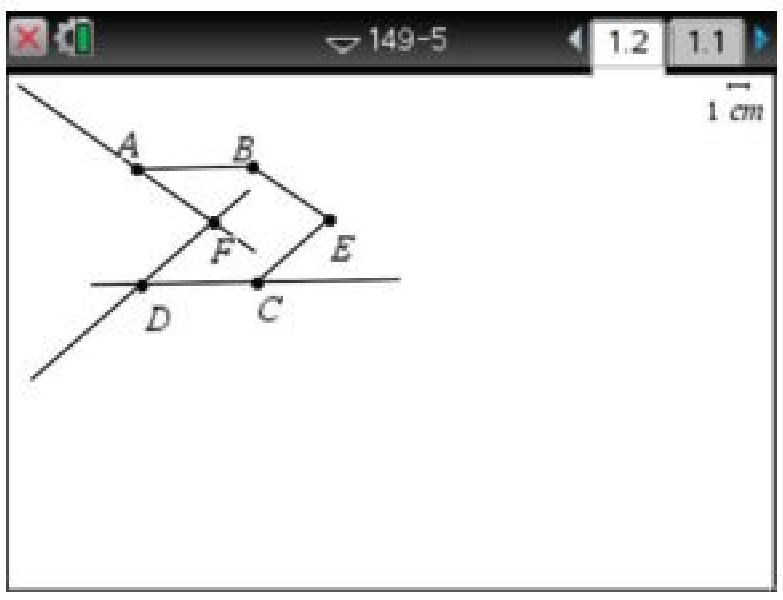
الخطوة 4: قم بإخفاء القطعة المستقيمة $\overline{BC}$.



- قم بإخفاء القطعة المستقيمة $\overline{BC}$ بالضغط عليها ثم على menu ctrl واختار 4:إخفاء ، وبالمثل قم بإخفاء المستقيم $\overleftrightarrow{AD}$.
- ارسم نقطةً عن يمين $\overline{BC}$ وسمِّها E
- صِلْ بين B وَ E، وبذلك بالضغط على menu ثم اختار 4:النقاط والمستقيمات ثم 5:قطعة مستقيمة ثم على النقطتين B, E.

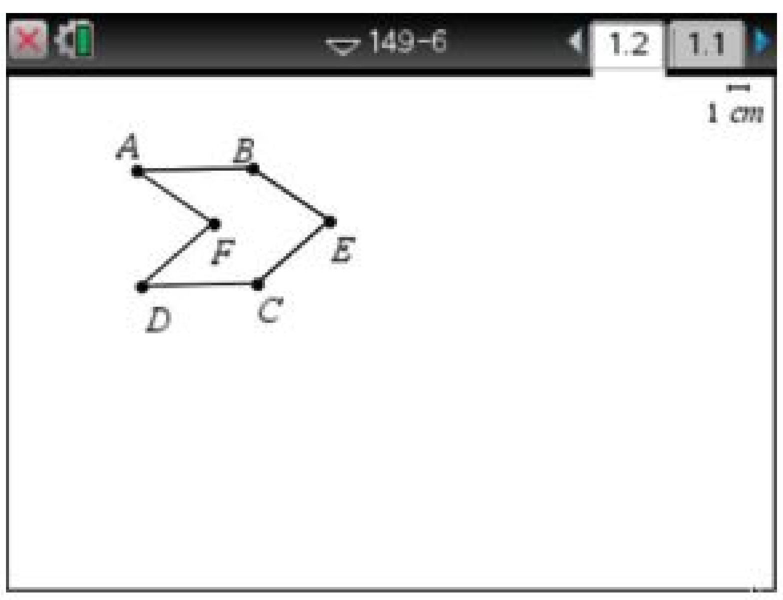
وبالمثل صِلْ بين النقطتين C وَ E.

الخطوة 5: ارسم مستقيمًا موازِيًا لِـ $\overline{CE}$ وَ $\overline{BE}$.



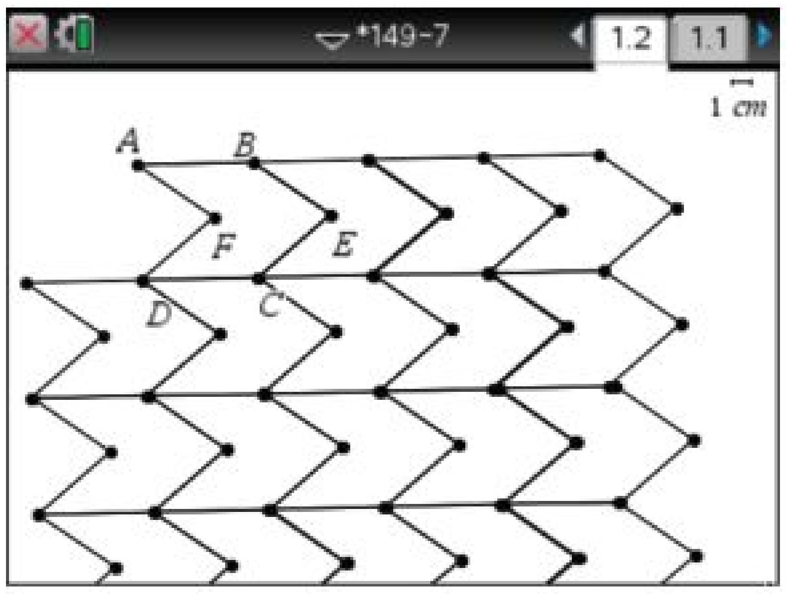
- ارسم مستقيمًا موازيًا لِـ $\overline{BE}$ ويمر في A ، ومستقيمًا موازيًا لِـ $\overline{CE}$ ويمر في D.
- حدِّد نقطة تقاطع المستقيمين الموازيين لِـ $\overline{CE}$ وَ $\overline{BE}$ وسمِّها F، وذلك بطريقةٍ مماثلةٍ لما ورد في الخطوة 3 .

الخطوة 6: كوِّن مضلعًا.



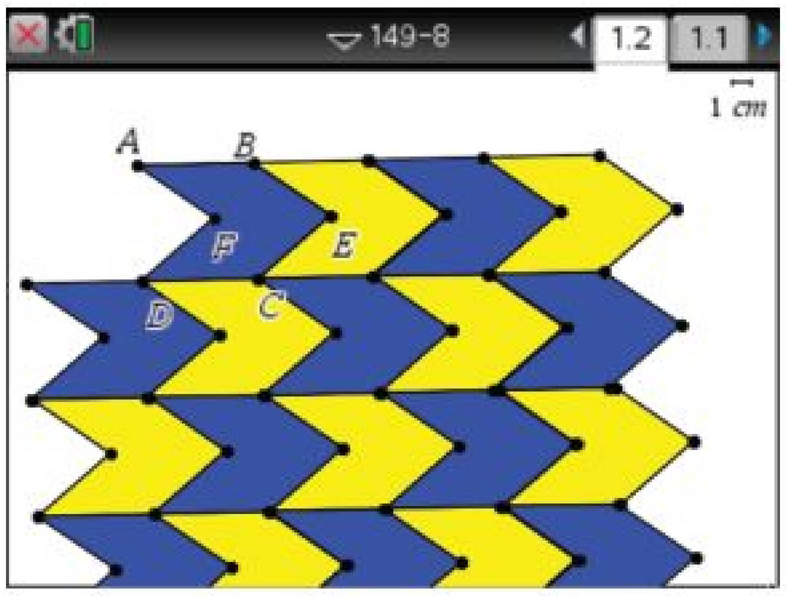
- قم بإخفاء المستقيمات $\overleftrightarrow{AF}, \overleftrightarrow{DF}, \overleftrightarrow{DC}$
- كوِّن مضلعًا سداسيًّا بالضغط على menu ثم 5:الأشكال الهندسية ثم 4:المضلع ثم بالضغط على جميع رؤوسه بالتوالي، بدءًا بأحدها وانتهاءً به ثم الضغط على esc .

الخطوة 7: اسحب المضلع.



- اعمل انسحابًا للمضلع، بالضغط على menu، ثم اختار 8: التحويل الهندسي ومنها 3: الانسحاب ثم الضغط على أحد الرؤوس ثم على المضلع؛ لعمل نسخةٍ منه.
- اسحب النسخة للمكان المناسب، ثم اضغط على مفتاح الإدخال لإفلاتها.
- كرِّر ذلك للحصول على التبليط.

الخطوة 8: لوّن التبليط.



- لوّن التبليط الذي أنشأته، وذلك بتحديد كل مضلع ثم الضغط على ctrl menu ثم اختار 2: لون التعبئة ، واختار لونًا.

تمارين:

حدّد ما إذا كان استعمال أيٍّ من المضلعات المنتظمة الآتية لتكوين تبليط في المستوى ممكنًا أم لا. اكتب "نعم" أو "لا".

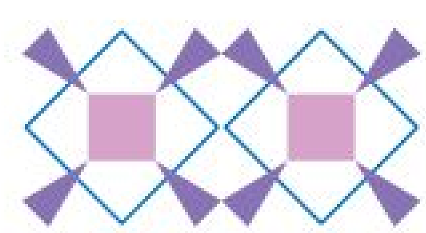
1) مثلث

2) مضلع خماسي

3) مضلع له 16 ضلعًا

حدّد ما إذا كان كلٌّ من الأنماط الآتية تبليطًا أم لا. اكتب "نعم" أو "لا"، وإن كان كذلك فصنّفه إلى منتظمٍ أو شبه منتظمٍ أو غير منتظم، وإلى متسق أو غير متسق.

4)



5)

6)

ارسم نمط تبليط باستعمال الشكل (أو الأشكال) الآتي:

7) مضلع ثماني منتظم ومربع

8) مثلث قائم الزاوية

9) شبه منحرف ومتوازي أضلاع

5-7 التماثل
Symmetry

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ رسم صورة ناتجة عن الانعكاس والدوران .

(الدرسان 3-7 ,1-7)

والآن:

- أحدّد محاور التماثل والتماثل الدوراني للأشكال الثنائية الأبعاد.
- أحدّد مستويات التماثل والتماثل الدوراني للأشكال الثلاثية الأبعاد.

المفردات:

التماثل
symmetry

التماثل حول محور
line symmetry

محور التماثل
line of symmetry

التماثل الدوراني
rotational symmetry

مركز التماثل
center of symmetry

رُتبة التماثل
order of symmetry

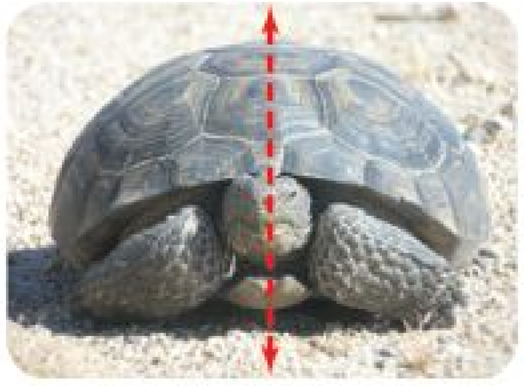
مقدار التماثل
magnitude of symmetry

التماثل حول مستوى
plane symmetry

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

صورة السلحفاة المجاورة توضح تماثلًا لجزأي جسمها الأيمن والأيسر، حيث يُعد التماثل خاصيةً يمكن أن نصف بها العديد من الأشياء، مثل الأشكال الهندسية والمعادلات الرياضية وغيرها. فالمخلوقات التي تبدو صور أجسامها متماثلة حول مستقيم تظهر أنماط عيش أكثر تعقيدًا من المخلوقات ذاتّ الأجسام المتماثلة دورانيًّا مثل قنديل البحر.

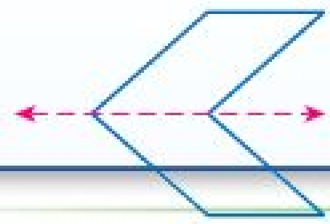


التماثل في الأشكال الثنائية الأبعاد: يكون الشكل **متماثلًا**، إذا وُجد انعكاس أو إزاحة أو دوران أو تركيب إزاحة وانعكاس ينتج عنه صورة منطبقة على الشكل نفسه. أحد أنواع التماثل هو التماثل حول محور.

مفهوم أساسي — التماثل حول محور

أضف إلى مطويتك

يكون الشكل الثنائي الأبعاد متماثلًا حول محور، إذا كانت صورته الناتجة عن انعكاس حول مستقيمٍ ما هي الشكل نفسه، ويسمى هذا المستقيم محور تماثل.

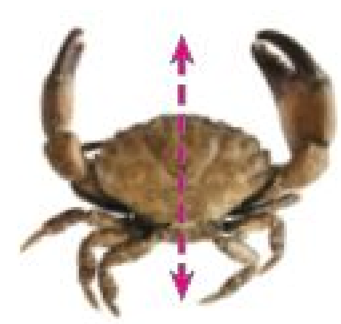


مثال 1 من واقع الحياة — تعيين محاور التماثل

مخلوقات بحرية: بيِّن ما إذا كان يبدو لصورة المخلوق البحري محور تماثلٍ أم لا. وإذا كان كذلك، فارسم محاور التماثل جميعها، وحدّد عددها في كلٍّ ممّا يأتي:

(a

نعم، لصورة هذا المخلوق محور تماثل واحد .



(b

نعم؛ لصورة هذا المخلوق 5 محاور تماثل .

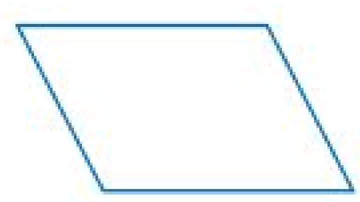
(c

لا؛ لا يوجد لصورة هذا المخلوق محاور تماثل .

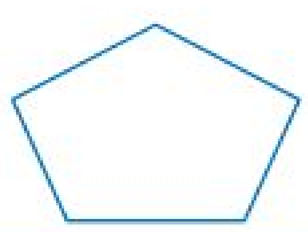
تحقق من فهمك

بيِّن ما إذا كان للشكل محور تماثل أم لا، وإذا كان كذلك فارسم محاور التماثل جميعها، وحدّد عددها في كلٍّ ممّا يأتي:

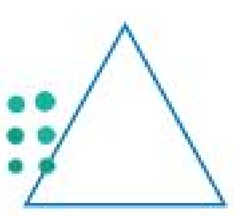
(1A



(1B



(1C



وهناك نوع آخر من التماثل هو التماثل الدوراني .

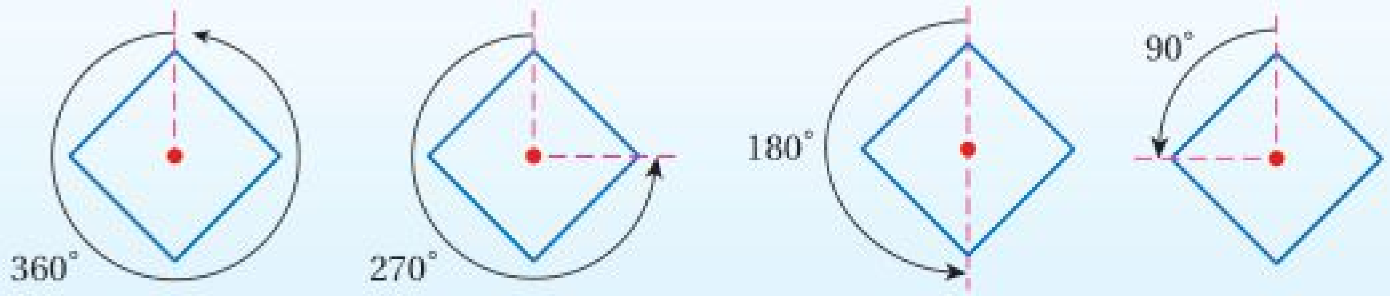
مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

التماثل الدوراني

يكون للشكل الثنائي الأبعاد تماثل دوراني (أو تماثل نصف قطري) إذا كانت صورته الناتجة عن دوران بين °0 و °360 حول مركزه هي الشكل نفسه، ويسمّى مركز الدوران في هذه الحالة مركز التماثل (أو نقطة التماثل).

أمثلة: المربع الآتي له تماثل دوراني؛ لأن الدوران بكلٍّ من الزوايا °0، °90، °180، °270، °360 ينتج عنه الشكل نفسه.



يطلق على عدد المرات التي تنطبق فيها صورة الشكل على الشكل نفسه في أثناء دورانه من °0 إلى °360 اسم **رتبة التماثل**، أما **مقدار التماثل** (أو زاوية الدوران) فهو قياس أصغر زاوية يدورها الشكل حتى ينطبق على نفسه، ويرتبط مقدار التماثل ورُتبته بالعلاقة:

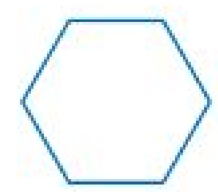
مقدار التماثل يساوي ناتج قسمة °360 على رُتبة التماثل.

ففي الشكل أعلاه، رُتبة التماثل الدوراني 4، ومقدار التماثل °90

مثال 2 تعيين التماثل الدوراني

بيِّن ما إذا كان للشكل تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك، فعيّن مركز التماثل، وحدد رتبته ومقداره في كلٍّ ممّا يأتي:

a)



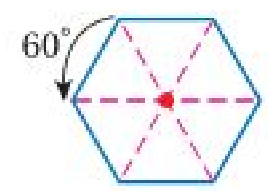
نعم؛ للسداسي المنتظم تماثل دوراني.

مركز التماثل هو نقطة تقاطع أقطاره.

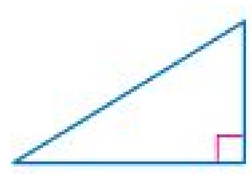
رتبة التماثل = 6

مقدار التماثل =

$360° \div 6 = 60°$



b)



لا؛ لا يوجد دوران بزاوية بين °0 و °360 تنطبق فيه صورة المثلث القائم الزاوية على نفسه.

c)

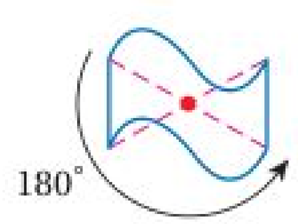
نعم؛ لهذا الشكل تماثل دوراني.

مركز التماثل هو نقطة تقاطع قطريه.

رتبة التماثل =2

مقدار التماثل =

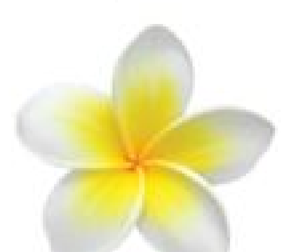
$360° \div 2 = 180°$



✓ تحقق من فهمك

أزهار: بيِّن ما إذا كان يبدو لصورة الزهرة تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك، فعيّن مركز التماثل، وحدّد رتبته ومقداره في كلٍّ ممَّا يأتي:

2A)

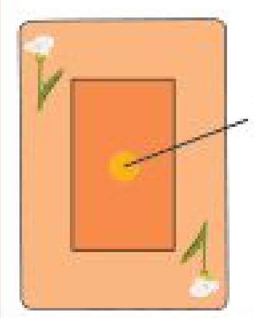


2B)

إرشادات للدراسة

التماثل حول نقطة: يكون الشكل متماثلًا حول نقطةٍ، إذا كانت صورته الناتجة عن الدوران حول تلك النقطة بزاوية °180 هي الشكل نفسه.

يحقق الشكل أدناه خاصية التماثل حول نقطة.



التماثل في الأشكال الثلاثية الأبعاد: يمكن أن تكون الأشكال الثلاثية الأبعاد أيضًا متماثلة .

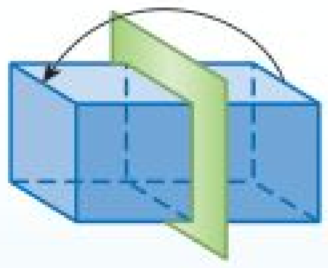
مفاهيم أساسية

أضف إلى مطويتك

التماثلات في الأشكال الثلاثية الأبعاد

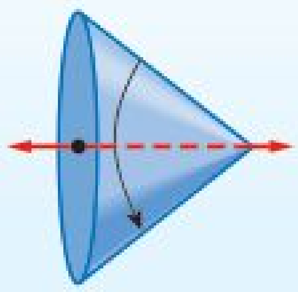
التماثل حول مستوى

يكون الشكل الثلاثي الأبعاد **متماثلًا حول مستوى**، إذا أمكن تقسيمه بهذا المستوى إلى شكلين متطابقين، وفي هذه الحالة يسمى هذا المستوى (مستوى التماثل).



التماثل حول محور

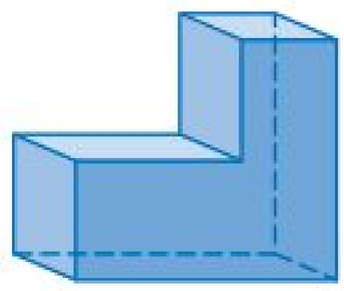
يكون الشكل الثلاثي الأبعاد **متماثلًا حول محور**، إذا أمكن تدويره حول هذا المحور بزاوية بين $0°$ و $360°$ ؛ ليصبح كما كان في وضعه الأصلي.



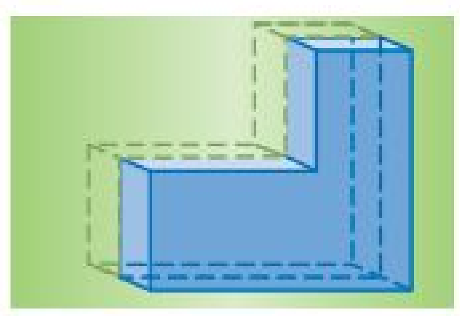
مثال 3 التماثل في الأشكال الثلاثية الأبعاد

بيِّن ما إذا كان الشكل متماثلًا حول مستوى أو متماثلًا حول محور أو كلاهما أو غير ذلك في كلٍّ ممَّا يأتي:

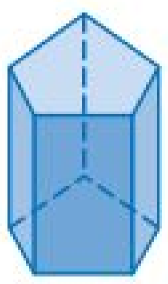
a) مجسَّم على شكل حرف L



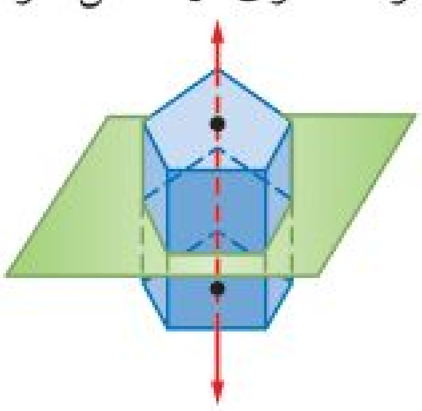
متماثل حول مستوى



b) منشور خماسي منتظم



متماثل حول مستوى، ومتماثل حول محور



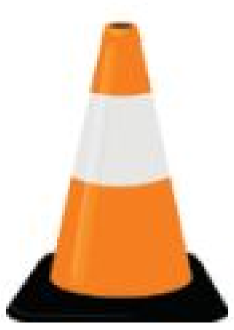
✓ تحقق من فهمك

بيِّن ما إذا كان الشكل متماثلًا حول مستوى، أو متماثلًا حول محور، أو كلاهما، أو غير ذلك في كلٍّ ممَّا يأتي:

(3A

(3B

(3C



(3D

إرشادات للدراسة

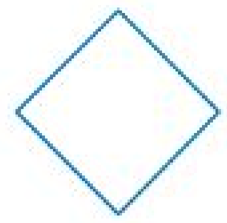
مستوى التماثل: هو المستوى الذي يقسم الشكل إلى نصفين متطابقين تمامًا، بحيث يكون كلٌّ منهما صورة للآخر .

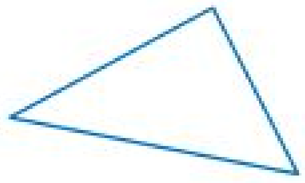
مراجعة المفردات

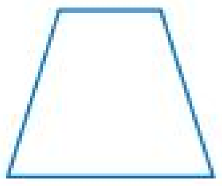
المنشور: مجسم متعدد السطوح له قاعدتان متطابقتان وأوجهه على شكل متوازي أضلاع.

تأكـــد

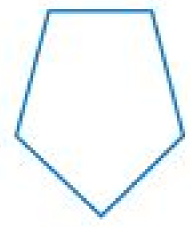
المثال 1 بيِّن ما إذا كان للشكل محور تماثل أم لا، وإذا كان كذلك، فارسم محاور التماثل جميعها، وحدّد عددها في كلٍّ مما يأتي:

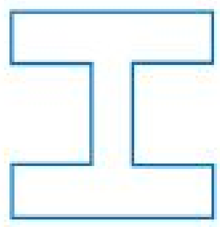
(1


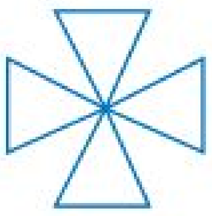
(2


(3


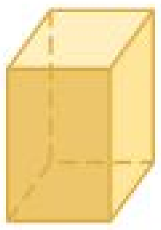
المثال 2 بيِّن ما إذا كان للشكل تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك، فعيّن مركز التماثل، وحدد رتبته ومقداره في كلٍّ مما يأتي:

(4


(5


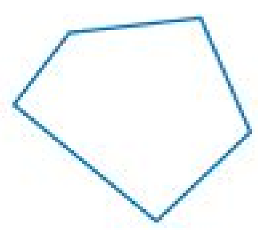
(6


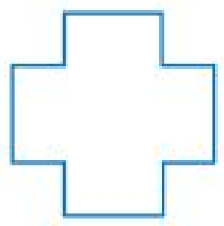
المثال 3 7) بيِّن ما إذا كان الشكل المجاور متماثلًا حول مستوى أو حول محور أو كلاهما أو غير ذلك.

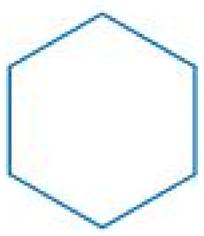


تدرب وحل المسائل

المثال 1 بيِّن ما إذا كان للشكل محور تماثل أم لا، وإذا كان كذلك، فارسم محاور التماثل جميعها، وحدّد عددها في كلٍّ مما يأتي:

(8


(9


(10


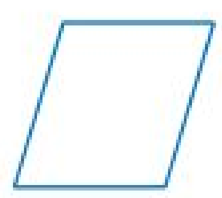
أعلام: بيِّن ما إذا كان للعلم محور تماثل أم لا، وإذا كان كذلك، فارسم محاور التماثل جميعها، وحدّد عددها في كلٍّ مما يأتي:

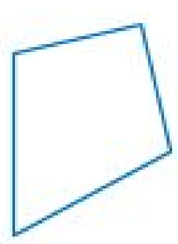
(11

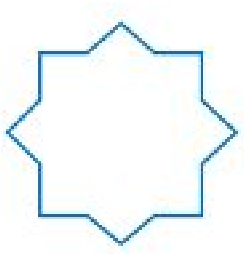

(12


(13


المثال 2 بيِّن ما إذا كان للشكل تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك، فعيِّن مركز التماثل، وحدّد رتبته ومقداره في كلٍّ مما يأتي:

(14


(15


(16


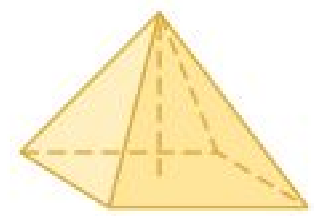
إطارات: بيِّن ما إذا كان لصورة غطاء إطار السيارة تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك، فحدد رتبة التماثل ومقداره .

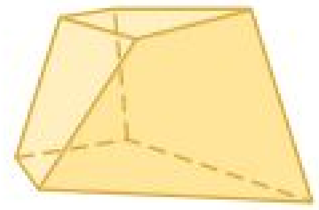
(17

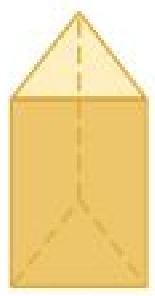

(18


(19

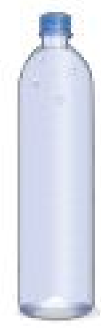

المثال 3 بيّن ما إذا كان الشكل متماثلًا حول مستوى أو متماثلًا حول محور أو كلاهما أو غير ذلك في كلٍّ ممّا يأتي:

(20


(21


(22


عبوات: حدّد عدد مستويات التماثل الأفقية، ومستويات التماثل الرأسية لكلٍّ من العلب الآتية:

(23


(24


(25


هندسة إحداثية: حدّد ما إذا كان للشكل المعطاة إحداثيات رؤوسه في كلٍّ من الأسئلة الآتية تماثل حول محور و/أو تماثل دوراني أم لا.

(26 $A(-4, 0), B(0, 4), C(4, 0), D(0, -4)$

(27 $R(-3, 3), S(-3, -3), T(3, 3)$

(28 $F(0, -4), G(-3, -2), H(-3, 2), J(0, 4), K(3, 2), L(3, -2)$

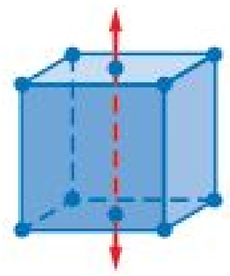
جبر: مثّل بيانيًا كلًّا من الدوال الآتية، وحدّد ما إذا كان لتمثيلها البياني تماثل حول محور و/أو تماثل دوراني أم لا. وإذا كان كذلك، فحدّد رتبة التماثل ومقداره، واكتب معادلة كل محور تماثل.

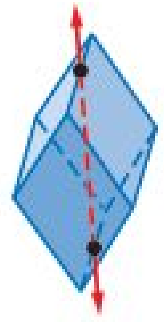
(29 $y = x$

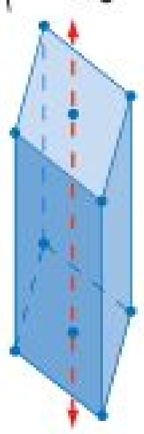
(30 $y = x^2 + 1$

(31 $y = -x^3$

حدّد ما إذا كانت البلورة متماثلةً حول مستوى أو متماثلة حول محور في كلٍّ ممّا يأتي:

(32 مكعب


(33 مجسم ذو ستة أوجه كل منها معين


(34 منشور قائم قاعدته معين


الربط مع الحياة

تعتمد الخصائص الفيزيائية للمادة الصلبة على ترتيب بلوراتها، فبلورات الألماس تأخذ شكل المكعب، وروابطها قوية جدًا يصعب قطعها، وهذا ما يجعل الألماس مادةً قاسيةً جدًا.

(35 **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستستقصي التماثل الدوراني في المضلعات المنتظمة .

a) **هندسيًا:** ارسم مثلثًا متطابق الأضلاع، وحدّد رتبة تماثله.

b) **هندسيًا:** كرّر العملية في الفرع **a** على مربعٍ ومضلعٍ خماسيٍّ منتظمٍ ومضلعٍ سداسيٍّ منتظمٍ.

c) **جدوليًا:** نظّم جدولًا يبين رتبة التماثل لكلٍّ من هذه المضلعات.

d) **لفظيًا:** ضع تخمينًا حول رتبة التماثل لمضلع منتظم.

مسائل مهارات التفكير العليا


الشكل A

36) اكتشف الخطأ: يقول جمال: إن للشكل A تماثلًا حول محور فقط، في حين يقول ناصر: إن للشكل A تماثلًا دورانيًّا فقط. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ برر إجابتك.

37) تحدٍّ: يوجد لشكل رباعي في المستوى الإحداثي محورا تماثل فقط هما: $y = x - 1$, $y = -x + 2$. مثل محوري التماثل بيانيًا ثم أوجد مجموعة من الإحداثيات الممكنة لرؤوس هذا الشكل ومثله بيانيًا.

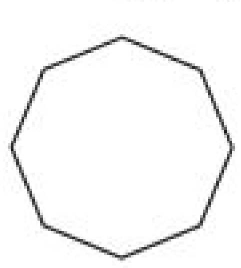
38) مسألة مفتوحة: ارسم شكلًا له محور تماثل، ولكن ليس له تماثل دوراني. اشرح إجابتك.

39) اكتب: بيِّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين التماثل حول محور والتماثل الدوراني.

تدريب على اختبار

40) إجابة قصيرة: ما عدد محاور التماثل التي يمكن رسمها في صورة علم مملكة البحرين؟

41) ما رتبة التماثل للشكل الآتي؟



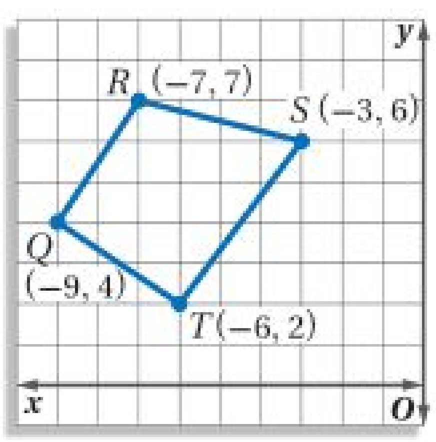
مراجعة تراكمية

إحداثيات رؤوس المثلث JKL هي: $J(1, 5)$, $K(3, 1)$, $L(5, 7)$ ، مثِّل بيانيًّا $\triangle JKL$ وصورته الناتجة عن التحويل الهندسي المركّب المحدد في كلٍّ من السؤالين الآتيين: (الدرس 7-4)

42) إزاحة مقدارها 7 وحدات إلى اليسار ووحدة واحدة إلى أسفل ثم انعكاس حول المحور x .

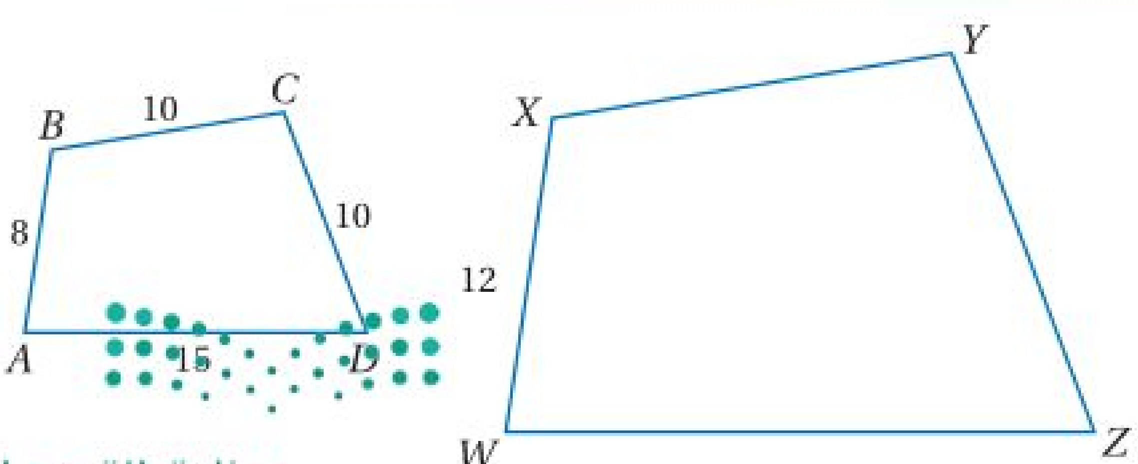
43) إزاحة مقدارها وحدة واحدة إلى اليمين ووحدتان إلى أعلى، ثم انعكاس حول المحور y .

44) يبيِّن الشكل المجاور الشكل الرباعي $QRST$ في المستوى الإحداثي، ما صورة النقطة R الناتجة عن دوران الشكل بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل؟ (الدرس 7-3)



استعد للدرس اللاحق

إذا كان $ABCD \sim WXYZ$ ، فأوجد كلًّا مما يلي:



45) معامل تشابه $ABCD$ إلى $WXYZ$

46) XY

47) YZ

48) WZ

6-7 التمدد
Dilations

لماذا؟

بينما يستعمل كثيرون آلات التصوير الرقمية، إلا أنه لا زال بعض المصوِّرين يفضلون استعمال الفيلم وآلات التصوير التقليدية لإنتاج مسودات الصور، ومن هذه المسودات يكوّن المصوِّرون صورًا بقياساتٍ مختلفةٍ.

فيما سبق:
درستُ رسم صورة ناتجة عن تكبير شكل أو تصغيره.

(مهارة سابقة)

والآن:
- أرسم الصورة الناتجة عن التمدد باستعمال المسطرة.
- أرسم الصورة الناتجة عن التمدد في المستوى الإحداثي.

المفردات:
التمدد
dilation

تحويل التشابه
similarity transformation

معامل مقياس التمدد
scale factor of dilation

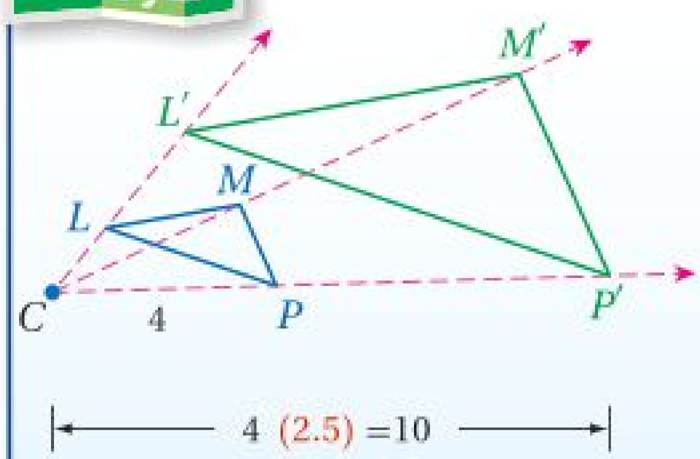
رسم التمدد: **التمدد** هو تحويل هندسي يكبّر الشكل أو يصغره بنسبة محدّدة هي نسبة أحد أطوال الصورة إلى الطول المناظر لها في الشكل الأصلي. وتسمى هذه النسبة **معامل مقياس التمدد**. ولأن الصورة الناتجة عن التمدّد تشبه الشكل الأصلي، فإن التمدد نوع من أنواع **تحويلات التشابه**. ويتم تحديد التمدد بمعرفة مركز التمدد ومعامله.

مفهوم أساسي — التمدد

أضف إلى مطويتك

التمدد الذي مركزه C ومعامله هو العدد الموجب k ، حيث $k \neq 1$ ، ينقل النقطة P في شكلٍ ما إلى صورتها P' ، بحيث:

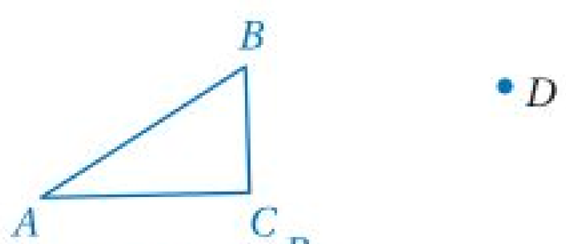
- **إذا انطبقت النقطة P على مركز التمدد C ، فإن صورتها هي النقطة P نفسها.**
- **إذا لم تنطبق النقطة P على مركز التمدد C ، فإن صورتها P' تقع على $\overrightarrow{CP}$ ، ويكون $CP' = k(CP)$.**



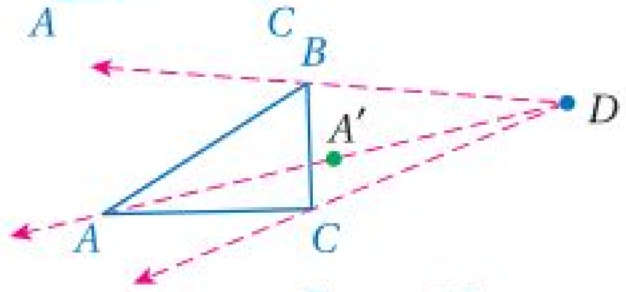
$\triangle L'M'P'$ هو صورة $\triangle LMP$ الناتجة عن التمدد الذي مركزه C ومعامله 2.5

مثال 1 — رسم التمدد

استعمل مسطرةً لرسم صورة $\triangle ABC$ الناتجة عن التمدد الذي مركزه النقطة D ، ومعامله $\frac{1}{2}$

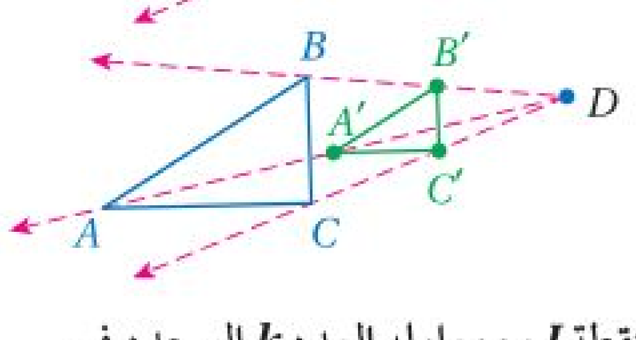


الخطوة 1: ارسم من D أنصاف المستقيمات $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$.



الخطوة 2: عيّن A' على $\overrightarrow{DA}$ ، بحيث يكون $DA' = \frac{1}{2} DA$.

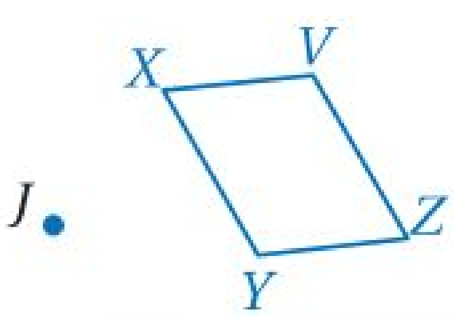
الخطوة 3: عيّن B' على $\overrightarrow{DB}$ و C' على $\overrightarrow{DC}$ بالطريقة نفسها ثم ارسم $\triangle A'B'C'$.



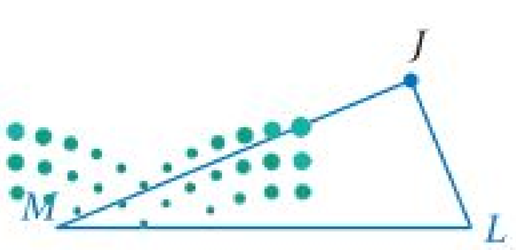
تحقق من فهمك

استعمل مسطرةً لرسم صورة الشكل الناتجة عن التمدد الذي مركزه النقطة J ، ومعامله العدد k المحدد في كلٍّ ممّا يأتي:

(1A $k = \frac{3}{2}$



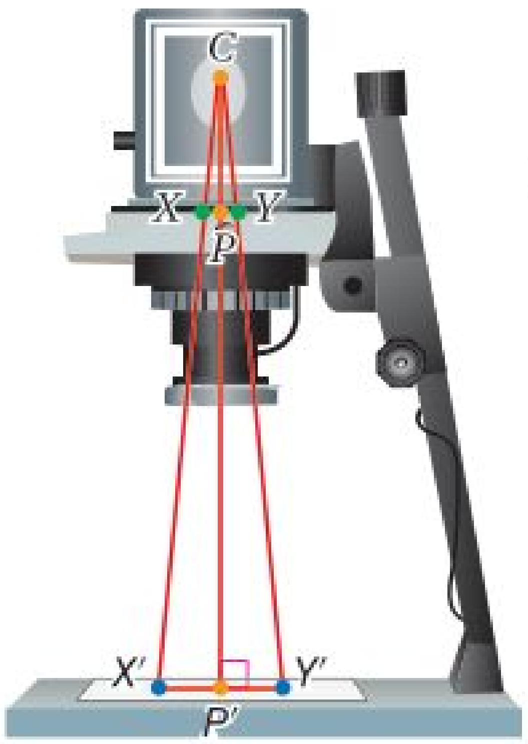
(1B $k = 0.75$



من تعريف معامل مقياس التمدد، تجد أنه إذا كان معامل مقياس التمدد k أكبر من 1 ، فإن أبعاد الصورة أكبر من الأبعاد المناظرة لها في الشكل الأصلي وعندها يكون التمدد تكبيرًا. وإذا كان $0<k<1$، فإن أبعاد الصورة تكون أصغر من الأبعاد المناظره لها في الشكل الأصلي، وعندها يكون التمدد تصغيرًا. وبما أن $\frac{1}{2}$ يقع بين 0 و 1، فإن التمدد في المثال 1 تصغير.

ويسمّى التمدد الذي معامله 1 تمددًا مطابقًا؛ إذ يكون الشكل الأصلي وصورته متطابقين.

مثال 2 من واقع الحياة — إيجاد معامل مقياس التمدد



تصوير: لإنتاج صور مكبرة، يمكن أن تُعَدّل المسافة بين مسودة الصورة والصورة المكبرة باستعمال جهاز تكبير الصور.
افترض أن المسافة CP بين مصدر الضوء C ومسودة الصورة تساوي 45 mm، ما المسافة PP' التي يلزم أن يُعدَّل إليها جهاز تكبير الصور للحصول على صورة عرضها $X'Y' = 22.75\text{cm}$ من مسودة عرضها $XY = 35$ mm؟

افهم: **المعطيات:** مركز التمدد C ، $XY = 35$ mm ،
$X'Y' = 22.75$ cm $= 227.5$ mm ،
$CP = 45$ mm.

المطلوب: إيجاد PP'.

خطط: أوجد معامل مقياس التمدد من الشكل الأصلي $\overline{XY}$ إلى الصورة $\overline{X'Y'}$، واستعمله لإيجاد CP' ، ثم استعمل CP و CP' لإيجاد PP'.

حُلَّ: معامل مقياس التمدد هو نسبة أحد أطوال الصورة إلى الطول المناظر له في الشكل الأصلي .

$k = \dfrac{\text{طول الصورة}}{\text{طول الأصل}}$	معامل مقياس تمدد الصورة
$= \dfrac{X'Y'}{XY}$	طول الصورة يساوي $X'Y'$ ، وطول الأصل يساوي XY
$= \dfrac{227.5}{35} = 6.5$	بالتعويض والقسمة

استعمل معامل مقياس التمدد لإيجاد CP'.

$CP' = k(CP)$	تعريف التمدد
$= 6.5(45)$	$k = 6.5 , CP = 45$
$= 292.5$	بالضرب

استعمل CP' و CP لإيجاد PP'.

$CP + PP' = CP'$	مسلّمة جمع القطع المستقيمة
$45 + PP' = 292.5$	$CP = 45 , CP' = 292.5$
$PP' = 247.5$	بطرح 45 من الطرفين

يجب أن يُعدل جهاز تكبير الصور، بحيث تكون المسافة PP' بين المسودة والصورة المكبرة 247.5 mm أو 24.75 cm

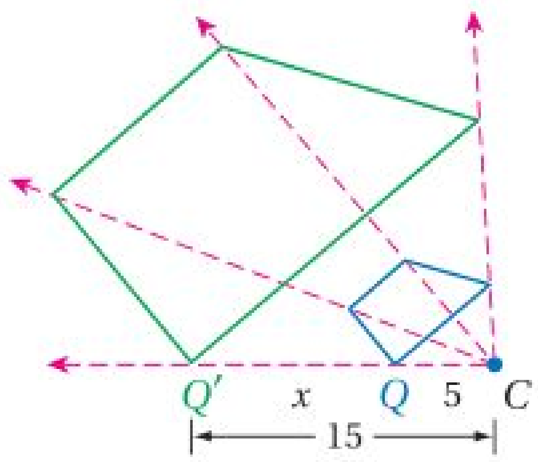
تحقق: بما أن هذا التمدد تكبير، إذن يجب أن يكون معامله أكبر من 1، وبما أن $6.5 > 1$ ، فإن معامل مقياس التمدد معقول . ✓

إرشادات لحل المسألة

استعمال التقدير: لتجنُّب الأخطاء غير المقصودة في حساباتك، قدِّر إجابة السؤال قبل الشروع في الحل. يمكنك أن تقدِّر معامل مقياس التمدد في المثال 2 بحوالي $\frac{240}{40}$ أو 6 وبذلك يكون CP' (50) 6 أي 300 تقريبًا. ويكون PP' 50 − 300 أي 250 mm تقريبًا، أو 25 cm، والإجابة 24.7 cm قريبة من الإجابة المقدَّرة؛ لذا فإن الإجابة معقولة.

تحقق من فهمك

2) حدِّد ما إذا كان التمدد من الشكل Q إلى Q' تكبيرًا أم تصغيرًا، ثم أوجد معامل مقياس التمدد، وقيمة x.



إرشادات للدراسة

معامل التمدد السالب: يمكن أن يكون معامل التمدد سالبًا، وستستقصي هذا النوع من التمدد في السؤال 26.

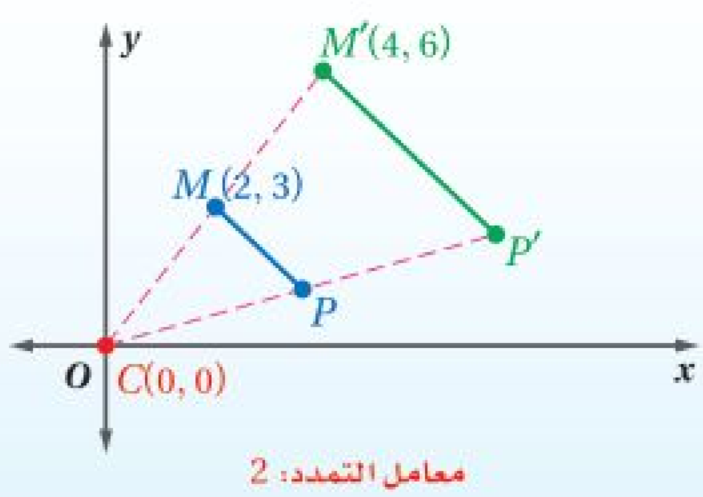
التمدد في المستوى الإحداثي: يمكن أن تستعمل القاعدة الآتية لإيجاد إحداثيات الصورة الناتجة عن تمددٍ مركزه نقطة الأصل.

مفهوم أساسي — التمدد في المستوى الإحداثي

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لإيجاد إحداثيات الصورة الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل، اضرب الإحداثيَّين x , y لكل نقطة في الشكل الأصلي في معامل مقياس التمدد k.

مثال:



الرموز: $(x, y) \to (kx, ky)$

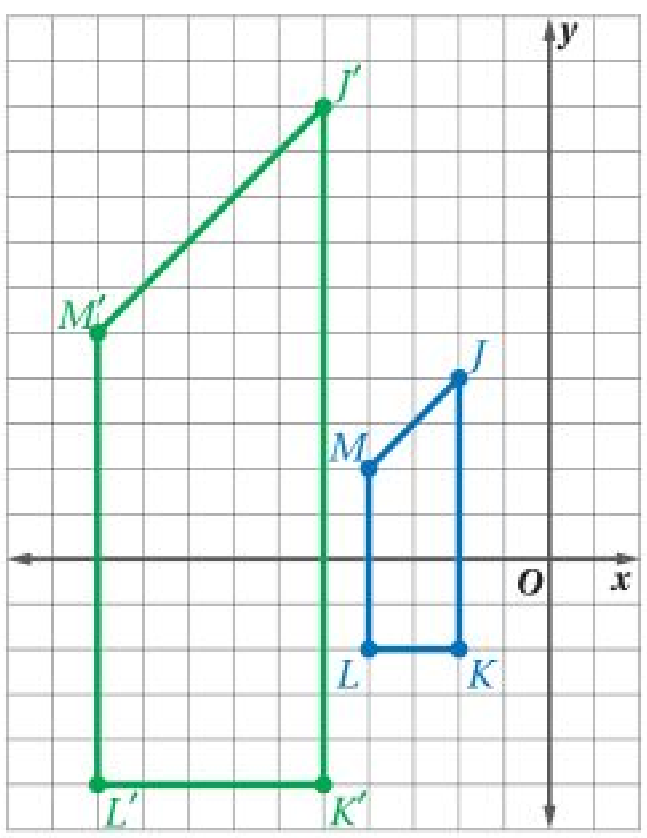
مثال 3 التمدد في المستوى الإحداثي

إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي $JKLM$ هي: $J(-2, 4), K(-2, -2), L(-4, -2), M(-4, 2)$. مثّل بيانيًّا $JKLM$ وصورته الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل، ومعامله 2.5

اضرب الإحداثيين x و y لكل رأس في معامل التمدد 2.5

(x, y)	$\to$	$(2.5x, 2.5y)$
$J(-2, 4)$	$\to$	$J'(-5, 10)$
$K(-2, -2)$	$\to$	$K'(-5, -5)$
$L(-4, -2)$	$\to$	$L'(-10, -5)$
$M(-4, 2)$	$\to$	$M'(-10, 5)$

مثِّل بيانيًّا $JKLM$ وصورته $J'K'L'M'$.



تحقق من فهمك

مثِّل المضلع المعطاة إحداثيات رؤوسه بيانيًّا، ثم مثِّل صورته الناتجة عن تمددٍ مركزه نقطة الأصل، ومعامله العدد k المحدد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

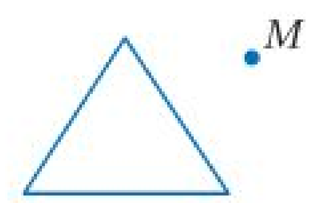
3A) $Q(0, 6), R(-6, -3), S(6, -3)$ ؛ $k = \frac{1}{3}$

3B) $A(2, 1), B(0, 3), C(-1, 2), D(0, 1)$ ؛ $k = 2$

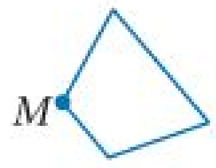
تأكــد

المثال 1 استعمل مسطرةً لرسم صورة الشكل الناتجة عن تمددٍ مركزه النقطة M ومعامله العدد k المحدد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

1) $k = \frac{1}{4}$

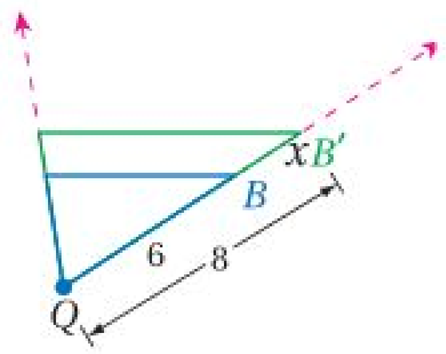


2) $k = 2$

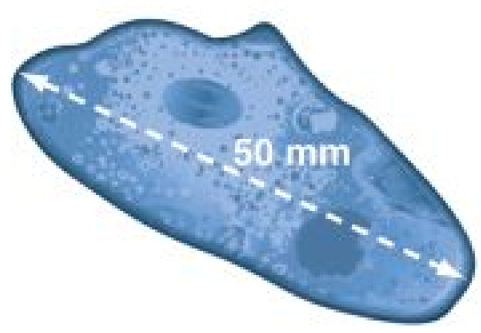


المثال 2

3) حدّد ما إذا كان التمدد من الشكل B إلى الشكل B' تكبيرًا أم تصغيرًا، ثم أوجد معامله وقيمة x.



4) **أحياء:** طول مخلوق حيٍّ دقيق وحيد الخلية 200 ميكرون، ويظهر طوله تحت المجهر 50 mm، إذا كان 1000 ميكرون = 1 mm، فما قوة التكبير (معامل مقياس التمدد) المُستعملة؟ وضّح إجابتك.



المثال 3 مثِّل المضلع المعطاة إحداثيات رؤوسه بيانيًّا، ثم مثِّل صورته الناتجة عن تمددٍ مركزه نقطة الأصل ومعامله العدد k المحدد في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

5) $W(0, 0), X(6, 6), Y(6, 0)$ ؛ $k = 1.5$

6) $Q(-4, 4), R(-4, -4), S(4, -4), T(4, 4)$ ؛ $k = \frac{1}{2}$

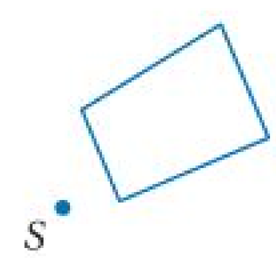
7) $A(-1, 4), B(2, 4), C(3, 2), D(-2, 2)$ ؛ $k = 2$

8) $J(-2, 0), K(2, 4), L(8, 0), M(2, -4)$ ؛ $k = \frac{3}{4}$

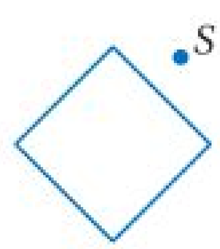
تدرب وحل المسائل

المثال 1 استعمل مسطرةً لرسم صورة الشكل الناتجة عن تمددٍ مركزه النقطة S ومعامله العدد k المحدد في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

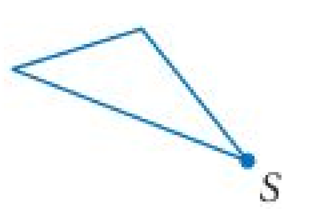
9) $k = \frac{5}{2}$



10) $k = \frac{1}{3}$

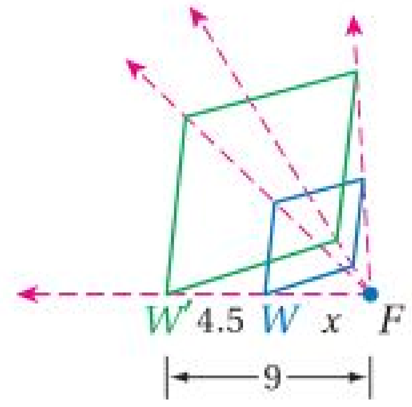


11) $k = 2.25$

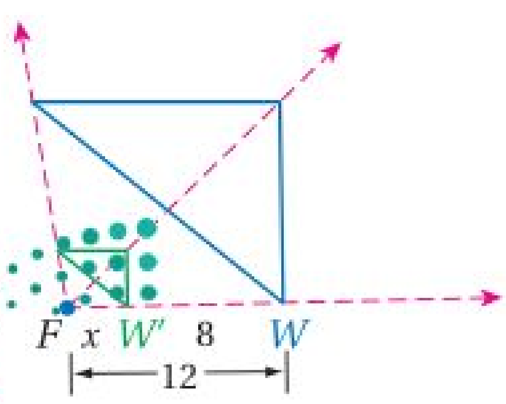


المثال 2 حدّد ما إذا كان التمدد من الشكل W إلى الشكل W' تكبيرًا أم تصغيرًا، ثم أوجد معامله وقيمة x.

12)



13)



حشرات: طول كلٍّ من الحشرتين الآتيتين كما تُرى تحت المجهر مكتوب على الصورة. إذا علمت طول الحشرة الحقيقي، فأوجد قوة التكبير المُستعملة، ووضّح إجابتك.

14)

15)

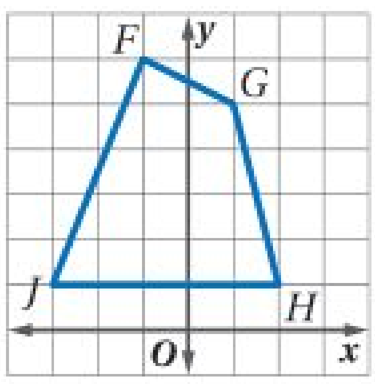
المثال 3 مثِّل بيانيًّا المضلع وصورته الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله العدد k المحدد في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

16) $J(-8, 0), K(-4, 4), L(-2, 0)$ ؛ $k = 0.5$

17) $D(4, 4), F(0, 0), G(8, 0)$ ؛ $k = 0.75$

18) $W(2, 2), X(2, 0), Y(0, 1), Z(1, 2)$ ؛ $k = 3$

19) **هندسة إحداثية:** استعمل التمثيل البياني للمضلع $FGHJ$ للإجابة عمَّا يلي:



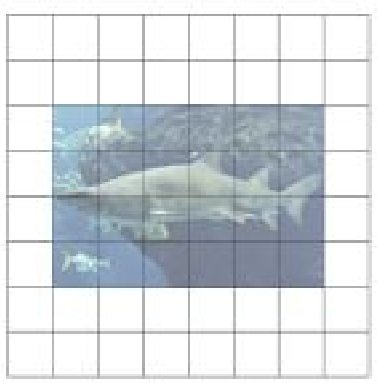
a) مثِّل بيانيًّا صورة $FGHJ$ الناتجة عن تمدد معامله $\frac{1}{2}$ ومركزه نقطة الأصل، ثم انعكاس حول المحور y.

b) نفّذ التحويل المركب في الفرع **a** بعكس الترتيب.

c) هل يؤثر ترتيب التحويلين الهندسيين هنا في الصورة النهائية؟

d) هل يؤثر ترتيب تركيب التمدد والانعكاس في الصورة النهائية دائمًا أو أحيانًا أو أنه لا يؤثر عليها أبدًا؟

20) **رسم:** يرسم سليمان صورةً باستعمال طريقة المربعات، فيضع شبكة إحداثية شفافة طول وحدتها $\frac{1}{4}$ cm فوق صورة أبعادها 4 cm × 6 cm، ويضع شبكةً أخرى طول وحدتها $\frac{1}{2}$ cm على ورقة رسم أبعادها 8 cm × 12 cm، ثم يرسم ما يحويه كل مربع من الصورة في المربع المناظر له على ورقة الرسم.

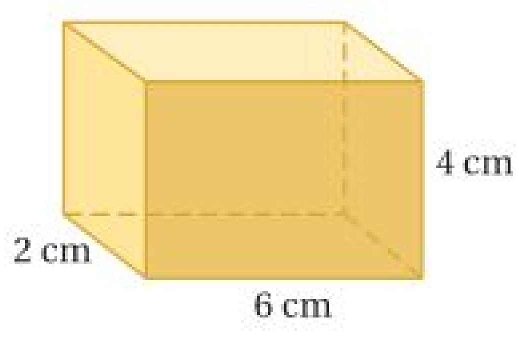


a) ما معامل مقياس هذا التمدد؟

b) ما طول وحدة الشبكة التي يتعيَّن عليه استعمالها لرسم صورة قياسها 10 أمثال قياس الصورة الأصلية؟

c) كم تكون مساحة الرسم الناتج عن صورة أبعادها 5 cm x 7 cm عند استعمال شبكة وحدتها 2 cm على لوحة الرسم؟

21) **تغيير الأبعاد:** يمكن إجراء تمددٍ على الأشكال الثلاثية الأبعاد أيضًا.



a) أوجد مساحة سطح المنشور المجاور وحجمه.

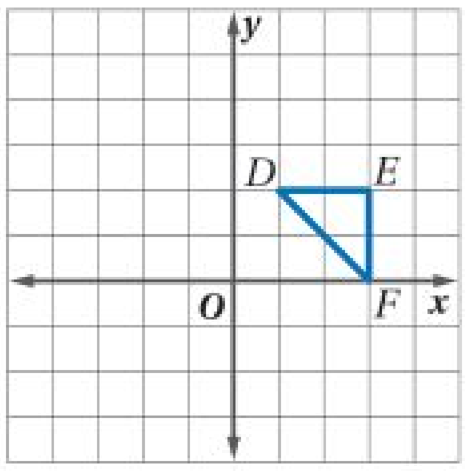
b) أوجد مساحة سطح المنشور الناتج عن تمددٍ معامله 2 ، وأوجد حجمه.

c) أوجد مساحة سطح المنشور الناتج عن تمددٍ معامله $\frac{1}{2}$، وأوجد حجمه.

d) أوجد نسبة مساحة سطح المنشور الناتج عن كل تمدد إلى مساحة سطح المنشور الأصلي، ثم أوجد نسبة حجم المنشور الناتج عن كل تمددٍ إلى حجم المنشور الأصلي.

e) ضع تخمينًا حول أثر التمددِ ذي المعامل الموجب في مساحة سطح المنشور وفي حجمه.

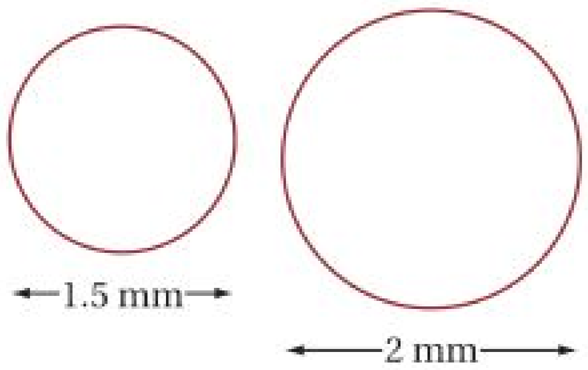
22) **هندسة إحداثية :** استعمل التمثيل البياني المجاور للإجابة عمّا يأتي:



a) مثِّل بيانيًّا صورة $\triangle DEF$ الناتجة عن تمدد مركزه النقطة D ومعامله 3

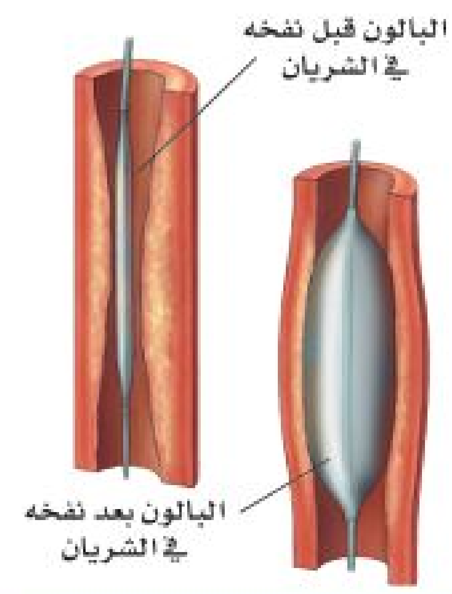
b) عبِّر عن هذا التمدد بتركيب تحويلين هندسيين، أحدهما تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله 3

23) **صحة :** استعمل فقرة الربط مع الحياة المجاورة للإجابة عن السؤالين الآتيين:



a) ينفخ الطبيب بالون القسطرة في الشريان التاجي للمريض مكبرًا البالون كما يتضح في الشكل المجاور.
أوجد معامل هذا التمدد.

b) أوجد مساحة المقطع العرضي للبالون قبل النفخ وبعده .

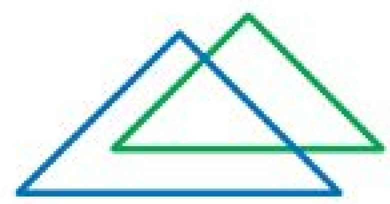


الربط مع الحياة

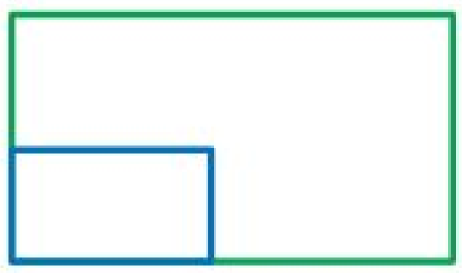
عندما يضيق الشريان التاجي الذي ينقل الدم إلى القلب بسبب تراكم الكولسترول، يمكن توسيعه باستعمال أنبوب أجوف مرن في نهايته بالون صغير، وتسمَّى هذه العملية قسطرة البالون.

أُعطي في كلٍّ من السؤالين الآتيين الشكل الأصلي وصورته الناتجة عن تمدد مركزه النقطة P، عيِّن موقع النقطة P، وأوجد معامل مقياس التمدد .

24)



25)



26) **تمثيلات متعددة :** في هذه المسألة ستستقصي التمدد الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله سالب.

a) **هندسيًّا :** مثِّل بيانيًّا $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه $A(-2, 0), B(2, -4), C(4, 2)$. ثم ارسم صورته الناتجة عن تمددٍ مركزه نقط الأصل ومعامله -2

b) **هندسيًّا :** ارسم صورة المثلث الناتجة عن تمدد معامله $-\frac{1}{2}$ ، وآخر معامله -3

c) **جدوليًّا :** اكتب إحداثيات صورة المثلث الناتجة عن كل تمدد في جدول.

d) **لفظيًّا :** ضع تخمينًا حول قاعدة التمدد الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله سالب.

e) **تحليليًّا :** اكتب قاعدة التمدد الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله $-k$.

f) **لفظيًّا :** عبِّر عن التمدد الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله سالب بتحويل هندسي مركب.

مسائل مهارات التفكير العليا

27) **اكتشف الخطأ :** يحاول كلٌّ من متعب وسعود أن يصف تأثير القيمة السالبة لمعامل مقياس التمدد في صورة الشكل الرباعي $WXYZ$، فأيهما تفسيره صحيح؟ اشرح تبريرك.

28) **تحدٍّ :** أوجد معادلة صورة المستقيم $y = 4x - 2$ الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله 1.5

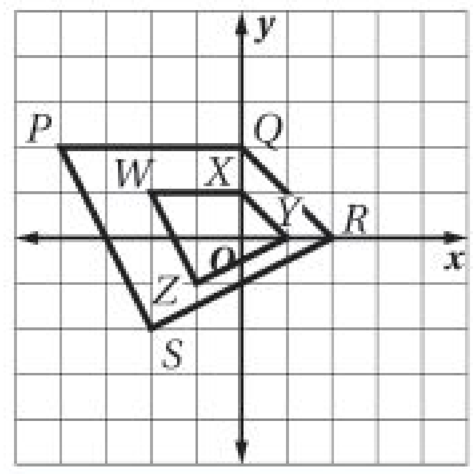
29) **اكتب :** هل تحفظ التحويلات الهندسية جميعها التوازي والاستقامة ؟ اشرح إجابتك .

30) **مسألة مفتوحة:** ارسم مثلثًا في المستوى الإحداثي، ثم كبِّره بحيث تصبح مساحة صورته الناتجة عن التمدد أربعة أمثال مساحته الأصلية، وحدّد معامل مقياس التمدد ومركزه.

31) **اكتب:** حدّد التحويلات الهندسية التي تكون نتيجتها مطابقة للشكل الأصلي، وتلك التي تكون نتيجتها مشابهة للشكل الأصلي، وتلك التي تكون نتيجتها الشكل الأصلي نفسه. اشرح إجابتك.

تدريب على اختبار

32) ما معامل مقياس التمدد من الشكل $PQRS$ إلى الشكل $WXYZ$؟



33) يرسم توفيق نسخةً من لوحة فنية معروضة في متحف فني. إذا كان عرض اللوحة 3 ft، وطولها 6 ft، وقرر أن يستعمل معامل مقياس تمدد قدره 0.25، فما أبعاد ورقة الرسم بالبوصات المناسبة لإنجاز رسمه؟

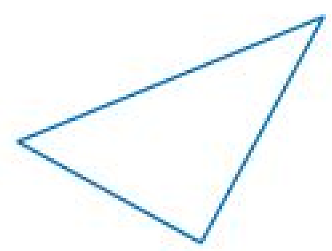
A $4 \text{ in} \times 8 \text{ in}$ **C** $6 \text{ in} \times 12 \text{ in}$

B $8 \text{ in} \times 16 \text{ in}$ **D** $10 \text{ in} \times 20 \text{ in}$

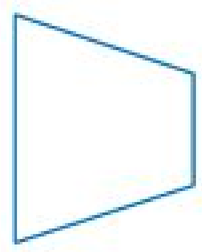
مراجعة تراكمية

بيّن ما إذا كان للشكل محور تماثل أم لا، وإذا كان كذلك فارسم محاور التماثل جميعها، وحدد عددها في كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس 7-5)

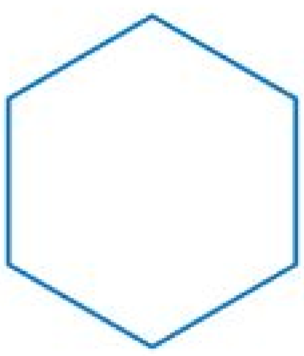
34)



35)

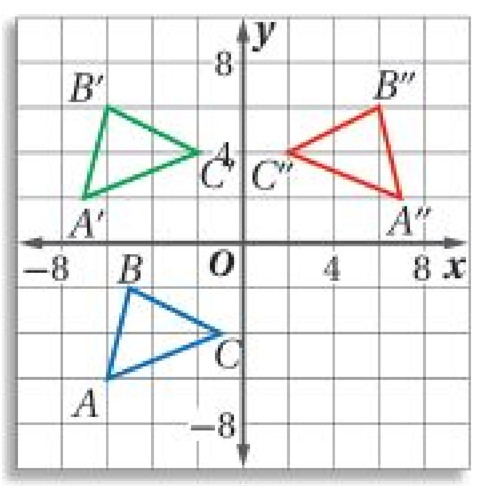


36)

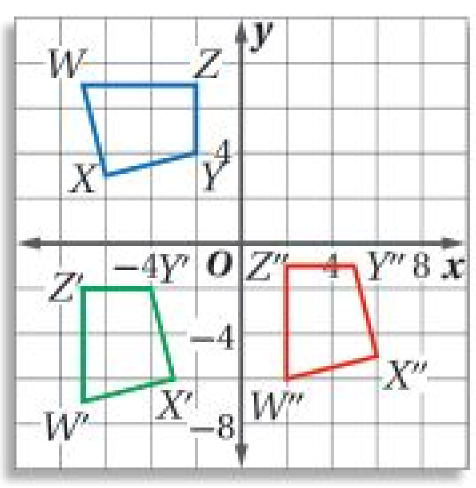


صِفِ التحويل الهندسي المركب الذي ينقل الشكل إلى صورته النهائية في كلٍّ من السؤالين الآتيين: (الدرس 7-4)

37)



38)



استعد للدرس اللاحق

أوجد قيمة x في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

39) $58.9 = 2x$

40) $\frac{108.6}{\pi} = x$

41) $228.4 = \pi x$

42) $\frac{336.4}{x} = \pi$

دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

الانعكاس (الدرس 1-7)

- الانعكاس هو تحويل هندسي يقلب الشكل حول مستقيمٍ يُسمّى محور الانعكاس.

الإزاحة (الانسحاب) (الدرس 2-7)

- الإزاحة (الانسحاب) هي تحويل هندسي ينقل نقاط الشكل جميعها المسافة نفسها وفي الاتجاه نفسه .

الدوران (الدرس 3-7)

- يحرِّك الدوران كل نقطة في الشكل الأصلي بزاوية محددة وفي اتجاه محدد حول نقطة ثابتة.

تركيب التحويلات الهندسية (الدرس 4-7)

- يمكن تمثيل الإزاحة بتركيب انعكاسين متتابعين حول مستقيمين متوازيين، ويمكن تمثيل الدوران بتركيب انعكاسين متتابعين حول مستقيمين متقاطعين .

التماثل (الدرس 5-7)

- التماثل: يكون الشكل ممَاثلًا إذا وُجد انعكاس أو إزاحة أو دوران أو تركيب إزاحة وانعكاس ينتج عنه صورة منطبقة على الشكل نفسه.
- رُتبة التماثل هي عدد المرات التي تنطبق فيها صورة الشكل على الشكل نفسه في أثناء تدويره من $0°$ إلى $360°$
- مقدار التماثل هو قياس أصغر زاوية يدور بها الشكل حتى ينطبق على نفسه.

التمدد (الدرس 6-7)

- يكبّر التمدد الشكل أو يصغّره بنسبة محدّدة.

المطويات منظم أفكار

تأكد من أن **المفاهيم الأساسية** مدوَّنة في مطويتك.

مفردات أساسية

محور الانعكاس (ص. 390)

مركز الدوران (ص. 405)

زاوية الدوران (ص. 405)

التحويل الهندسي المركب (ص. 413)

التماثل (ص. 426)

التماثل حول محور (الأشكال الثنائية الأبعاد) (ص. 426)

محور التماثل (ص. 426)

التماثل الدوراني (ص. 427)

مركز التماثل (ص. 427)

رتبة التماثل (ص. 427)

مقدار التماثل (ص. 427)

التماثل حول مستوى (ص. 428)

التماثل حول محور (الأشكال الثلاثية الأبعاد) (ص. 428)

التمدد (ص. 432)

تحويل التشابه (ص. 432)

معامل مقياس التمدد (ص. 432)

اختبار المفردات

اختر المفردة التي تجعل الجملة صحيحة:

1) عند إجراء تحويل هندسي على شكلٍ ما، ثم إجراء تحويل هندسي آخر على صورته، فإن هذه العملية تسّمى (تحويلًا هندسيًّا مركبًا ، رتبة الدوران).

2) إذا طُوِي شكل حول خطٍّ مستقيمٍ، وانطبق نصفاه أحدهماعلى الآخر تمامًا، فإن خط الطي يسمى (محور الانعكاس ، محور التماثل).

3) التحويل الهندسي الذي يكبّر الشكل أو يصغّره بنسبة محددة هو (التمدد ، الدوران).

4) يُطلق على عدد المرات التي ينطبق فيها الشكل على نفسه في أثناء تدويره من $0°$ إلى $360°$ اسم (مقدار التماثل ، رتبة التماثل).

5) يبعد (محور الانعكاس ، مركز التمدد) المسافة نفسها عن كل نقطة في الشكل وصورتها.

6) يكون الشكل (تحويلًا هندسيًّا مركبًا ، متماثلًا) إذا وجد انعكاس أو إزاحة أو دوران أو تركيب إزاحة وانعكاس ينتج عنه صورة منطبقة على الشكل نفسه.

7) يمكن تمثيل (الإزاحة ، الدوران) بتركيب انعكاسين متتابعين حول مستقيمين متقاطعين.

8) لتدوير نقطةٍ ما بزاوية ($90°$ ، $180°$) عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب الإحداثي y في -1، وبدّل الإحداثيين x , y.

9) (التمدد ، الانعكاس) هو تحويل تطابق.

10) يكون للشكل (محور تماثل ، تماثل دوراني) إذا كانت صورته الناتجة عن دوران حول مركزه بزاوية بين $0°$ و $360°$ هي الشكل نفسه.

الفصل 7 دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

7-1 الانعكاس (ص 390–397)

مثِّل بيانيًّا كل شكل مما يأتي وصورته بالانعكاس المحدد.

11) المستطيل $ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(2, -4), B(4, -6), C(7, -3), D(5, -1)$ ؛ الانعكاس حول المحور x .

12) المثلث XYZ الذي إحداثيات رؤوسه: $X(-1, 1), Y(-1, -2), Z(3, -3)$ ؛ الانعكاس حول المحور y .

13) الشكل الرباعي $QRST$ الذي إحداثيات رؤوسه: $Q(-4, -1), R(-1, 2), S(2, 2), T(0, -4)$ ؛ بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.

14) **فن:** يصنع عامر منحوتتين ليضعهما على جانبَي ممرٍّ في حديقة منزله، بحيث تكون إحداهما انعكاسًا للأخرى حول المستقيم الذي يقسم هذا الممر طوليًّا إلى نصفين. انسخ الشكل في دفترك، وارسم محور الانعكاس.

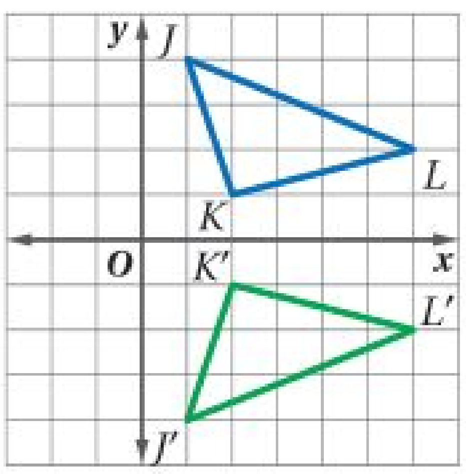
مثال 1

مثِّل بيانيًّا $\triangle JKL$ الذي إحداثيات رؤوسه: $J(1, 4), K(2, 1), L(6, 2)$ ، ومثِّل صورته بالانعكاس حول المحور x .

اضرب الإحداثي y لكل رأس في -1

$$(x, y) \rightarrow (x, -y)$$
$$J(1, 4) \rightarrow J'(1, -4)$$
$$K(2, 1) \rightarrow K'(2, -1)$$
$$L(6, 2) \rightarrow L'(6, -2)$$

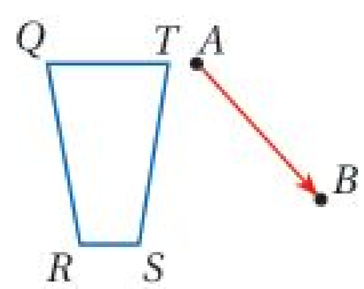
ثم مثِّل بيانيًّا $\triangle JKL$ وصورته $\triangle J'K'L'$.



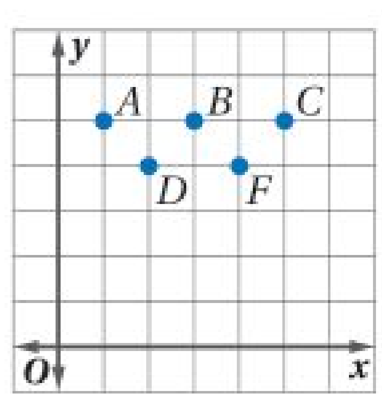
7-2 الإزاحة (الانسحاب) (ص 398–403)

15) مثِّل بيانيًّا $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(0, -1), B(2, 0), C(3, -3)$ ، وارسم صورته الناتجة عن إزاحة مقدارها 5 وحدات إلى اليسار و4 وحدات إلى أعلى.

16) انقل إلى دفترك الشكل المجاور ثم ارسم صورة الشكل $QRST$ الناتجة عن الإزاحة التي تنقل A إلى B .



17) يمثل الشكل المجاور مواقع 5 لاعبين في ملعب، تحرك كل من اللاعبين B, F, C وحدتين إلى أسفل، في حين تحرك اللاعب A خمس وحدات إلى اليمين ووحدة واحدة إلى أسفل. ارسم المواقع النهائية للاعبين .



مثال 2

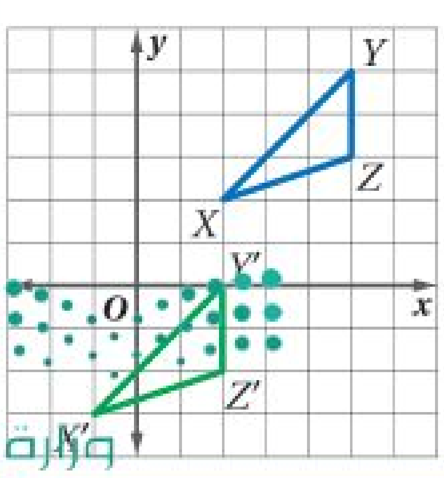
مثِّل بيانيًّا $\triangle XYZ$ الذي إحداثيات رؤوسه: $X(2, 2), Y(5, 5), Z(5, 3)$ ، وارسم صورته الناتجة عن إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليسار و 5 وحدات إلى أسفل.

يمكن تمثيل هذه الإزاحة بالقاعدة $(x, y) \rightarrow (x-3, y-5)$.

أوجد صورة كل رأس.

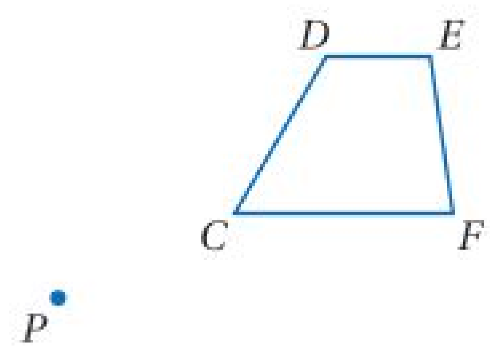
$$(x, y) \rightarrow (x-3, y-5)$$
$$X(2, 2) \rightarrow X'(-1, -3)$$
$$Y(5, 5) \rightarrow Y'(2, 0)$$
$$Z(5, 3) \rightarrow Z'(2, -2)$$

ثم مثِّل بيانيًّا $\triangle XYZ$ وصورته $\triangle X'Y'Z'$.



7-3 الدوران (ص 405–411)

18) استعمل منقلةً ومسطرةً لرسم صورة $CDEF$ الناتجة عن دوران بزاوية $50°$ حول النقطة P.



مثّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الدوران بالزاوية المحددة حول نقطة الأصل في كلٍّ ممَّا يأتي:

19) $\triangle MNO$ الذي إحداثيات رؤوسه: $M(-2, 2), N(0, -2), O(1, 0)$؛ $180°$

20) $\triangle DGF$ الذي إحداثيات رؤوسه: $D(1, 2), G(2, 3), F(1, 3)$؛ $90°$

مثال 3

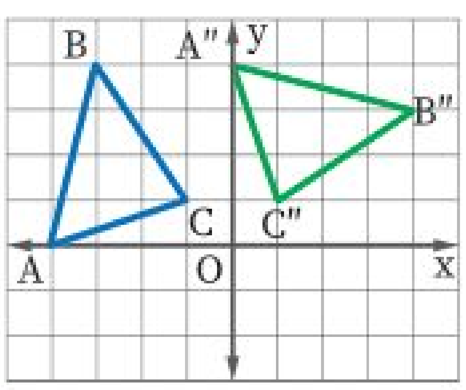
مثِّل بيانيًّا $\triangle ABC$ وصورته الناتجة عن دوران بزاوية $270°$ حول نقطة الأصل، حيث: $A(-4, 0), B(-3, 4), C(-1, 1)$.

إحدى طرائق حل هذه المسألة هي إجراء دوران بزاوية $180°$، ثم دوران آخر بزاوية $90°$؛ لذا اضرب الإحداثيَّين x, y في -1

$$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$$
$$A(-4, 0) \rightarrow A'(4, 0)$$
$$B(-3, 4) \rightarrow B'(3, -4)$$
$$C(-1, 1) \rightarrow C'(1, -1)$$

ثم اضرب الإحداثي y لكل رأس في -1، وبدِّل موقعَي الإحداثيين x, y.

$$(x, y) \rightarrow (-y, x)$$
$$A'(4, 0) \rightarrow A''(0, 4)$$
$$B'(3, -4) \rightarrow B''(4, 3)$$
$$C'(1, -1) \rightarrow C''(1, 1)$$



ثم مثّل بيانيًّا $\triangle ABC$ وصورته $\triangle A''B''C''$.

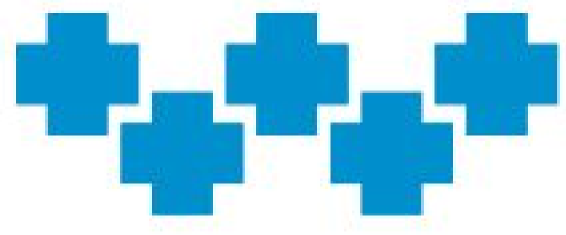
7-4 تركيب التحويلات الهندسية (ص 413–420)

مثّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن التحويل الهندسي المركّب المحدد في كلٍّ ممَّا يأتي:

21) $\overline{CD}$، حيث $C(3, 2), D(1, 4)$، انعكاس حول المستقيم $y = x$، ثم دوران $270°$ حول نقطة الأصل.

22) $\overline{GH}$، حيث $G(-2, -3), H(1, 1)$، إزاحة مقدارها 4 وحدات إلى اليمين ووحدتان إلى أعلى، ثم انعكاس حول المحور x.

23) **أنماط:** كوّن عبد السلام النمط الآتي لإطار لوحة، صِف تركيب التحويلات الهندسية الذي استعمله لتكوين هذا النمط.



مثال 4

إحداثيات طرفَي $\overline{RS}$ هما $R(4, 3)$, $S(1, 1)$، مثّل بيانيًّا $\overline{RS}$ وصورتها الناتجة عن إزاحة مقدارها 5 وحدات إلى اليسار ووحدة واحدة إلى أسفل، ثم دوران حول نقطة الأصل بزاوية $180°$

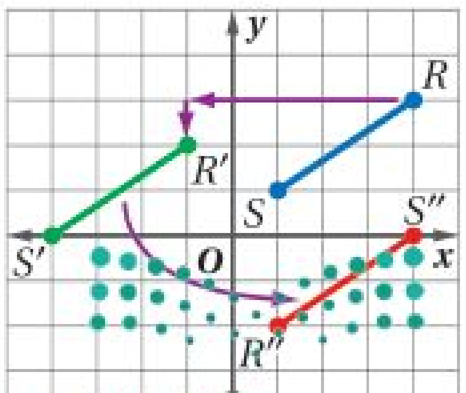
الخطوة 1: يمكن التعبير عن الإزاحة بالقاعدة $(x, y) \rightarrow (x-5, y-1)$

$$(x, y) \rightarrow (x-5, y-1)$$
$$R(4, 3) \rightarrow R'(-1, 2)$$
$$S(1, 1) \rightarrow S'(-4, 0)$$

الخطوة 2: الدوران حول نقطة الأصل بزاوية $180°$

$$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$$
$$R'(-1, 2) \rightarrow R''(1, -2)$$
$$S'(-4, 0) \rightarrow S''(4, 0)$$

الخطوة 3: مثّل بيانيًّا $\overline{RS}$ وصورتها $\overline{R''S''}$.

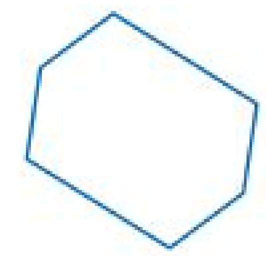


دليل الدراسة والمراجعة

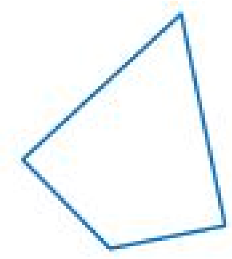
7-5 التماثل (ص 426–431)

بيِّن ما إذا كان للشكل محور تماثل أم لا، وإذا كان كذلك، فارسم محاور التماثل جميعها، وحدّد عددها.

24)

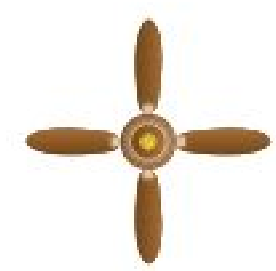


25)



بيّن ما إذا كان للشكل تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك، فعيِّن مركز التماثل، وحدد رتبته ومقداره في كلٍّ ممَّا يأتي:

26)



27)

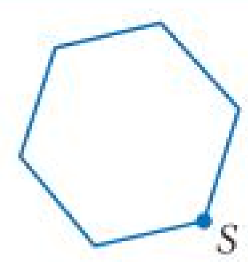
مثال 5

بيِّن ما إذا كان الشكل الآتي متماثلًا حول مستوى أو حول محور أو كلاهما أو غير ذلك .

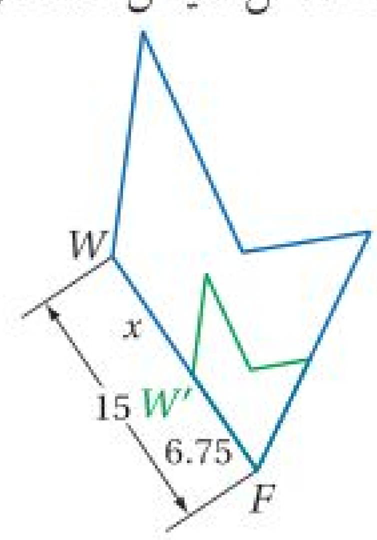
المصباح متماثل حول مستوى، وكذلك حول محور.

7-6 التمدد (ص 432–438)

28) استعمل مسطرةً لرسم صورة الشكل الناتجة عن تمدد مركزه S ومعامله $k = 1.25$.



29) حدد ما إذا كان التمدد من الشكل W إلى W' تكبيرًا أم تصغيرًا، ثم أوجد معامل مقياس التمدد وقيمة x.



30) **نوادِ علمية :** استعمل أعضاء نادي الرياضيات جهاز العرض لرسم لوحة على الجدار، إذا كان عرض اللوحة الأصلية 6 in ، وعرض صورتها على الجدار 4 ft ، فما معامل التكبير؟

مثال 6

مثل بيانيًّا الشكل $ABCD$ وصورته الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله 0.5 ، إذا كانت: $A(0, 0), B(0, 8), C(8, 8), D(8, 0)$.

اضرب الإحداثيين x, y لكل رأس في معامل مقياس التمدد 0.5

$(x, y) \rightarrow (0.5x, 0.5y)$

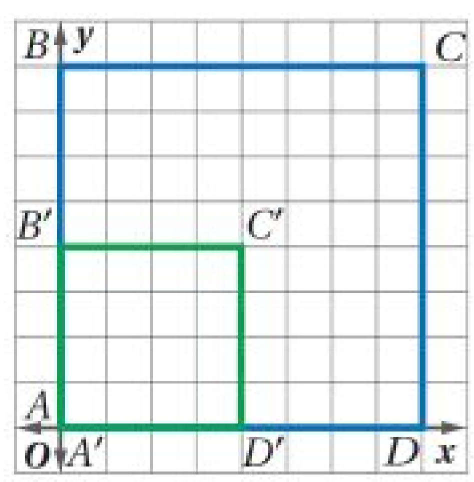
$A(0, 0) \rightarrow A'(0, 0)$

$B(0, 8) \rightarrow B'(0, 4)$

$C(8, 8) \rightarrow C'(4, 4)$

$D(8, 0) \rightarrow D'(4, 0)$

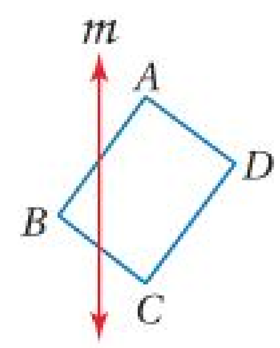
مثِّل $ABCD$ وصورته $A'B'C'D'$ بيانيًّا.



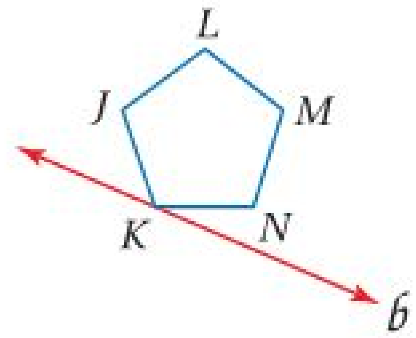
اختبار الفصل

ارسم صورة كلٍّ من الشكلين الآتيين بالانعكاس حول المستقيم المُعطى:

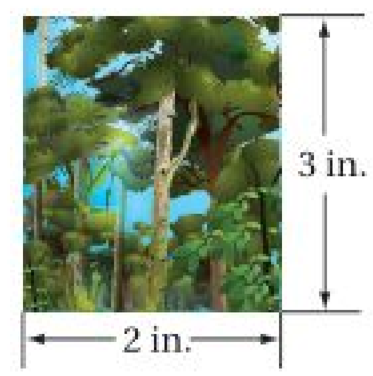
1)



2)

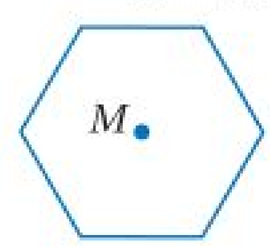


3) **حدائق:** يريد فؤاد أن يكبّر الصورة الآتية للحديقة؛ لتصبح أبعادها 4 in في 6 in، مستعملًا آلة نسخ تكبر الصورة حتى 150% فقط وبنسب على شكل أعداد كلية، أوجد نسبتين على شكل عددين كليين يمكن استعمالهما لتكبير الصورة، بحيث تصبح أبعادها أقرب ما يمكن إلى 4 in في 6 in، ولا تزيد عن ذلك.

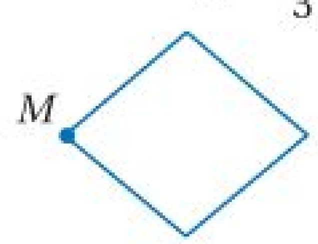


استعمل مسطرةً لرسم صورة الشكل الناتجة عن تمدد مركزه M ومعامله k المحدّد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

4) $k = 1.5$



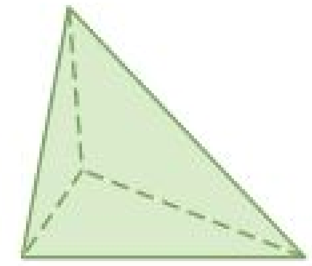
5) $k = \frac{1}{3}$



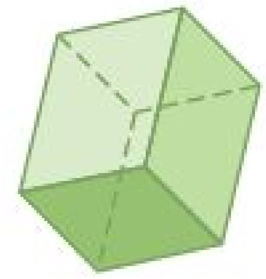
6) **مدينة الألعاب:** يركب أحمد في إحدى الألعاب التي تدور عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول مركزها °60 كل ثانيتين، فبعد كم ثانية يعود أحمد إلى النقطة التي انطلق منها؟

بيِّن ما إذا كان كلٌّ من الشكلين الآتيين متماثلًا حول مستوى أو حول محور أو كلاهما أو غير ذلك.

7)



8)



مثِّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن التحويل الهندسي المحدّد في كلٍّ ممَّا يأتي:

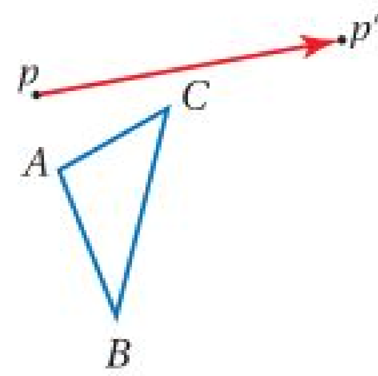
9) $\square FGHJ$، حيث: $F(-1, 4), G(4, 4), H(3, 1), J(-2, 1)$؛ انعكاس حول المحور x.

10) $\triangle ABC$، حيث: $A(0, -1), B(2, 0), C(3, -3)$؛ إزاحة مقدارها 5 وحدات إلى اليسار و4 وحدات إلى أعلى.

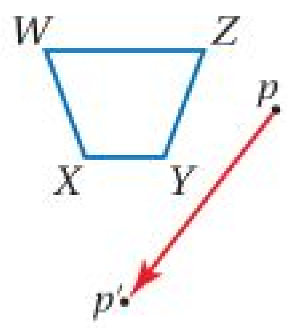
11) الشكل الرباعي $WXYZ$، حيث: $W(2, 3), X(1, 1), Y(3, 0), Z(5, 2)$؛ دوران بزاوية °180 حول نقطة الأصل.

ارسم صورة الشكل الناتجة عن الإزاحة التي تنقل P إلى P' في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

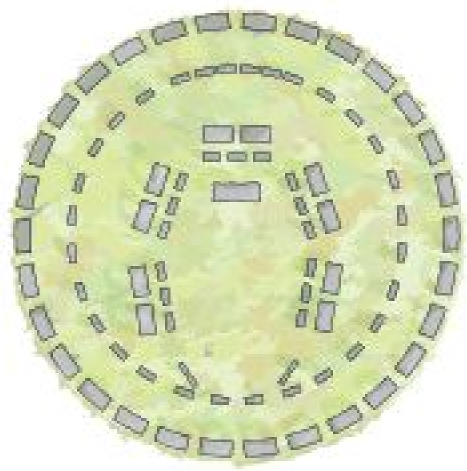
12)



13)



14) **آثار:** يبيّن الشكل الآتي مخطط موقع أثري، فما رتبة تماثل الحلقة الخارجية؟ وما مقداره؟



15) **اختيار من متعدد:** ما التحويل الهندسي أو تركيب التحويلات الهندسية الذي يمثِّله الشكل الآتي؟

A تمدد

B إزاحة ثم انعكاس

C دوران

D إزاحة

الفصل 7 الإعداد للاختبارات

الحل عكسيًّا

في معظم المسائل تُعطى مجموعة من الشروط أو الحقائق، ويُطلب إليك إيجاد النتيجة النهائية. ومع ذلك قد تُعطى في بعض المسائل النتيجة النهائية، ويطلب إليك إيجاد أمر ما وقع مبكرًا في موقف المسألة. ولحل مثل هذه المسائل، يتعين عليك أن تستعمل استراتيجية الحل عكسيًّا.

استراتيجيات الحل عكسيًّا

الخطوة 1

ابحث عن كلمات مفتاحية تشير إلى أنه يلزم أن تحل المسألة عكسيًّا.
بعض الكلمات المفتاحية الممكنة:

- ماذا كان المقدار **الأصلي** ...؟
- ماذا كانت القيمة **قبل** ...؟
- ماذا كان المقدار **في البداية** ...؟

الخطوة 2

تراجع عن الخطوات المعطاة في نص المسألة.

- اكتب قائمة بالخطوات المتتابعة من البداية، وصولًا إلى النتيجة النهائية.
- ابدأ من النتيجة النهائية، وتتبع الخطوات بترتيبٍ عكسيٍّ.
- "تراجع" عن كل خطوة باستعمال العمليات العكسية حتى تصل إلى القيمة الأصلية.

الخطوة 3

تحقق من الحل إذا سمح الوقت .

- تأكد من أن إجابتك منطقية.
- ابدأ من إجابتك واتبع الخطوات بالترتيب المُعطى في المسألة؛ لتتأكد من الوصول إلى النتيجة النهائية نفسها.

مثال

حُلَّ المسألة الآتية، وبيِّن خطوات الحل، وستصحح الإجابة، وتحدد الدرجة المُستحقّة باستعمال سُلَّم تقدير الإجابات القصيرة المجاور.

تستعمل سعاد برمجيةً حاسوبيةً؛ لتتدرب على التحويلات الهندسية في المستوى الإحداثي. بدأت من نقطة وأزاحتها 4 وحدات إلى أعلى و 8 وحدات إلى اليسار. ثم أجرت انعكاسًا للصورة الناتجة حول المحور x . وأخيرًا أجرت تمددًا للصورة الناتجة معامله 0.5 ، ومركزه نقطة الأصل، فكانت إحداثيات الصورة النهائية $(-4 ,-1)$. ماذا كانت الإحداثيات الأصلية لهذه النقطة؟

سلم تقدير

المعيار	الدرجة
صحيح كاملًا: الإجابة صحيحة، ومعها تفسير تام يوضح كل خطوةٍ من خطوات الحل .	2
صحيح جزئيًّا: • الإجابة صحيحة، ولكن التفسير غير تام . • الإجابة غير صحيحة، ولكن التفسير صحيح.	1
غير صحيح مطلقًا: لا توجد إجابة، أو أنها غير منطقية.	0

اقرأ المسألة بعناية. لقد أُعطيت مجموعة تحويلات هندسية متعاقبة لنقطةٍ في المستوى الإحداثي، وتعلم إحداثيات الصورة النهائية لهذه النقطة، وطُلب إليك أن تجد الإحداثيات الأصلية. حُلّ المسألة بالعمل عكسيًّا؛ تراجع عن كل تحويل هندسي بترتيب عكسي؛ كي تجد الإحداثيات الأصلية.

مثال للإجابة التي تستحق درجتين:

> النقطة الأصلية ← إزاحة ← انعكاس ← تمدد ← النتيجة النهائية.
>
> ابدأ بإحداثيات النتيجة النهائية وحُلّ عكسيًّا.
>
> للتراجع عن التمدد الذي معامله 0.5 ، نفّذ تمددًا معامله 2 : $(-1, -4) \rightarrow (-1 \times 2, -4 \times 2) = (-2, -8)$
>
> للتراجع عن الانعكاس الأول، أوجد صورة النقطة بالانعكاس حول المحور x : $(-2, -8) \rightarrow (-2, 8)$
>
> وللتراجع عن الإزاحة الأولى، نفّذ إزاحة مقدارها 4 وحدات إلى أسفل و8 وحدات إلى اليمين: $(-2, 8) \rightarrow (-2 + 8, 8 - 4) = (6, 4)$
>
> إذن الإحداثيات الأصلية لهذه النقطة هي $(6, 4)$.

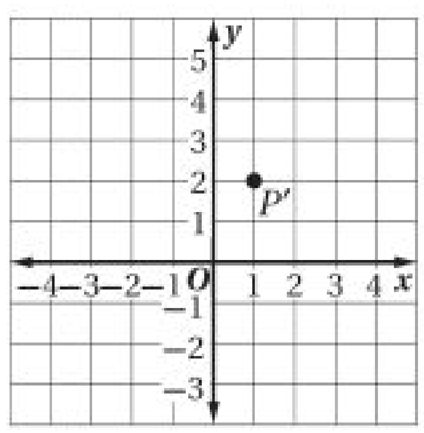
لقد كانت الخطوات والحسابات والتبريرات كلها واضحة في هذه الإجابة، وتوصل الطالب إلى الإجابة الصحيحة، ولذلك تستحق هذه الإجابة درجتين.

تمارين ومسائل

حُلّ كلًّا من المسائل الآتية، وبيّن خطوات الحل، وستصحح الإجابات وتحدد الدرجة المُستحقة باستعمال سُلّم تقدير الإجابة القصيرة الوارد في الصفحة السابقة.

1) حطّت حشرة طائرة على شبكة إحداثية ثم قفزت عبر المحور x، ثم قفزت عبر المحور y على هيئة انعكاسين متعاقبين، ثم سارت 9 وحدات إلى اليمين و 4 وحدات إلى أسفل، فكان موقعها النهائي عند النقطة $(4, -1)$، فما إحداثيات النقطة التي حطّت عليها الحشرة في البداية؟

2) في الشبكة الإحداثية الآتية تظهر الصورة النهائية لنقطةٍ تم تدويرها بزاوية $90°$ في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، ثم نُفّذ عليها تمدد معامله 2 ، ثم أُزيحت 7 وحدات إلى اليمين. ماذا كانت إحداثيات الموقع الأصلي لهذه النقطة؟

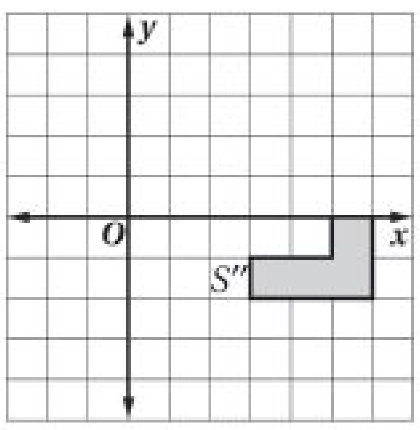


3) إذا كانت $A''(2, -2)$، $B''(-5, -4)$ إحداثيات طرفي $\overline{A''B''}$ تمثل الصورة النهائية لـ $\overline{AB}$، بعد إجراء انعكاس لها حول المحور x، ثم إزاحة وفقًا للقاعدة: $(x, y) \rightarrow (x - 1, y + 2)$ فأيٌّ ممّا يأتي يمثل إحداثيَّي نقطة منتصف $\overline{AB}$.

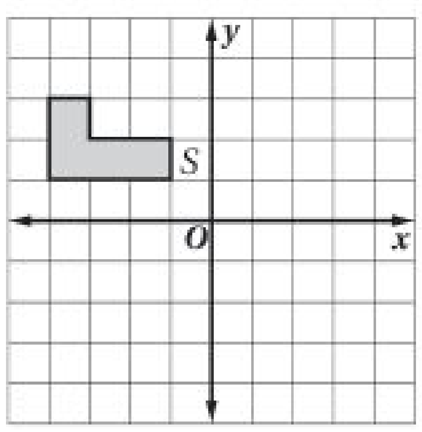
A $\left(\frac{-3}{2}, -3\right)$ **C** $\left(-\frac{1}{2}, -5\right)$

B $\left(-\frac{1}{2}, 5\right)$ **D** $(-1, 0)$

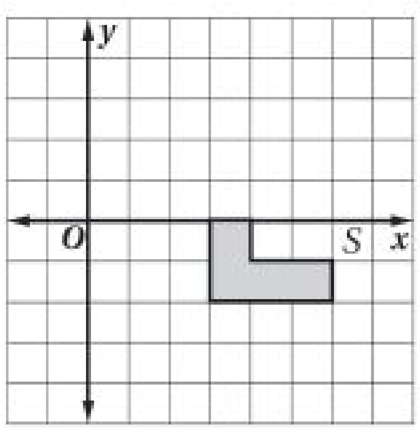
4) الشكل S'' يمثل الصورة النهائية الناتجة للشكل S، بعد إجراء التحويلات الهندسية التالية عليه: انعكاس حول المحور y، ثم انسحاب 3 وحدات إلى أسفل ووحدتين إلى اليمين.



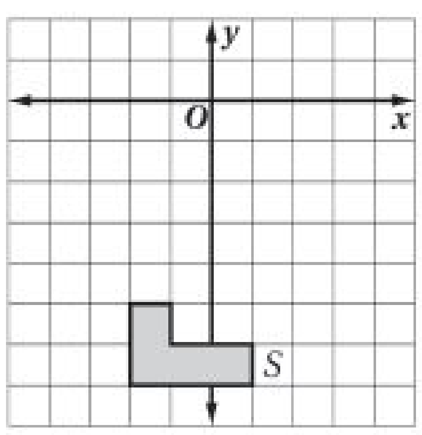
A



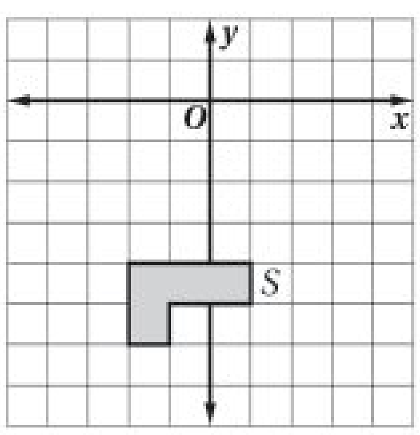
C



B



D



الفصل 7 اختبار تراكمي

أسئلة الاختيار من متعدد

اقرأ كل سؤالٍ ممَّا يأتي، ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة:

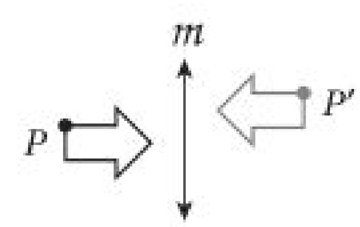
1) إحداثيات النقطة N هي $(-3, 4)$، ما إحداثيات صورتها الناتجة عن الانعكاس حول المحور y ؟

A $N'(-3, 4)$ **C** $N'(4, 3)$

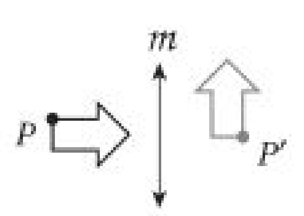
B $N'(-4, 3)$ **D** $N'(-4, -3)$

2) أيُّ الأشكال الآتية يبيّن نتيجة انعكاس الشكل p حول المستقيم m ثم إزاحة إلى أعلى؟

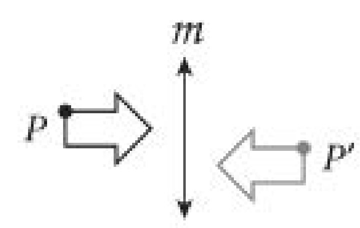
A



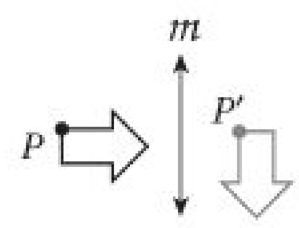
C



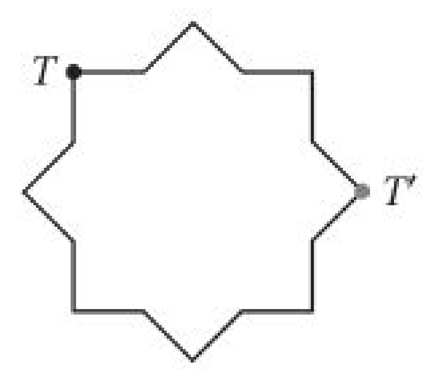
B



D



3) ما الزاوية التي تم تدوير الشكل الآتي بها حول مركز تماثله حتى تنتقل النقطة T إلى النقطة T' ؟



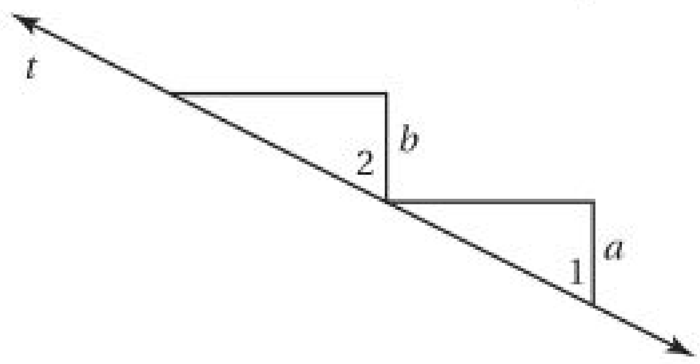
A $90°$ **C** $135°$

B $120°$ **D** $225°$

إرشادات للاختبار

السؤال 3: كم رأسًا لهذه النجمة؟ اقسم °360 على عدد الرؤوس؛ لإيجاد زاوية الدوران من نقطةٍ إلى النقطة التالية.

4) **المعطيات:** $a \parallel b$



أيُّ العبارات الآتية تبرّر استنتاج أن $\angle 2 \cong \angle 1$؟

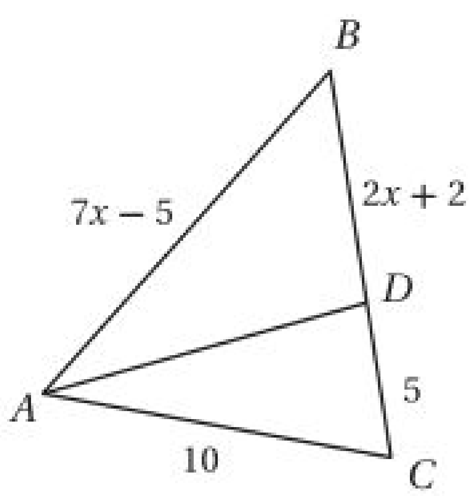
A إذا كان $a \parallel b$ وقطعهما المستقيم t ، فإن الزاويتين المتبادلتين خارجيًّا متطابقتان .

B إذا كان $a \parallel b$ وقطعهما المستقيم t ، فإن الزاويتين المتبادلتين داخليًّا متطابقتان.

C إذا كان $a \parallel b$ وقطعهما المستقيم t ، فإن الزوايتين المتناظرتين متطابقتان .

D إذا كان $a \parallel b$ وقطعهما المستقيم t ، فإن الزاويتين المتقابلتين بالرأس متطابقتان .

5) في $\triangle ABC$ ، $\overline{AD}$ تنصف $\angle CAB$.
ماقيمة x ؟



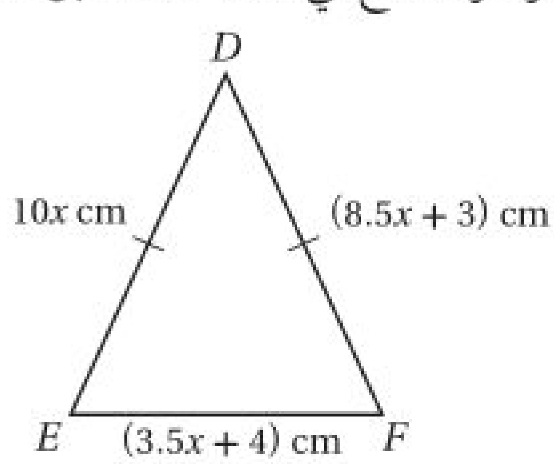
A 1.5

B 5

C 1.4

D 3

6) أيٌّ ممَّا يأتي هو طول ضلع في المثلث المتطابق الضلعين DEF؟



A 2 cm **C** 9 cm

B 8 cm **D** 11 cm

7) أي المضلعات الآتية فيه زوجان فقط من الأضلاع المتتالية المتطابقة؟

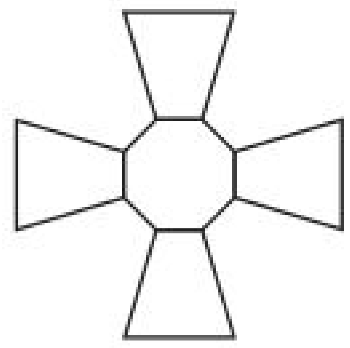
A شكل الطائرة الورقية **C** المعين

B متوازي الأضلاع **D** شبه المنحرف

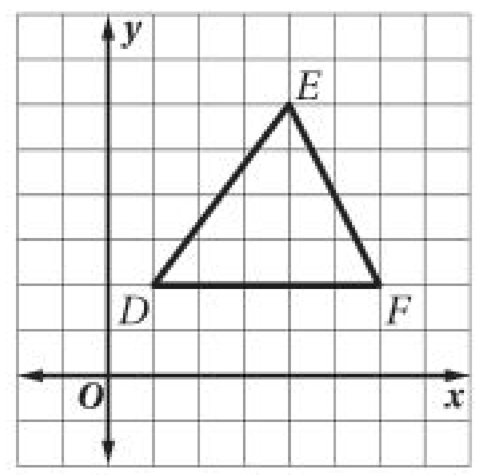
أسئلة ذات إجابات قصيرة

اكتب إجابتك في ورقة الإجابة.

8) بيّن ما إذا كان للشكل الآتي تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك، فعيّن مركز التماثل وحدد رتبته ومقداره .



9) مثّل بيانيًّا الصورة الناتجة عن عمل تمدد للشكل الآتي مركزه نقطة الأصل ومعامله 1.5

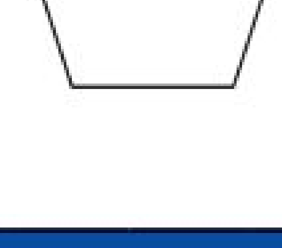


10) أكمل العبارة الآتية:

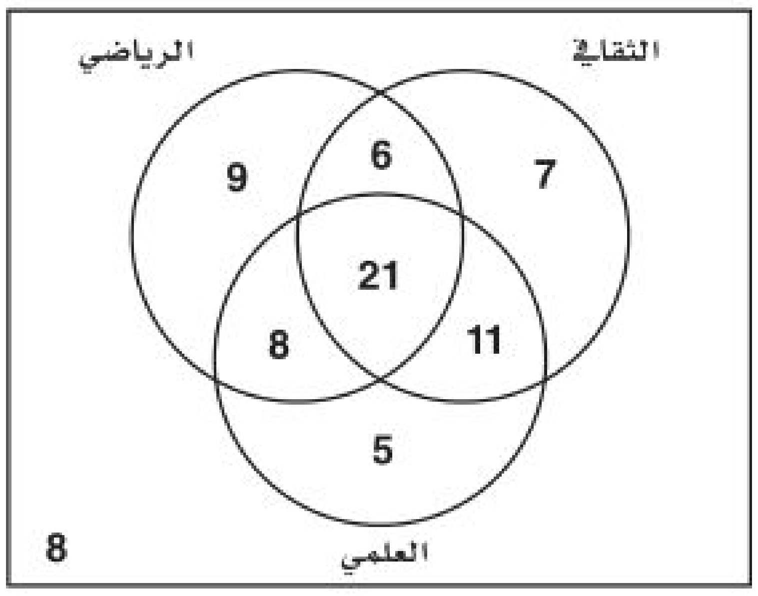
"بحسب نظرية منصف الزاوية، إذا وقعت نقطة على منصف زاوية، فإنها ....

11) ما صورة النقطة $A(-4, 3)$ الناتجة عن الإزاحة التي تنقل $B(-1, -2)$ إلى $B'(4, -3)$ ؟

12) ما قياس الزاوية الداخلية للمضلع الخماسي المنتظم؟



13) سُئل 57 طالبًا عن النشاطات المدرسية التي يشاركون فيها، ومُثِّلت النتائج بشكل ڤن الآتي:



ما عدد الطلاب الذين يشاركون في النشاطين (الثقافي والعلمي)، ولا يشاركون في النشاط الرياضي؟

أسئلة ذات إجابات مطولة

اكتب إجابتك في ورقة الإجابة مبينًا خطوات الحل.

14) يدرس أحمد الهندسة المعمارية، وقد رسم مخططًا لمتنزه رؤوسه: $Q(2, 2)$, $R(-2, 4)$, $S(-3, -3)$, $T(3, -4)$، ولكنه لاحظ أن اتجاه رسمه غير صحيح، حيث ظهر الشمال في أسفل الرسم بدلًا من أن يكون في أعلى الرسم.

a) ما التحويل الذي يستطيع أحمد تطبيقه على مخططه ليجعل الشمال في أعلى الرسم؟

b) هل هذا هو التحويل الوحيد الذي يجعل الشمال في أعلى الرسم؟ وضح إجابتك.

c) ارسم الشكل الرباعي $QRST$، واكتب إحداثيات رؤوسه.

d) ارسم الصورة $Q'R'S'T'$ بعد التحويل، واكتب إحداثيات رؤوسها.

e) فسِّر كيف يمكن لأحمد أن يعرف إحداثيات رؤوس الصورة من دون استعمال المستوى الإحداثي.

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

إذا لم تستطع الإجابة عن السؤال..	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
فعد إلى الدرس..	7-1	7-4	7-3	مهارة سابقة	6-4	مهارة سابقة	مهارة سابقة	7-5	7-6	مهارة سابقة	7-2	مهارة سابقة	مهارة سابقة	7-3

الفصل 8

الدائرة
Circle

فيما سبق:

درستُ أنواعًا من القطع المستقيمة الخاصة، وعلاقات الزوايا في المثلث.

والآن:

- أتعرّف العلاقة بين الزوايا المركزية، والأقواس، والزوايا المحيطية في الدائرة.
- أعرّف القاطع والمماس وأستعملهما.
- أعرّف الدائرة أو أصفها؛ مستعملاً معادلتها.

لماذا؟

علوم: الشكل الحقيقي لقوس المطر هو دائرة كاملة، ويُسمَى الجزء الذي يمكن رؤيته منها فوق الأفق قوسًا.

المطويات منظم أفكار

الدائرة: اعمل هذه المطوية لمساعدتك على تنظيم ملاحظاتك حول الفصل 8، مبتدئًا بتسع أوراق A4 .

1. ارسم دائرة قطرها 18 cm في كل ورقة باستعمال الفرجار.
2. قُصّ هذه الدوائر.
3. ثبّت الأوراق من الجهة اليمنى كما في الشكل، واكتب عنوان الفصل على الورقة الأولى.
4. اكتب أرقام الدروس في أعلى الصفحة في بقية الأوراق.

التهيئة للفصل 8

تشخيص الاستعداد:

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

أوجد النسبة المئوية من العدد المعطى في كلّ ممّا يأتي:

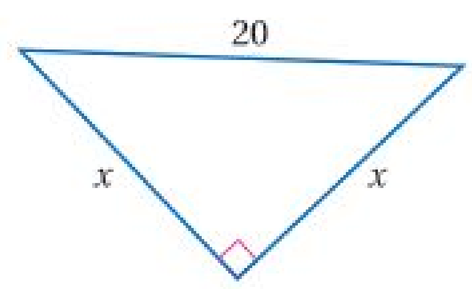
1) 26% من 500   **2)** 79% من 623

3) 19% من 82   **4)** 10% من 180

5) 92% من 90   **6)** 65% من 360

7) **مطاعم:** يُضيف مطعمٌ رسم توصيل قدره 5% على كل طلبٍ. ما رسم خدمة توصيل وجبة غداء سعرها 65 ريالًا؟

8) أوجد قيمة x، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب عُشر.



9) **نجارة:** أراد أحمد أن يضع دعامة على لوح من الخشب، كما في الشكل أدناه. ما طول هذه الدعامة؟

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية باستعمال القانون العام مقربًا إجابتك إلى أقرب عُشر إذا لزم ذلك.

10) $5x^2 + 4x - 20 = 0$

11) $x^2 = x + 12$

12) **ألعاب نارية:** أطلقت ألعاب نارية في الهواء احتفاءً باليوم الوطني، ولم تنفجر إحدى هذه الألعاب، فارتدت إلى الأرض، إذا كان ارتفاعها عن سطح الأرض بعد t ثانية يُعطى بالمعادلة $d = 80t - 16t^2$، فبعد كم ثانية وصلت سطح الأرض؟

مراجعة سريعة

مثال 1

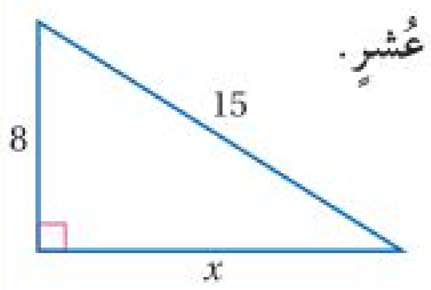
أوجد قيمة 15% من 35

15% من $35 = (0.15)(35)$	تحويل النسبة المئوية إلى كسر عشري
$= 5.25$	بالضرب

إذن 15% من 35 تساوي 5.25

مثال 2

أوجد قيمة x مقربًا إجابتك إلى أقرب عُشرٍ.

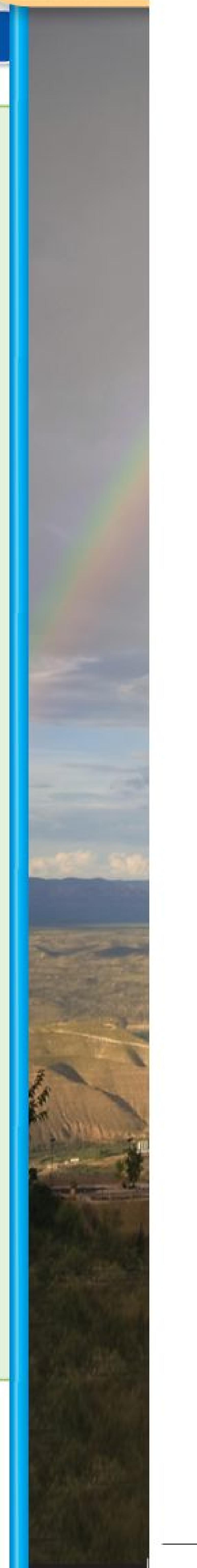


$a^2 + b^2 = c^2$	نظرية فيثاغورس
$x^2 + 8^2 = 15^2$	بالتعويض
$x^2 + 64 = 225$	بالتبسيط
$x^2 = 161$	خاصية الطرح للمساواة
$x = \sqrt{161} \approx 12.7$	

مثال 3

حُلّ المعادلة: $x^2 + 3x - 40 = 0$، باستعمال القانون العام مقربًا إجابتك إلى أقرب عُشرٍ.

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	القانون العام
$= \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-40)}}{2(1)}$	بالتعويض
$= \dfrac{-3 \pm \sqrt{169}}{2}$	بالتبسيط
$= -8$ أو 5	بالتبسيط



رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

8-1 الدائرة ومحيطها
Circle and Circumference

فيما سبق:

درستُ عناصر الأشكال الرباعية واستعملتها.

(مهارة سابقة)

والآن:

- أتعرف عناصر الدائرة وأستعملها.
- أحل مسائل تتضمّن محيط الدائرة.

المفردات:

الدائرة circle

المركز center

نصف القطر radius

الوتر chord

القطر diameter

الدوائر المتطابقة congruent circles

الدوائر المتحدة في المركز concentric circles

محيط الدائرة circumference

باي (π) pi

المضلع المُحاط بدائرة inscribed with a circle

الدائرة الخارجية circumscribed

لماذا؟

إذا ركبت العجلة الدوَّارة، فإن بُعدك عن مركز دورانها يكون ثابتًا، فإذا كانت المسافة بين موقعك ومركزها 44 ft ، فيمكنك أن تجد المسافة التي تقطعها في دورة واحدة.

القطع المستقيمة في الدائرة **الدائرة** هي المحل الهندسي لجميع النقاط في المستوى، والتي تبعد بُعدًا ثابتًا عن نقطةٍ معلومةٍ تُسمّى **مركز** الدائرة. وعادة ما تسمى الدائرة بمركزها، والشكل المجاور يبين الدائرة C التي يمكن أن يرمز لها بالرمز $\odot C$.

الدائرة C أو $\odot C$

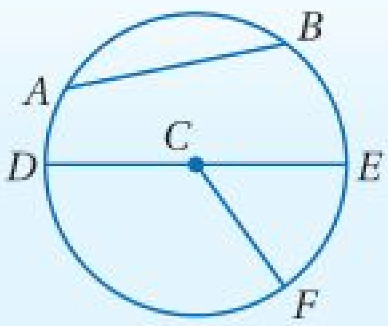
وللقطع المستقيمة التي تقطع الدائرة أسماء خاصة.

مفهوم أساسي — قطع مستقيمة خاصة في الدائرة

أضف إلى مطويتك

نصف القطر هو قطعة مستقيمة يقع أحد طرفَيها على المركز والطرف الآخر على الدائرة.

أمثلة: $\overline{CD}$, $\overline{CE}$, $\overline{CF}$ أنصاف أقطار في $\odot C$.



الوتر هو قطعة مستقيمة يقع طرفاها على الدائرة.

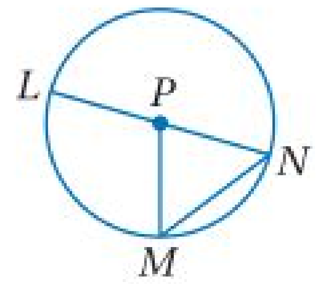
أمثلة: $\overline{AB}$, $\overline{DE}$ وتران في $\odot C$.

القطر هو وتر يمر بمركز الدائرة، ويتكوّن من نصفَي قطرين يقعان على استقامة واحدة.

مثال: $\overline{DE}$ قطرٌ في $\odot C$ ، ويتكون القطر $\overline{DE}$ من نصفَي القطرين $\overline{CE}$, $\overline{CD}$ الواقعين على استقامةٍ واحدةٍ .

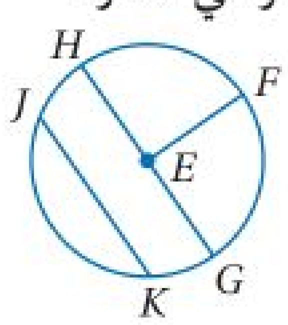
مثال 1 تعيين القطع المستقيمة في الدائرة

a) سمِّ الدائرة، وعيّن نصف قطرٍ فيها.



مركز الدائرة هو P؛ إذن يمكن تسميتها الدائرة P ، أو $\odot P$. تظهر في الشكل ثلاثة أنصاف أقطار هي: $\overline{PL}, \overline{PN}, \overline{PM}$.

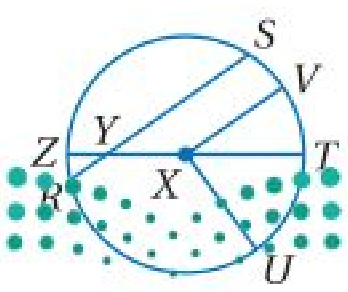
b) عيّن وترًا وقطرًا في الدائرة.



يظهر في هذه الدائرة وتران هما: $\overline{HG}$, $\overline{JK}$ ، ويمر $\overline{HG}$ بالمركز؛ إذن $\overline{HG}$ قطر .

✓ تحقق من فهمك

1) سمِّ الدائرة، ونصف قطر، ووترًا، وقطرًا فيها.



ومن تعريف الدائرة، فإن المسافة بين مركز الدائرة وأيّ نقطة عليها ثابتة دائمًا؛ إذن أنصاف أقطار الدائرة جميعها متطابقة . وبما أن قطر الدائرة يتكوّن من نصفَي قطرين؛ فإن أقطار الدائرة جميعها متطابقة.

مفهوم أساسي — العلاقة بين القطر ونصف القطر

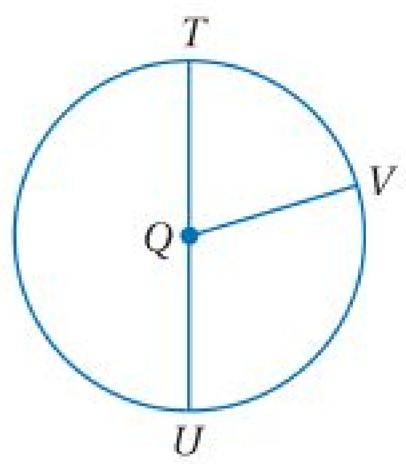
أضف إلى مطويتك

إذا كان نصف قطر الدائرة r وقطرها d فإن:

صيغة نصف القطر: $r = \frac{d}{2}$ أو $r = \frac{1}{2}d$ صيغة القطر: $d = 2r$

مثال 2 — إيجاد نصف القطر والقطر

في الشكل المجاور إذا كان $QV = 8\,\text{cm}$، فأوجد قطر $\odot Q$؟



$d = 2r$ صيغة القطر

$= 2(8) = 16$ بالتعويض والتبسيط

القطر في $\odot Q$ يساوي $16\,\text{cm}$.

تحقق من فهمك : في الشكل المجاور

2A) إذا كان $TU = 14\text{ ft}$، فأوجد نصف قطر $\odot Q$؟

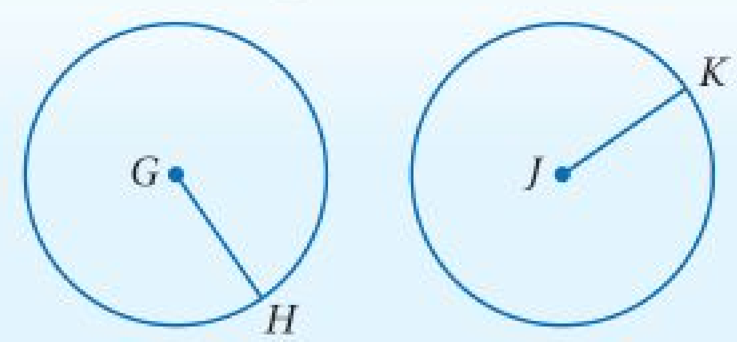
2B) إذا كان $QT = 11\text{ m}$، فأوجد QU .

كما هو الحال في الأشكال الأخرى، يمكن أن تكون أزواج الدوائر متطابقة، أو أن تربطهما بعض العلاقات الخاصة.

مفهوم أساسي — أزواج الدوائر

أضف إلى مطويتك

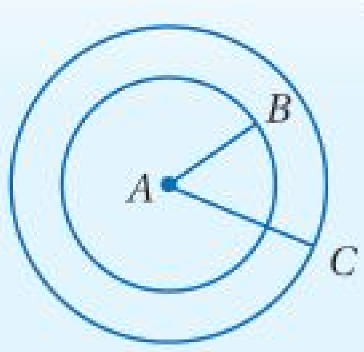
تكون **الدائرتان متطابقتين** إذا وفقط إذا كان نصفا قطريهما متطابقين.



مثال: $\overline{GH} \cong \overline{JK}$ ؛ إذن $\odot G \cong \odot J$

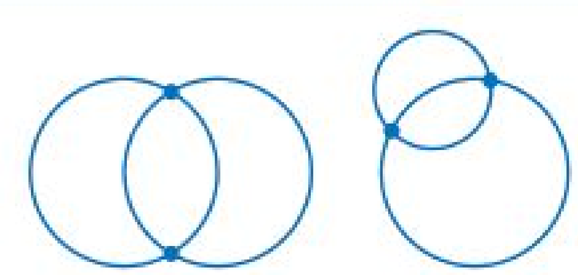
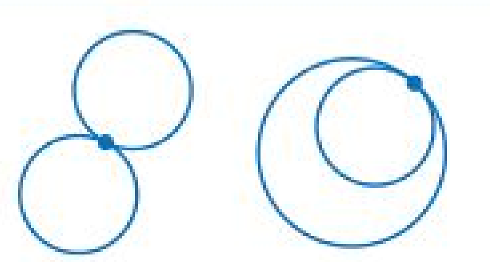
الدائرتان المتحدتان في المركز

هما الدائرتان اللتان تقعان في المستوى نفسه، ولهما المركز نفسه.



مثال: $\odot A$ التي نصف قطرها $\overline{AB}$ و $\odot A$ التي نصف قطرها $\overline{AC}$ دائرتان متحدتان في المركز.

إذا تقاطعت دائرتان، فإنه يمكن أن تتقاطعا بطريقتين مختلفتين، والجدول التالي يوضح الأوضاع المختلفة بين دائرتين.

تقاطع في نقطتين	تقاطع في نقطة واحدة	لا يوجد تقاطع
		

قراءة الرياضيات

القطر ونصف القطر: تستعمل الكلمتان (القطر، ونصف القطر) للتعبير عن الطول وعن القطع المستقيمة. وبما أن للدائرة عدة أنصاف أقطار وعدة أقطار أيضًا، فإن قولنا نصف قطر أو قطر يعني القياس، وليس القطعة المستقيمة.

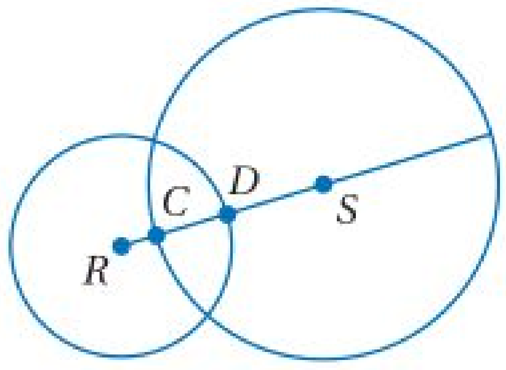
تنبيه !

القطر أو نصف القطر: في المسائل التي تتضمن الدوائر، انتبه جيدًا إلى ما إذا كانت المعطيات تتعلق بنصف قطر الدائرة أم بقطرها.

القطعة المستقيمة التي تصل بين مركزَي دائرتين متقاطعتين يمكن أن تحوي نصفَي قطرَي الدائرتين.

مثال 3 إيجاد قياسات في دائرتين متقاطعتين

في الشكل المجاور قطر $\odot S$ يساوي 30 وحدةً، وقطر $\odot R$ يساوي 20 وحدةً، و DS يساوي 9 وحداتٍ، أوجد CD.



بما أن قطر $\odot S$ يساوي 30، فإن $CS = 15$. و $\overline{CD}$ هو جزء من نصف القطر $\overline{CS}$.

$CD + DS = CS$ مسلّمة جمع القطع المستقيمة

$CD + 9 = 15$ بالتعويض

$CD = 6$ بطرح 9 من كلا الطرفين

تحقق من فهمك

3) استعمل الشكل أعلاه لإيجاد RC.

محيط الدائرة: **محيط الدائرة** هو طول المنحنى المغلق الذي يُمثّل الدائرة، ويُرمز له بالرمز C، وتُعرف النسبة $\frac{C}{d}$ بأنها عدد غير نسبي يُسمّى **باي (π)**، ويساوي 3.14 أو $\frac{22}{7}$ تقريبًا، ويمكن استنتاج صيغتين لحساب محيط الدائرة باستعمال هذا التعريف.

$\frac{C}{d} = \pi$ تعريف π باي

$C = \pi d$ بضرب كلا الطرفين في d

$C = \pi(2r)$ بالتعويض $d = 2r$

$C = 2\pi r$ بالتبسيط

مفهوم أساسي: محيط الدائرة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كان قطر الدائرة يساوي d، أو نصف قطرها يساوي r، فإن محيطها C يساوي حاصل ضرب القطر في π، أو مثلَي نصف القطر في π.

الرموز: $C = \pi d$ أو $C = 2\pi r$

مثال 4 من واقع الحياة: إيجاد محيط الدائرة

تنس: أوجد محيط المهبط الدائري الموصوف في فقرة الربط مع الحياة المجاورة.

$C = \pi d$ صيغة محيط الدائرة

$= \pi(79)$ بالتعويض

$= 79\pi$ بالتبسيط

≈ 248.19 باستعمال الحاسبة

محيط المهبط الدائري يساوي 79π ft، أو 248.19 ft تقريبًا.

الربط مع الحياة

أُقيمت في عام 2005 م مباراة دولية في التنس على مهبط للطائرات العمودية فوق قمة فندق برج العرب في الإمارات العربية المتحدة، ويرتفع هذا المهبط الدائري 700 ft تقريبًا عن سطح الأرض، وقطره 79 ft

تحقق من فهمك

أوجد محيط كلٍّ من الدائرتين الآتيتين مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ.

4A) نصف القطر يساوي 2.5 cm

4B) القطر يساوي 16 ft

يمكنك استعمال إحدى صيغتَي محيط الدائرة، لحساب قطر الدائرة؛ ونصف قطرها إذا عُلِم محيطها.

مثال 5 إيجاد القطر ونصف القطر

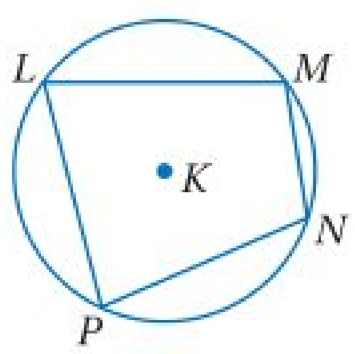
أوجد القطر ونصف القطر مقرّبين إلى أقرب جزءٍ من مئة للدائرة التي محيطها 106.4 mm

$C = \pi d$	صيغة محيط الدائرة	$r = \frac{1}{2}d$	صيغة نصف القطر
$106.4 = \pi d$	بالتعويض	$\approx \frac{1}{2}(33.87)$	$d \approx 33.87$
$\frac{106.4}{\pi} = d$	بقسمة كلا الطرفين على π	≈ 16.94 mm	باستعمال الحاسبة
$33.87 \text{ mm} \approx d$	باستعمال الحاسبة		

تحقق من فهمك

5) إذا كان محيط دائرة يساوي 77.8 cm، فأوجد قطر الدائرة ونصف قطرها مقرّبين إلى أقرب جزء من مئة.

يكون المضلّع **محاطًا بدائرة** إذ وقعت رؤوسه جميعها على الدائرة.
وتسمى هذه الدائرة **الدائرة الخارجية**.



- الشكل الرباعي $LMNP$ مُحاط بـ $\odot K$.
- $\odot K$ دائرة خارجية للمضلع $LMNP$.

مثال 6 من اختبار

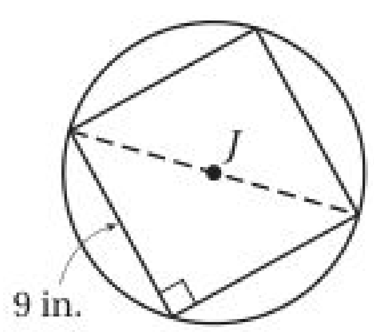
إجابة قصيرة: إذا كانت الدائرة J تحيط بمربعٍ طول ضلعه 9 in، وقطره يمثِّل قطرها، فما القيمة الدقيقة لمحيط $\odot J$.

اقرأ سؤال الاختبار

احسب قطر الدائرة، واستعمله لحساب محيطها.

حُلّ سؤال الاختبار

ارسم شكلًا توضيحيًّا فيه: قطر المربع يُمثّل قطرًا للدائرة أيضًا، ويكون وترًا لمثلث قائم الزاوية.



$a^2 + b^2 = c^2$	نظرية فيثاغورس
$9^2 + 9^2 = c^2$	بالتعويض
$162 = c^2$	بالتبسيط
$9\sqrt{2} = c$	بأخذ الجذر التربيعي الموجب لكلا الطرفين

قطر الدائرة يساوي $9\sqrt{2}$ in

أوجد المحيط بدلالة π ، بتعويض $9\sqrt{2}$ لقيمة d في الصيغة $C = \pi d$.

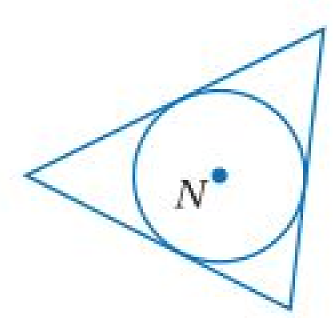
محيط الدائرة يساوي $9\pi\sqrt{2}$ in

تحقق من فهمك

أوجد القيمة الدقيقة لمحيط الدائرة في كلٍّ ممَّا يأتي:

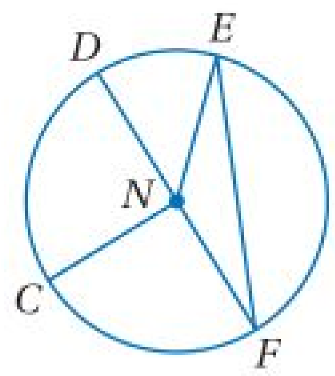
6A) إذا كانت تحيط بمثلثٍ قائم الزاوية طولا ساقيه 7 m , 3 m

6B) إذا كانت مُحاطَة بمربعٍ طول ضلعه 10 ft



تأكد

المثالان 1, 2 **استعمل الدائرة في الشكل المجاور؛ للإجابة عن الأسئلة الآتية:**



1) سمِّ هذه الدائرة.

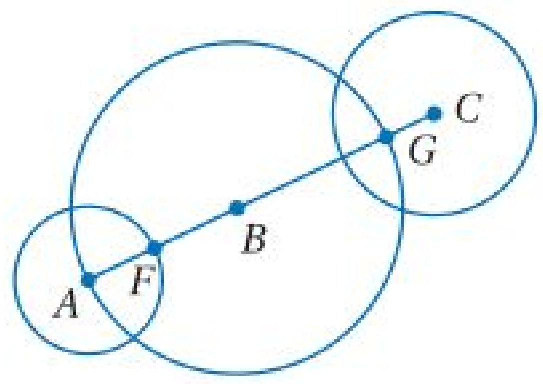
2) عيّن كلًّا ممّا يأتي:

a) وترًا　　**b)** قطرًا　　**c)** نصف قطر

3) إذا كان $CN = 8\text{ cm}$ ، فأوجد DN .

4) إذا كان $EN = 13\text{ ft}$ ، فما قطر الدائرة؟

المثال 3 **قطر كلٍّ من $\odot C$ ، $\odot B$ ، $\odot A$ يساوي 8 cm ، 18 cm ، 11 cm على الترتيب. أوجد كلًّا من القياسين الآتيين:**



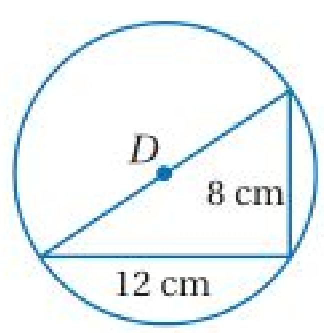
5) FG

6) FB

المثال 4 **7)** **عجلة دوارة:** عُد إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. ما قطر هذه العجلة الدوارة؟ وما محيطها؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك.

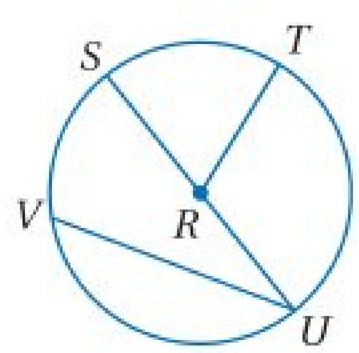
المثال 5 **8)** **بركة سباحة:** محيط بركة السباحة الدائرية في الشكل المجاور يساوي 56.5 ft تقريبًا، ما قطر هذه البركة؟ وما نصف قطرها؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.

المثال 6 **9)** **إجابة قصيرة:** المثلث القائم الزاوية في الشكل المجاور مُحاط بالدائرة D ، أوجد القيمة الدقيقة لمحيط $\odot D$.



تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2 **عُد إلى $\odot R$ في الشكل المجاور؛ للإجابة عن الأسئلة الآتية.**



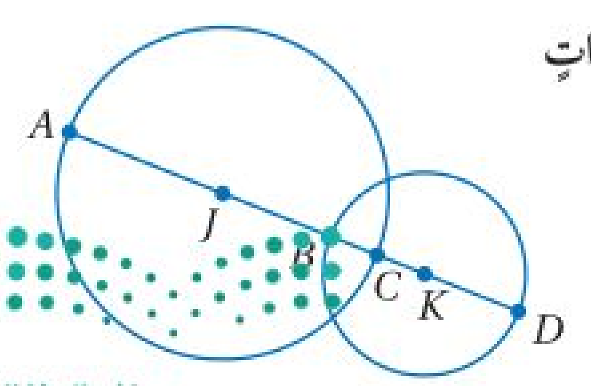
10) ما مركز الدائرة؟

11) عيّن وترًا يكون قطرًا.

12) هل $\overline{VU}$ نصف قطر؟ برِّر إجابتك.

13) إذا كان $SU = 16.2\text{ cm}$ ، فأوجد RT؟

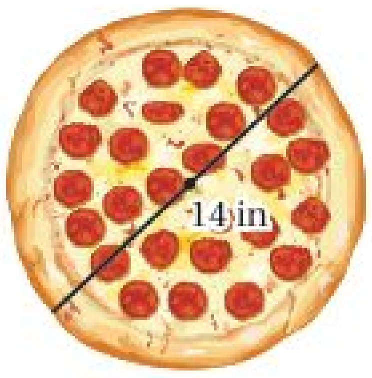
المثال 3 **إذا كان نصف قطر $\odot J$ يساوي 10 وحداتٍ، ونصف قطر $\odot K$ يساوي 8 وحداتٍ و BC يساوي 5.4 وحداتٍ، فأوجد كل قياسٍ ممّا يأتي:**



14) CK　　**15)** AB

16) JK　　**17)** AD

المثال 4 18) **بيتزا:** أوجد نصف قطر قرص البيتزا ومحيطها في الشكل المجاور، مقرّبًا الإجابة إلى أقرب جزء من مئة، إذا لزم ذلك.



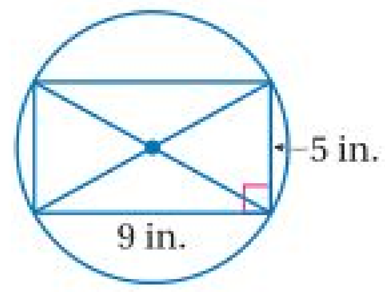
19) **دراجات:** قطر إطار دراجة يساوي 26 in، أوجد نصف قطر الإطار ومحيطه، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة، إذا لزم ذلك.

المثال 5 **أوجد قطر الدائرة ونصف قطرها إذا عُلِم محيطها في كلٍّ ممّا يأتي، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.**

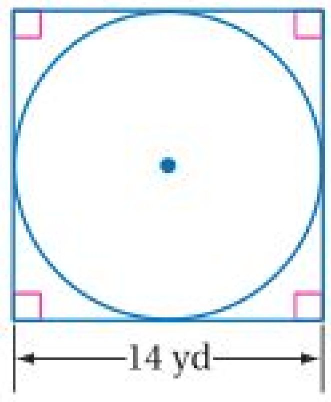
20) $C = 18$ in 21) $C = 124$ ft 22) $C = 375.3$ cm 23) $C = 2608.25$ m

المثال 6 **أوجد القيمة الدقيقة لمحيط كلٍّ من الدوائر الآتية باستعمال المضلّع الذي تحيط به أو الذي يُحيط بها.**

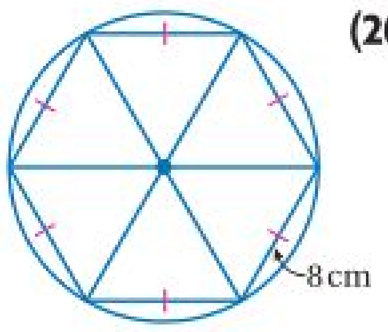
24)



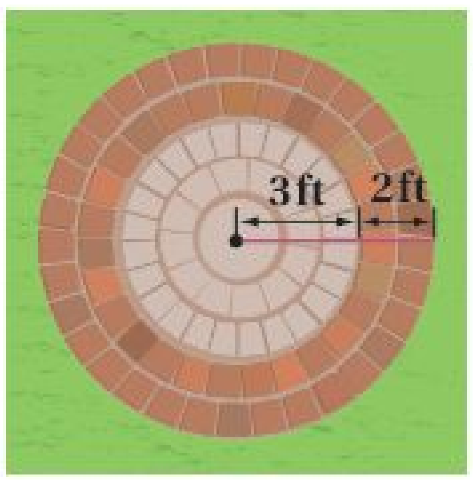
25)



26)



27) **فناء:** أراد مصطفى أن يرصف فناءً، دائري الشكل، كما في الشكل المجاور.



a) ما المحيط التقريبي لهذا الفناء؟

b) إذا غيَّر مصطفى خطة إنشاء هذا الفناء، بحيث يصبح محيط الدائرة الداخلية 25 ft تقريبًا، فكم يكون نصف قطر الدائرة مقرّبًا إلى أقرب قدمٍ؟

في كلٍّ من الأسئلة 31–28، عُلِم نصف قطر أو قطر أو محيط دائرة. أوجد القياسين المجهولين مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.

28) $d = 8\frac{1}{2}$ in, $r = \underline{?}$, $C = \underline{?}$ 29) $r = 11\frac{2}{5}$ ft, $d = \underline{?}$, $C = \underline{?}$

30) $C = 35x$ cm, $d = \underline{?}$, $r = \underline{?}$ 31) $r = \frac{x}{8}$, $d = \underline{?}$, $C = \underline{?}$

32) **حدائق:** يُراد إنشاء رصيف عرضه 4 m حول بركة دائرية الشكل محيطها 68 m، فما محيط الرصيف؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.

33) **تمثيلات متعدّدة:** في هذا السؤال ستستكشف أثر تغيير الأبعاد في الدائرة.

a) **هندسيًّا:** مستعملًا الفرجار ارسم ثلاث دوائر متحدة المركز، بحيث تكون نسبة طول نصف قطر كل دائرة إلى طول نصف قطر الدائرة الأكبر منها تساوي $\frac{1}{2}$

b) **جدوليًّا:** احسب محيط كلٍّ من الدوائر السابقة مقربًا إلى أقرب جزء من مئة، وسجّل في جدول نصف القطر والمحيط لكلٍّ منها.

c) **لفظيًّا:** فسّر لماذا تكون الدوائر الثلاث متشابهة هندسيًّا.

d) **لفظيًّا:** ضع تخمينًا حول النسبة بين محيطَي الدائرتين، عندما تكون النسبة بين نصفَي قطريهما تساوي 2 .

e) **تحليليًّا:** معامل التشابه من $\odot A$ إلى $\odot B$ يساوي $\frac{b}{a}$. اكتب معادلة تربط محيط $\odot A$ (C_A) بمحيط $\odot B$ (C_B) .

f) **عدديًا:** إذا كان معامل التشابه من $\odot A$ إلى $\odot B$ يساوي $\frac{1}{3}$، ومحيط $\odot A$ يساوي 12 in، فما محيط $\odot B$؟

قراءة الرياضيات

الرمزان C_A و C_B: يقرأ الرمز C_A محيط الدائرة A، ويقرأ الرمز C_B محيط الدائرة B.

34) **رياضة:** يظهر في الصورة أدناه مضمار جري.

a) كم تزيد المسافة التي يقطعها شخص يركض دورة واحدة على المسار الخارجي للمضمار، عن المسافة التي يقطعها شخص يركض دورة واحدة على المسار الداخلي؟

b) كم دورة تقريبًا يجب أن يركض شخص على المسار الخارجي للمضمار؛ ليقطع ميلًا واحدًا؟

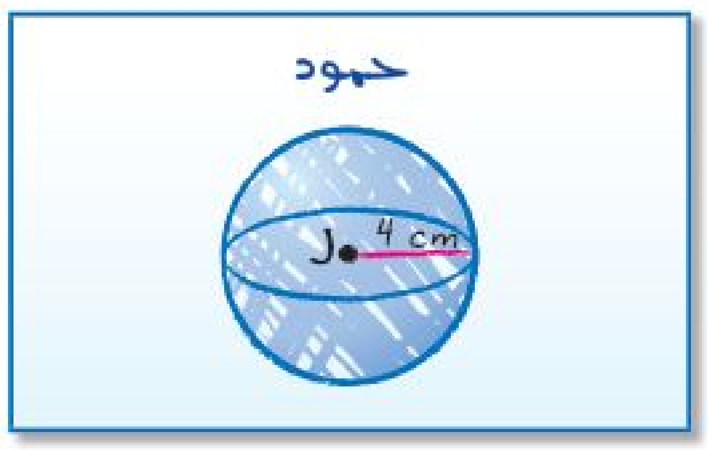
الربط مع الحياة

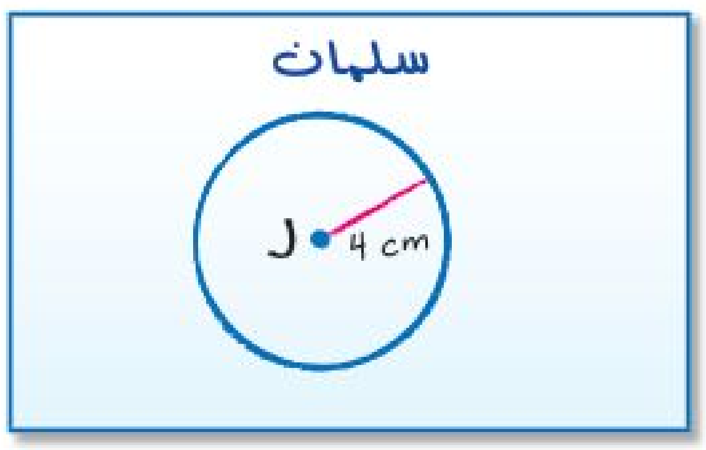
يمكن أن يحرق الشخص الذي يزن 68 kg حوالي 240 سعرًا حراريًا، إذا ركض بسرعة 9 km/h مدة 20 min، وذلك أكثر من مثلَي عدد السعرات التي يحرقها إذا سار بسرعة 7.2 km/h المدة الزمنية نفسها.

مسائل مهارات التفكير العليا

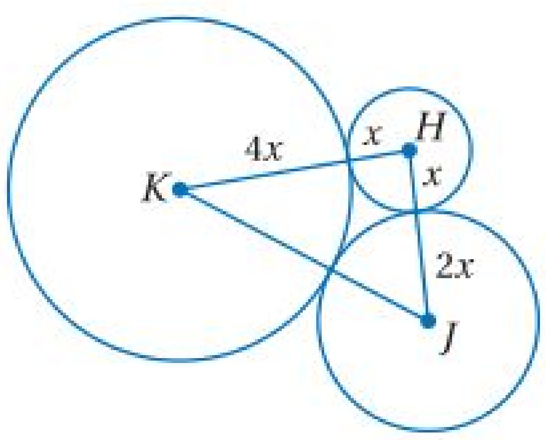
35) **مسألة مفتوحة:** ارسم دائرة يكون محيطها بين 8 cm و 12 cm، ما نصف قطر هذه الدائرة؟

36) **اكتشف الخطأ:** رسم كلّ من حمود وسلمان شكلًا يُمثّل مجموعة النقاط التي تبعد 4 cm عن النقطة J، فهل إجابة أيٍّ منهما صحيحة؟ برِّر إجابتك.



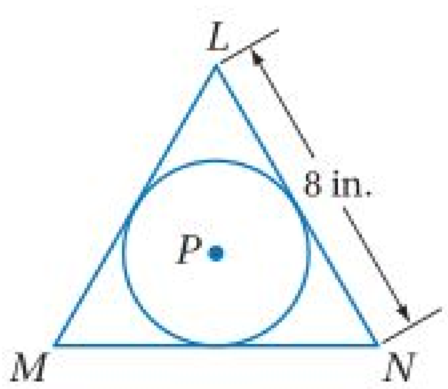


37) **تحدٍّ:** مجموع محيطات الدوائر H, J, K التي تظهر في الشكل المجاور يساوي 56π. أوجد KJ.



38) **تبرير:** هل المسافة بين مركز الدائرة وأي نقطة داخلها أقل من نصف قطرها دائمًا أو أحيانًا أو لا تكون كذلك أبدًا؟ فسّر إجابتك.

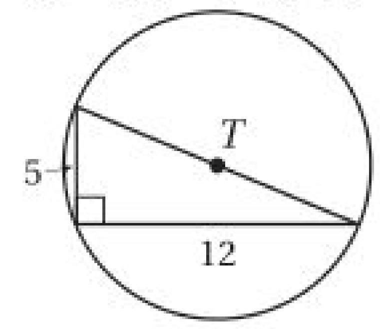
39) **تحدٍّ:** $\odot P$ مُحاطة بالمثلث المتطابق الأضلاع LMN، كما في الشكل أدناه، ما محيط $\odot P$، مقربًا إجابتك إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ؟



40) **اكتب:** بيّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين الدوائر المتطابقة والدوائر المتحدة في المركز.

تدريب على اختبار

41) ما محيط $\odot T$؟ قرّب إجابتك إلى أقرب عُشر.



42) **جبر:** أحاط إبراهيم حديقته الدائرية الشكل بسياج. إذا كان طول السياج $50\,m$ ، فما نصف قطر الحديقة؟ قرّب إجابتك إلى أقرب عددٍ صحيحٍ.

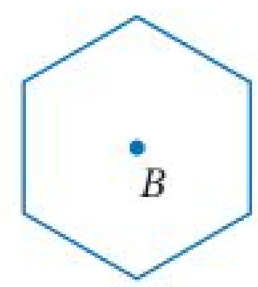
A 10   **C** 8

B 9   **D** 7

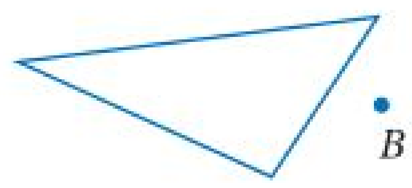
مراجعة تراكمية

استعمل مسطرةً لرسم صورة الشكل الناتجة عن تمدّد مركزه B ومعامله k المحدّد في كل من الأسئلة الآتية. (مهارة سابقة)

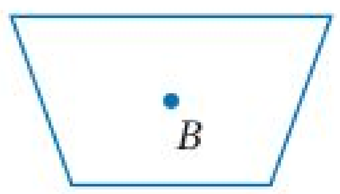
43) $k = \frac{1}{5}$



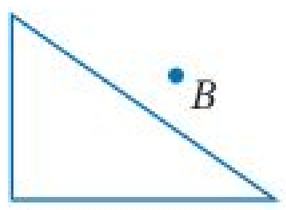
44) $k = \frac{2}{5}$



45) $k = 2$

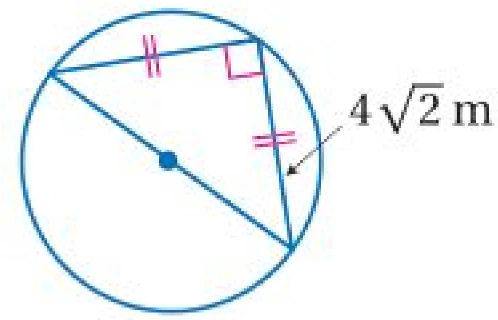


46) $k = 3$

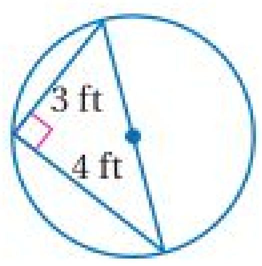


أوجد القيمة الدقيقة لمحيط كل دائرة ممّا يأتي: (الدرس 1-8)

47)



48)

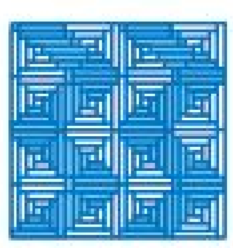


حدّد ما إذا كان يبدو لصورة كلٍّ من الأشكال الآتية تماثل دوراني أم لا؟ وإذا كان كذلك، فانسخ الشكل في دفترك، وحدّد عليه مركز التماثل، واذكر رتبته ومقداره. (مهارة سابقة)

49)

50)

51)

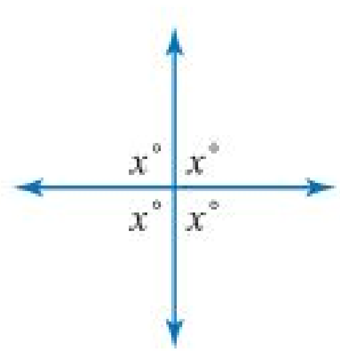


52)

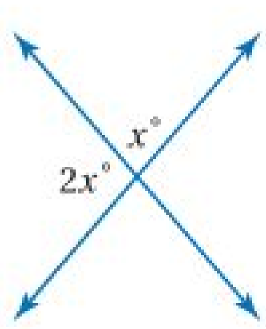
استعد للدرس اللاحق

أوجد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:

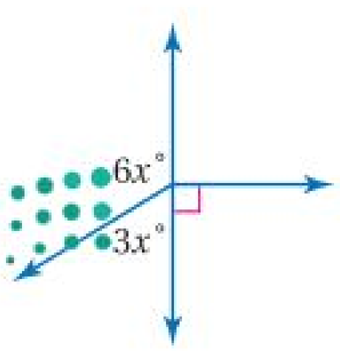
53)



54)



55)



رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

8-2 قياس الزوايا والأقواس
Measuring Angles and Arcs

فيما سبق:

درستُ إيجاد قياسات الزوايا وتحديد الزوايا المتطابقة.

(مهارة سابقة)

والآن:

- أعيِّن الزوايا المركزية، والأقواس الكبرى والأقواس الصغرى، ونصف الدائرة وأجد قياسها.
- أجد طول القوس.

المفردات:

الزاوية المركزية
central angle

القوس
arc

القوس الأصغر
minor arc

القوس الأكبر
major arc

نصف دائرة
semicircle

الأقواس المتطابقة
congruent arcs

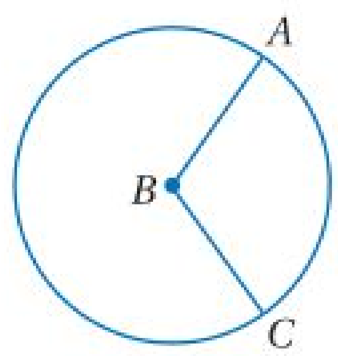
الأقواس المتجاورة
adjacent arcs

طول القوس
arc length

لماذا؟

معظم الساعات في الأجهزة الإلكترونية عبارة عن ساعات رقمية، وهي الساعات التي تُظهر الوقت على شكل أرقام. وتُستعمل الساعات العادية في تزيين المنازل، أو استعمالها ساعات يدوية. وهذه الساعات لها عقارب أو مؤشرات متحركة تشير إلى الساعة والدقيقة، وأحيانًا هناك مؤشر أو عقرب للثواني.

ووجه هذه الساعة عبارة عن دائرة، وتكوّن العقارب الثلاث زوايا مركزية فيها.

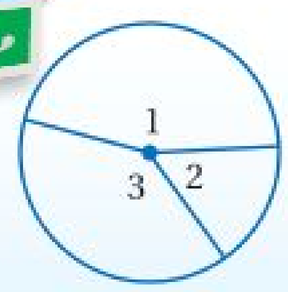


الزوايا والأقواس **الزاوية المركزية** في الدائرة هي زاوية يقع رأسها في المركز، وضلعاها نصفا قطرين في الدائرة. في الشكل المجاور $\angle ABC$ هي زاوية مركزية في $\odot B$.

تذكّر أن مجموع قياسات الزوايا المتجمّعة حول نقطة يساوي $360°$ ؛ لذا فإن الدرجة الواحدة تساوي $\frac{1}{360}$ من الدورة الكاملة حول نقطة، ويؤدي هذا إلى المفهوم الآتي:

مفهوم أساسي — مجموع قياسات الزوايا المركزية

أضف إلى مطويتك

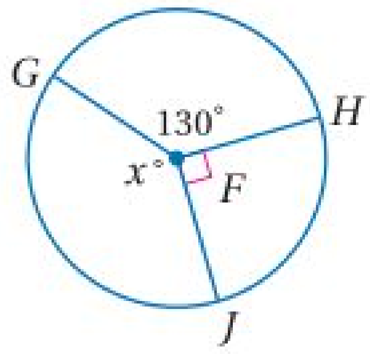


التعبير اللفظي: مجموع قياسات الزوايا المركزية في الدائرة، والتي لا تحوي نقاطًا داخلية مشتركة يساوي $360°$.

مثال: $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 360°$

مثال 1 — إيجاد قياس الزاوية المركزية

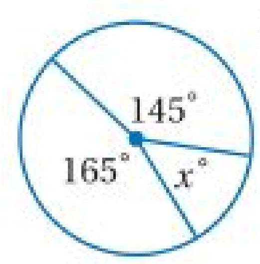
أوجد قيمة x في الشكل المجاور.



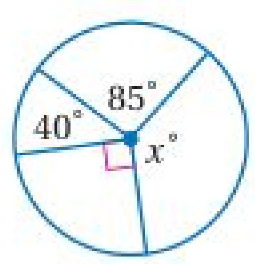
$m\angle GFH + m\angle HFJ + m\angle GFJ = 360°$	مجموع قياسات الزوايا المركزية
$130° + 90° + x = 360°$	بالتعويض
$220° + x = 360°$	بالتبسيط
$x = 140°$	بطرح $220°$ من كلا الطرفين

تحقق من فهمك

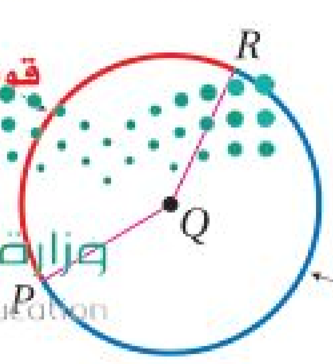
(1A



(1B



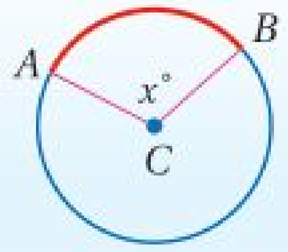
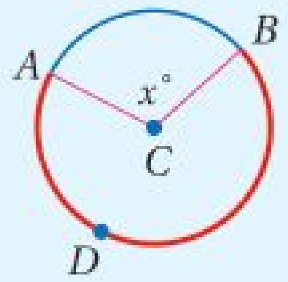
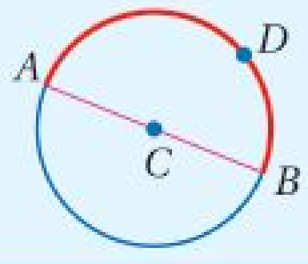
القوس هو جزءٌ من دائرة يُحدَّد بنقطتَي طرفَيه، وعند رسم زاوية مركزية، تنقسم الدائرة إلى قوسين، يرتبط قياس كلٍّ منهما بقياس الزاوية المركزية المقابلة له.



مفاهيم أساسية

أضف إلى مطويتك

الأقواس وقياسها

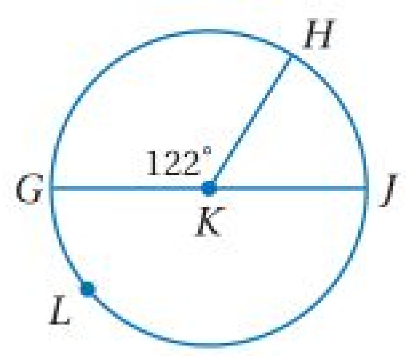
القوس	قياسه
القوس الأصغر هو القوس الأقصر الذي يصل بين نقطتين على الدائرة.	يقل قياس القوس الأصغر عن $180°$ ، ويساوي قياس الزاوية المركزية المقابلة له. $m\widehat{AB} = m\angle ACB = x°$ 
القوس الأكبر هو القوس الأطول الذي يصل بين نقطتين على الدائرة.	يزيد قياس القوس الأكبر على $180°$، ويساوي $360°$ مطروحًا منه قياس القوس الأصغر الذي يصل بين النقطتين نفسيهما. $m\widehat{ADB} = 360° - m\widehat{AB} = 360° - x°$ 
نصف الدائرة هي قوس تقع نقطتا طرفيه على قطر الدائرة.	قياس نصف الدائرة يساوي $180°$ $m\widehat{ADB} = 180°$ 

إرشادات للدراسة

تسمية الأقواس: يُسمَى القوس الأصغر بنقطتَي طرفيه ، أما القوس الأكبر ونصف الدائرة فيسميان بنقطتَي الطرفين بالإضافة إلى نقطة على القوس بينهما.

مثال 2 تصنيف الأقواس وإيجاد قياساتها

$\overline{GJ}$ قطر في $\odot K$، حدّد ما إذا كان كلٌّ من الأقواس الآتية قوسًا أكبر أو أصغر أو نصف دائرةٍ، ثم أوجد قياسه.



a) $\widehat{GH}$

$\widehat{GH}$ قوس أصغر، وقياسه: $m\widehat{GH} = m\angle GKH = 122°$.

b) $\widehat{GLH}$

$\widehat{GLH}$ هو القوس الأكبر الذي يشترك مع القوس الأصغر $\widehat{GH}$ في نقطتَي طرفيه.

$$m\widehat{GLH} = 360° - m\widehat{GH}$$
$$= 360° - 122° = 238°$$

c) $\widehat{GLJ}$

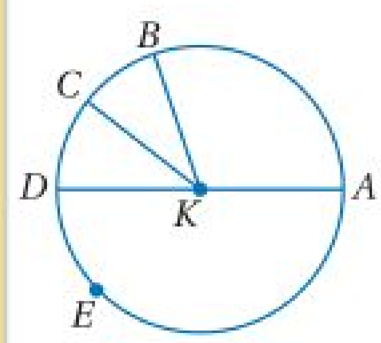
$\widehat{GLJ}$ هو نصف دائرة،

إذن: $m\widehat{GLJ} = 180°$.

قراءة الرياضيات

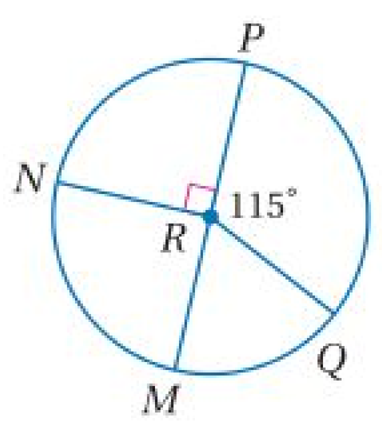
الرمز $\frown$

يقرأ الرمز $\frown$ القوس. في الدائرة أدناه $\widehat{AB}$ يقرأ القوس AB، أما $\widehat{AEC}$ فيقرأ القوس AEC، وكذلك $\widehat{AED}$ فيقرأ القوس AED.



تحقق من فهمك

$\overline{PM}$ قطر في $\odot R$، حدّد ما إذا كان كلٌّ من الأقواس الآتية قوسًا أكبر أو أصغر أو نصف دائرة، ثم أوجد قياسه.



2A) $\widehat{MQ}$ **2B)** $\widehat{MNP}$ **2C)** $\widehat{MNQ}$

الأقواس المتطابقة هي الأقواس التي تقع في الدائرة نفسها، أو في دائرتين متطابقتين، ويكون لها القياس نفسه.

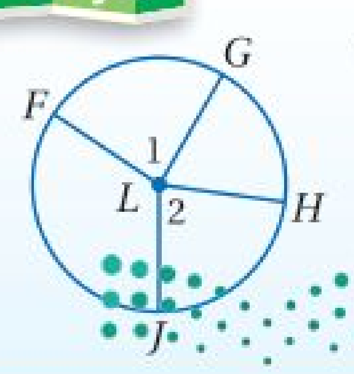
نظرية 8.1

أضف إلى مطويتك

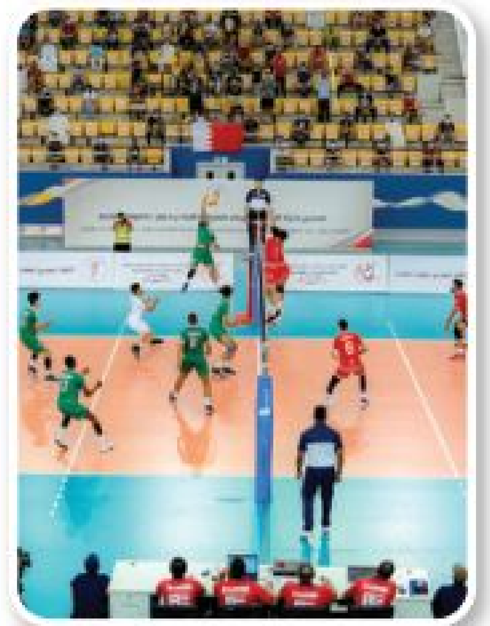
التعبير اللفظي: في الدائرة نفسها أو في دائرتين متطابقتين، يكون القوسان متطابقين، إذا وفقط إذا كانت الزاويتان المركزيّتان المقابلتان لهما متطابقتين.

مثال: إذا كانت $\angle 1 \cong \angle 2$ ، فإن $\widehat{FG} \cong \widehat{HJ}$.

إذا كان $\widehat{FG} \cong \widehat{HJ}$ ، فإن $\angle 1 \cong \angle 2$.



ستبرهن النظرية 8.1 في السؤال 44



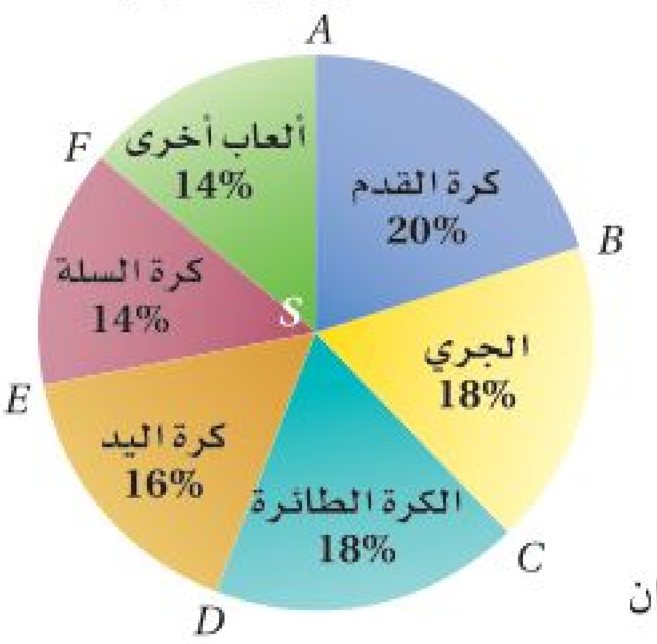
الربط مع الحياة

عُرفت لعبة كرة الطائرة لأول مرة في الولايات المتحدة الأمريكية، ثم انتقلت إلى كندا عام 1900 م، لتصبح بعد ذلك من أكثر الرياضات شعبية في العالم.

مثال 3 من واقع الحياة — إيجاد قياس القوس من القطاعات الدائرية

رياضة: استعمل التمثيل بالقطاعات الدائرية المجاور، لإيجاد كلٍّ من القياسات الآتية:

النشاطات الرياضية المدرسية



a) $m\widehat{CD}$

$\widehat{CD}$ هو قوس أصغر.

إذن $m\widehat{CD} = m\angle CSD$

$\angle CSD$ تُمثّل 18% من الكل أو 18% من الدائرة.

$m\angle CSD = 0.18(360°)$ — إيجاد 18% من 360°

$= 64.8°$ — بالتبسيط

b) $m\widehat{BC}$

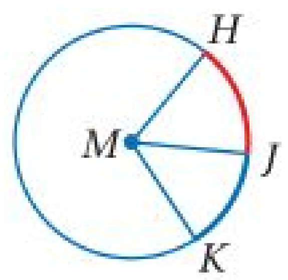
النسبتان المئويتان للكرة الطائرة والجري متساويتان؛ إذن الزاويتان المركزيتان متطابقتان. والقوسان المقابلان لهما متطابقان.

$m\widehat{BC} = m\widehat{CD} = 64.8°$

✓ تحقق من فهمك

3A) $m\widehat{EF}$ 3B) $m\widehat{FA}$

الأقواس المتجاورة هي أقواس في الدائرة تشترك مع بعضها في نقطة واحدة فقط. $\widehat{JK}$ ، $\widehat{HJ}$ قوسان متجاوران في $\odot M$، وكما هي الحال في الزوايا المتجاورة، يمكنك جمع قياس الأقواس المتجاورة.

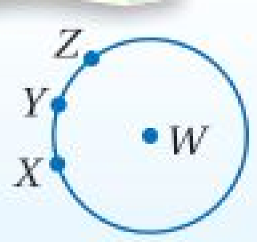


مسلّمة 8.1 مسلّمة جمع الأقواس

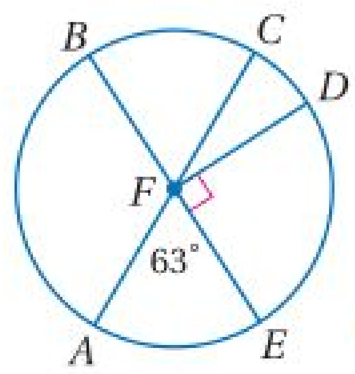
أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: قياس القوس المتكوّن من قوسين متجاورين يساوي مجموع قياسَي هذين القوسين.

مثال: $m\widehat{XZ} = m\widehat{XY} + m\widehat{YZ}$



مثال 4 إيجاد قياس القوس باستعمال مسلمة جمع الأقواس



أوجد كلاًّ من القياسات الآتية في $\odot F$:

a) $m\widehat{AD}$

$m\widehat{AD} = m\widehat{AE} + m\widehat{ED}$ — مسلّمة جمع الأقواس

$= m\angle AFE + m\angle EFD$ — $m\widehat{AE} = m\angle AFE,\ m\widehat{ED} = m\angle EFD$

$= 63° + 90° = 153°$ — بالتعويض

b) $m\widehat{ADB}$

$m\widehat{ADB} = m\widehat{AE} + m\widehat{EDB}$ — مسلّمة جمع الأقواس

$= 63° + 180° = 243°$ — $\widehat{EDB}$ نصف دائرة؛ إذن: $m\widehat{EDB} = 180°$

✓ تحقق من فهمك

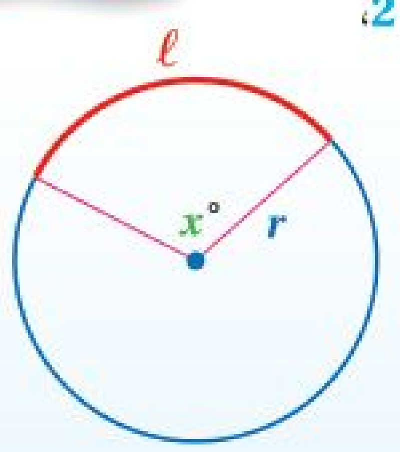
4A) $m\widehat{CE}$ 4B) $m\widehat{ABD}$

طول القوس: **طول القوس** هو المسافة على الدائرة بين نقطتَي طرفيه، ويُقاس بوحدات الطول، وبما أن القوس جزء من الدائرة، فإن طوله جزءٌ من محيطها.

> **تنبيه !**
>
> **طول القوس:** يُعطى طول القوس بوحدات الطول مثل السنتمترات، أما قياس القوس فيعطى بالدرجات.

مفهوم أساسي — طول القوس

أضف إلى مطويتك



التعبير اللفظي: إذا كان طول القوس يساوي ℓ ومحيط الدائرة يساوي $2\pi r$، وقياس القوس بالدرجات يساوي x° فإن نسبة طول القوس إلى محيط الدائرة يساوي نسبة قياس القوس بالدرجات إلى 360°

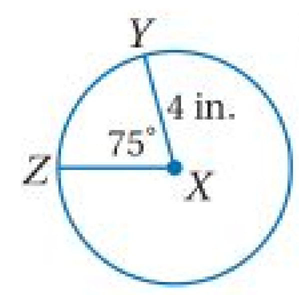
الرموز: $\frac{\ell}{2\pi r} = \frac{x^\circ}{360^\circ}$

أي أن: $\ell = \frac{x^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r$

مثال 5 إيجاد طول القوس

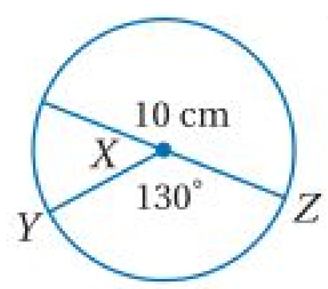
أوجد طول $\widehat{ZY}$ في كلٍّ ممَّا يأتي مقرّبًا إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ:

a)



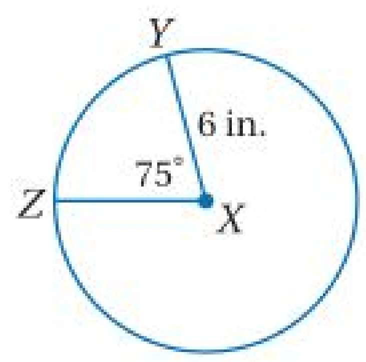
$\ell = \frac{x^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r$	صيغة طول القوس
$= \frac{75^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi(4)$	بالتعويض
≈ 5.24 in	باستعمال الحاسبة

b)



$\ell = \frac{x^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r$	صيغة طول القوس
$= \frac{130^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi(5)$	بالتعويض
≈ 11.34 cm	باستعمال الحاسبة

c)



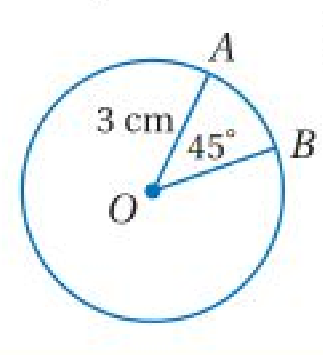
$\ell = \frac{x^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r$	صيغة طول القوس
$= \frac{75^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi(6)$	بالتعويض
≈ 7.85 in	باستعمال الحاسبة

لاحظ أن $\widehat{ZY}$ له القياس نفسه في المثالين 5a, 5c، ويساوي 75°، إلّا أن لهما طولين مختلفين؛ بسبب وجودهما في دائرتين نصفا قطريهما مختلفان.

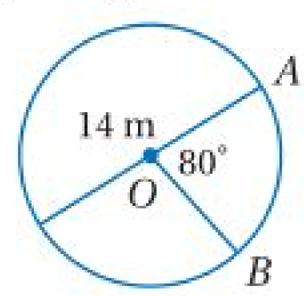
✓ تحقق من فهمك

أوجد طول $\widehat{AB}$ في كلٍّ ممَّا يأتي مقرّبًا إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ:

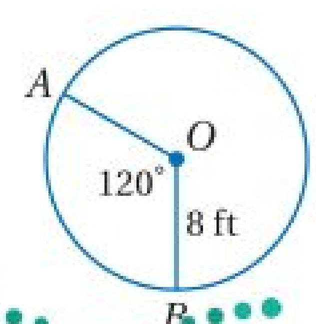
5A)



5B)



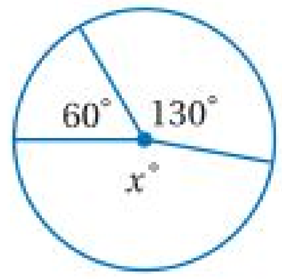
5C)



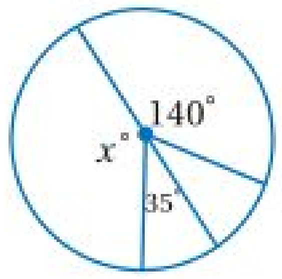
تأكـــد

المثال 1 أوجد قيمة x في كلٍّ من الشكلين الآتيين:

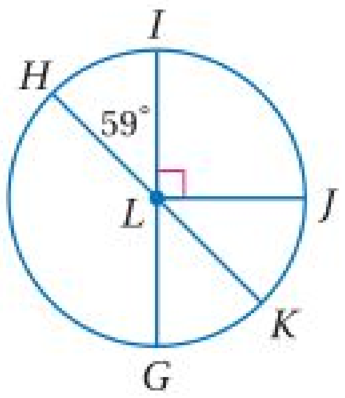
(1



(2



المثال 2 $\overline{HK}, \overline{IG}$ قطران في $\odot L$، حدّد ما إذا كان كلّ قوس فيما يأتي قوسًا أكبر أو أصغر أو نصف دائرة، ثم أوجد قياسه.



(3 $\widehat{IHJ}$ (4 $\widehat{HI}$ (5 $\widehat{HGK}$

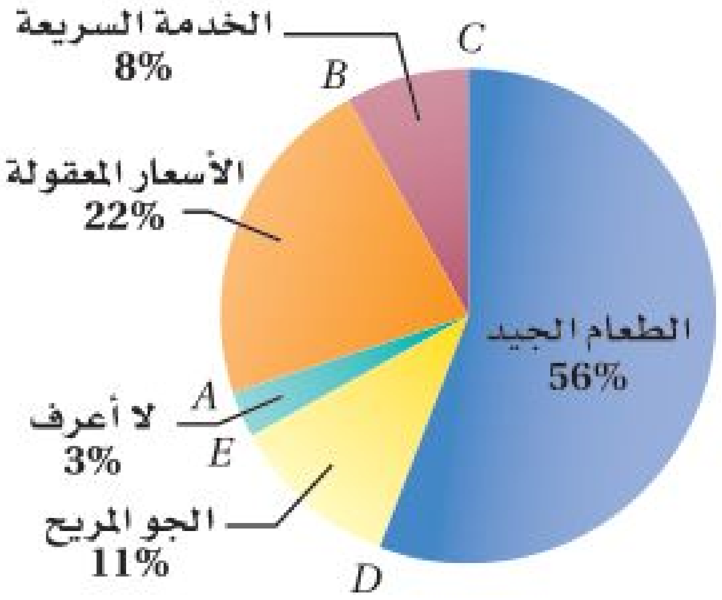
المثال 3 (6 **مطاعم:** يعرض الشكل المجاور نتائج استطلاع حول ما يطلبه روّاد المطاعم.

a) أوجد $m\widehat{AB}$.

b) أوجد $m\widehat{BC}$.

c) صف نوع قوس قطاع الطعام الجيد.

ما يطلبه روّاد المطاعم

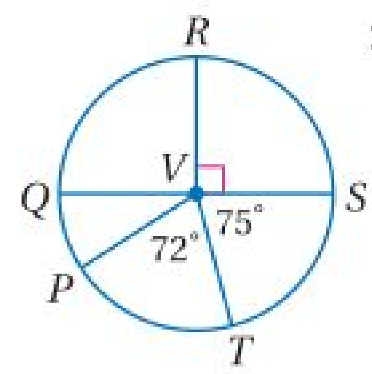


المثال 4 $\overline{QS}$ قطر في $\odot V$، أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

(7 $m\widehat{STP}$

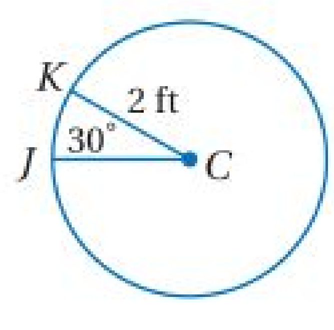
(8 $m\widehat{QRT}$

(9 $m\widehat{PQR}$

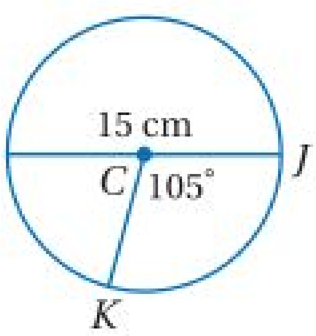


المثال 5 أوجد طول $\widehat{JK}$ مقرّبًا إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

(10



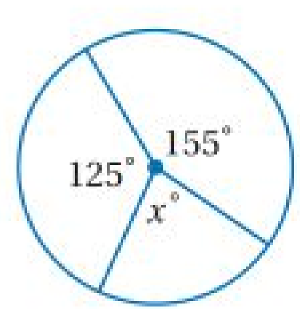
(11



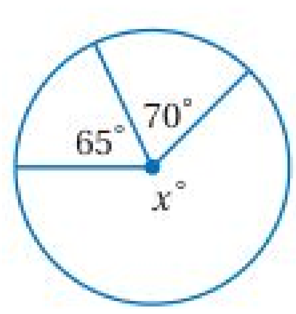
تدرب وحل المسائل

المثال 1 أوجد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:

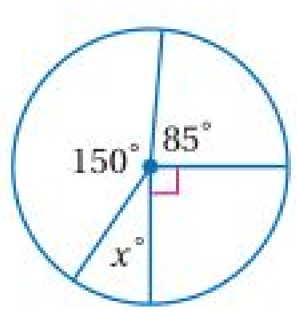
(12



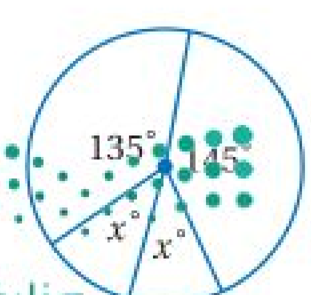
(13



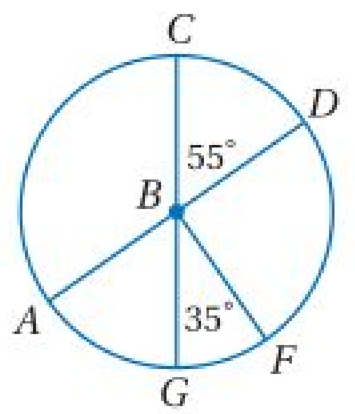
(14



(15



المثال 2 $\overline{AD}$, $\overline{CG}$ قطران في $\odot B$، حدّد ما إذا كان كلّ قوسٍ ممَّا يأتي قوسًا أكبر أو أصغر أو نصف دائرة، ثم أوجد قياسه.



16) $\widehat{CD}$ 17) $\widehat{AC}$ 18) $\widehat{CG}$

19) $\widehat{CGD}$ 20) $\widehat{GCF}$ 21) $\widehat{ACF}$

المثال 3

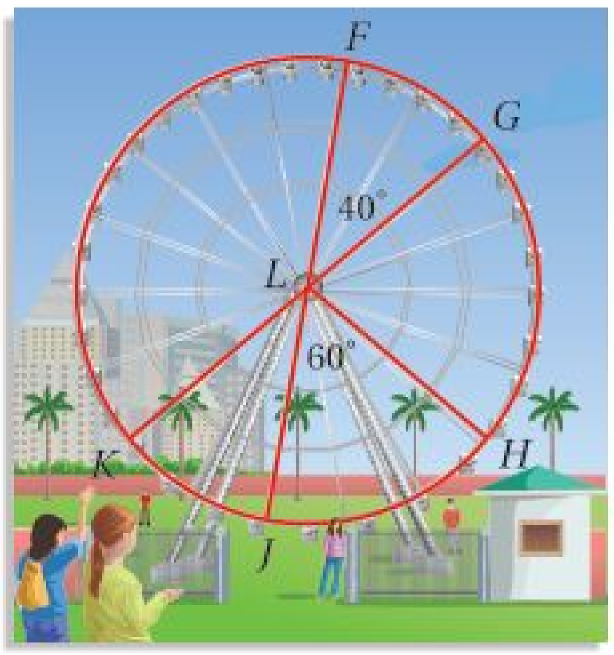
22) **تسوّق:** يعرض الشكل المجاور نتائج استطلاعٍ حول المكان المفضل لشراء الملابس، شمل مجموعة من الشباب.

a) ما قياس القوس المقابل لفئة التسوق في كلٍّ من المجمعات التجارية والمحلات المتخصصة؟

b) صِفْ نوع القوس المقابل لفئة المجمعات التجارية وفئة الأسواق الشعبية.

c) هل توجد أقواس متطابقة في هذا الشكل؟ وضّح إجابتك.

المثالان 4 ,2 **تسلية:** استعمل العجلة الدوارة في الشكل المجاور، لإيجاد كلٍّ من القياسات الآتية:



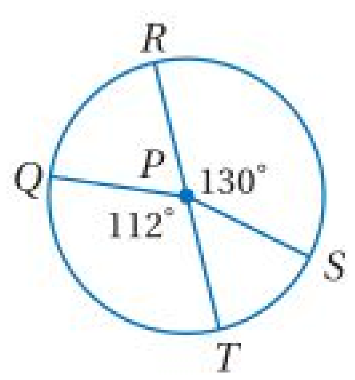
23) $m\widehat{FG}$ 24) $m\widehat{JH}$

25) $m\widehat{JKF}$ 26) $m\widehat{JFH}$

27) $m\widehat{GHF}$ 28) $m\widehat{GHK}$

29) $m\widehat{HK}$ 30) $m\widehat{JKG}$

المثال 5 $\overline{RT}$ قطر في $\odot P$ ، أوجد طول كل قوس ممّا يأتي مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.

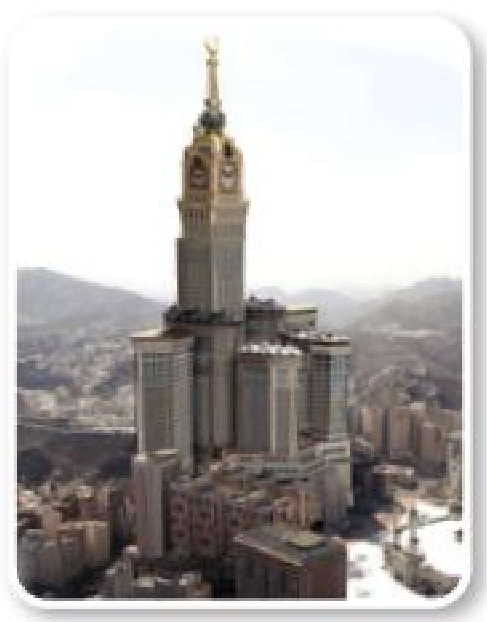


31) $\widehat{RS}$ ، إذا كان نصف القطر يساوي 2 in .

32) $\widehat{QT}$ ، إذا كان القطر يساوي 9 cm .

33) $\widehat{QR}$ ، إذا كان $PS = 4$ mm .

34) $\widehat{QRS}$ ، إذا كان $RT = 11$ ft .



الربط مع الحياة

تُعد ساعة مكة المكرمة أكبر ساعة في العالم، إذ يزيد قُطر واجهتها عن 40 m، ويبلغ طول عقرب الدقائق 22 m ، وطول عقرب الساعات 17 m ، وتبلغ كتلة كلٍّ منهما 6 أطنان تقريبًا.

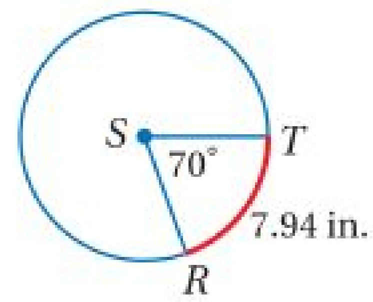
ساعات: يعرض الشكل المجاور الساعة التي وردت في فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس.

35) ما قياس الزاوية المركزية الصغرى المحصورة بين عقربَي الساعات والدقائق؟ فسّر الطريقة التي توصّلت بها إلى إجابتك.

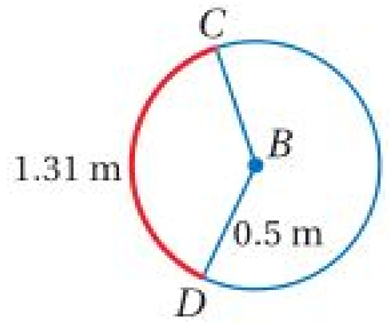
36) إذا تضاعف قطر الدائرة، فما تأثير ذلك في طول القوس الأصغر بين الرقم 1 ، والرقم 12؟

أوجد قياس كلّ ممّا يأتي مقرّبًا الأطوال إلى أقرب جزء من مئة وقياسات الأقواس إلى أقرب درجة.

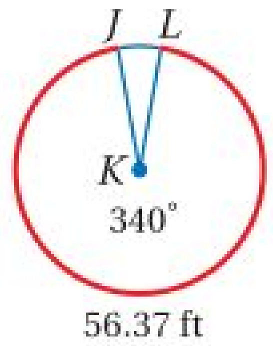
37) محيط $\odot S$



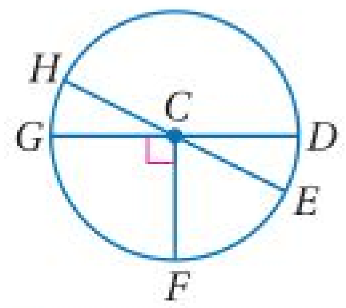
38) $m\widehat{CD}$



39) نصف قطر $\odot K$



جبر: في $\odot C$، إذا كان $m\angle HCD = (6x + 28)°$, $m\angle HCG = (2x)°$، فأوجد قياس كلٍّ ممّا يأتي:

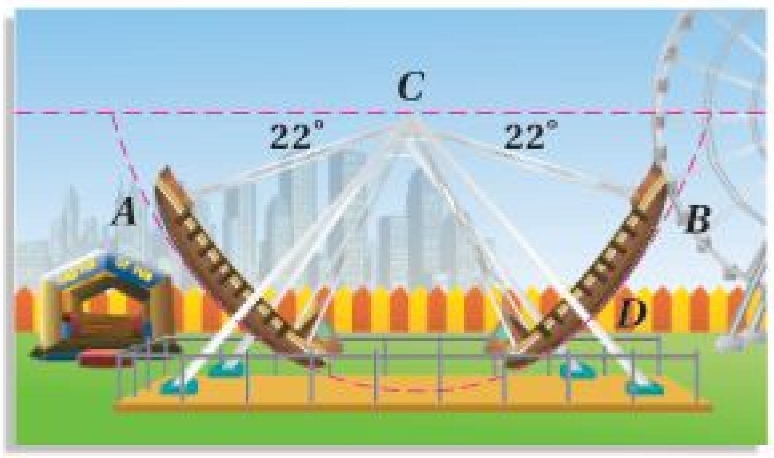


40) $m\widehat{EF}$

41) $m\widehat{HD}$

42) $m\widehat{HGF}$

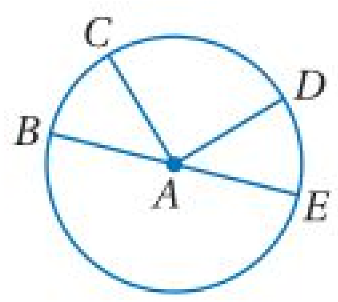
43) **ألعاب:** يأخذ مسار لعبة السفينة في مدينة ألعاب شكل نصف دائرة كما في الشكل المجاور.



a) أوجد $m\widehat{AB}$

b) إذا كان $CD = 62$ ft، فما طول $\widehat{AB}$؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.

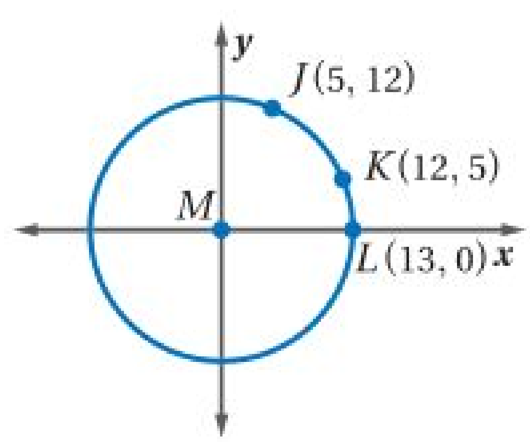
44) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 8.1.



المعطيات: $\angle BAC \cong \angle DAE$

المطلوب: $\widehat{BC} \cong \widehat{DE}$

45) **هندسة إحداثية:** تُمثّل النقطة M نقطة الأصل في الشكل المجاور. أوجد كلًّا مما يأتي في $\odot M$، مقرّبًا الأطوال إلى أقرب جزء من مئة، وقياسات الأقواس إلى أقرب عُشر درجة.



a) $m\widehat{JL}$

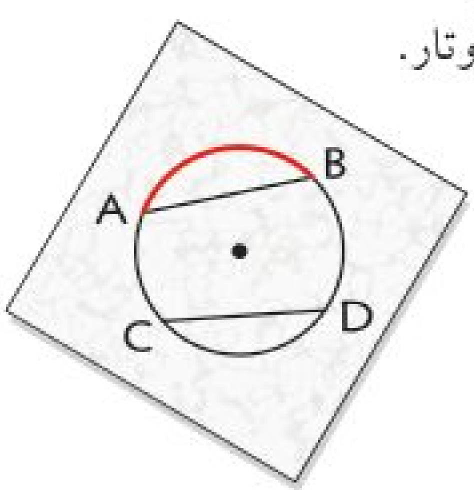
b) $m\widehat{KL}$

c) $m\widehat{JK}$

d) طول $\widehat{JL}$

e) طول $\widehat{JK}$

46) **تمثيلات متعدّدة:** في هذا السؤال ستستقصي العلاقة بين الأقواس والأوتار.

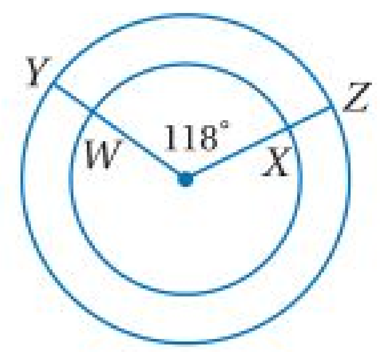


a) **هندسيًّا:** ارسم دائرة فيها وتران متطابقان مثل $\overline{AB}$ ، $\overline{CD}$، حدّد مركز هذه الدائرة. كرّر العملية مع دائرتين أُخريين ووترين متطابقين في كلٍّ منهما، على أن تكون أطوال الأوتار في الدوائر الثلاث مختلفة.

b) **حسيًّا:** قُصّ ثلاث قطع من الورق الشفّاف أكبر من كلٍّ من الدوائر الثلاث، ثم ثبّت ورقة شفافة من منتصفها مستعملًا دبّوسًا عند مركز كل دائرة، ارسم القوس المقابل لأحد الوترين في كل دائرة على الورقة الشفافة، ثم قم بتدوير قطعة الورق الشفّاف حول الدبّوس؛ لمقارنة طول القوس الذي رسمته بطول القوس المقابل للوتر الآخر.

c) **لفظيًّا:** ضع تخمينًا حول العلاقة بين الأقواس التي تقابل أوتارًا متطابقةً في الدائرة.

مسائل مهارات التفكير العليا



47) اكتشف الخطأ: يقول إبراهيم: إن $\widehat{WX}$, $\widehat{YZ}$ متطابقان؛ لأن زاويتَيهما المركزيتين متطابقتان، بينما يقول سالم: إنهما غير متطابقين. هل أيٌّ منهما على صواب؟ برِّر إجابتك.

تبرير: **حدّد ما إذا كانت كلٌّ من العبارات الآتية صحيحة دائمًا أو أحياناً أو ليست صحيحة أبدًا. برّر إجابتك.**

48) قياس القوس الأصغر أقل من $180°$.

49) إذا كانت الزاوية المركزية منفرجة، فإن القوس المقابل لها قوس أكبر.

50) يعتمد مجموع قياسَي قوسين متجاورين في دائرةٍ، على قياس نصف قطر تلك الدائرة.

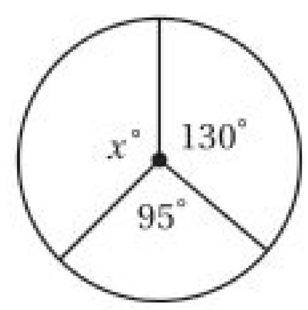
51) مسألة مفتوحة: ارسم دائرةً وعيّن عليها ثلاث نقاط، قدّر قياس الأقواس الثلاثة الناتجة وغير المتداخلة، ثم استعمل المنقلة لإيجاد قياس كلٍّ منها، واكتب على كل قوس قياسه.

52) تحدٍّ: تشير عقارب ساعة إلى 8:10، ما قياس الزاوية المقابلة للقوس الأصغر بين عقربَي الساعة؟

53) اكتب: صِفِ الأنواع الثلاثة للأقواس في الدائرة، وطريقة إيجاد قياس كلٍّ منها.

تدريب على اختبار

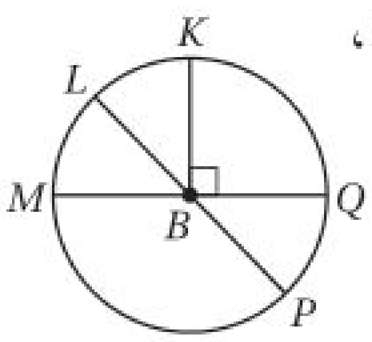
54) أوجد قيمة x؟



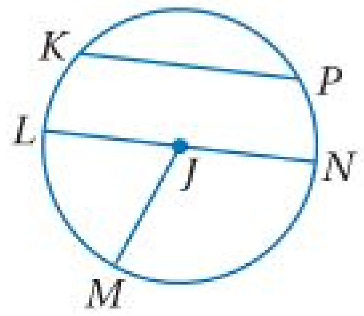
A 120 **C** 145

B 135 **D** 160

55) في $\odot B$ ، إذا كان: $m\angle LBM = (3x)°$ ، $m\angle LBQ = (4x + 61)°$ ، فما قياس $\angle PBQ$؟



مراجعة تراكمية



عُد إلى $\odot J$ في الشكل المجاور للإجابة عن كلٍّ من الأسئلة الآتية: (مهارة سابقة)

56) سمِّ مركز الدائرة.

57) عيّن وترًا يكون قطرًا أيضًا.

58) إذا كان $LN = 12.4$ ، فأوجد JM؟

مثّل بيانيًّا المضلع المعطاه إحداثيات رؤوسه، ثم مثِّل صورته الناتجة عن تمددٍ مركزه نقطة الأصل ومعامله k المُعطى في كلٍّ من السؤالين الآتيين: (مهارة سابقة)

59) $X(-1, 2)$, $Y(2, 1)$, $Z(-1, -2)$ ؛ $k = 3$

60) $A(-4, 4)$, $B(4, 4)$, $C(4, -4)$, $D(-4, -4)$ ؛ $k = 0.25$

استعد للدرس اللاحق

أوجد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:

61) $24^2 + x^2 = 26^2$

62) $x^2 + 5^2 = 13^2$

63) $30^2 + 35^2 = x^2$

3-8 الأقواس والأوتار
Arcs and Chords

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ استعمال العلاقات بين الأقواس والزوايا لإيجاد قياسات مختلفة.

(الدرس 2-8)

والآن:

- أميّز العلاقات بين الأقواس والأوتار وأستعملها.
- أميّز العلاقات بين الأقواس والأوتار والأقطار وأستعملها.

لماذا؟

يستعمل الخيَّاطون إطارًا دائريًّا لشد الأقمشة ثم تطريز الزخارف عليها. ويُظهر الشكل المجاور إطارًا دائريًّا، مثبتًا عليه تطريز على شكل نجمة، ويمثّل كل رأسين متجاورين من رؤوس النجمة نهايتَي قوسٍ في الدائرة، أو نهايتي وترٍ يكوّن أحد أضلاع شكل سداسي رؤوسه على الدائرة.

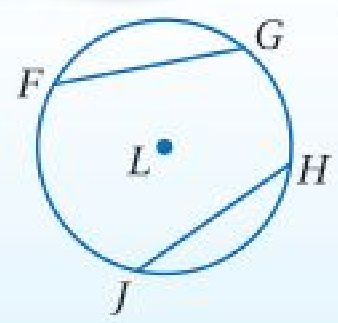
الأقواس والأوتار: لقد تعلمت في الدرس 1-8 أن الوتر هو قطعة مستقيمة يقع طرفاها على الدائرة، وإذا لم يكن الوتر قطرًا للدائرة، فإن طرفَيه يقسمانها إلى قوسين؛ أحدهما قوس أكبر والآخر أصغر.

نظرية 8.2

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: في الدائرة نفسها أو في دائرتين متطابقتين، يكون القوسان الأصغران متطابقين، إذا وفقط إذا كان الوتران المناظران لهما متطابقين.

مثال: $\widehat{FG} \cong \widehat{HJ}$، إذا وفقط إذا كان $\overline{FG} \cong \overline{HJ}$.



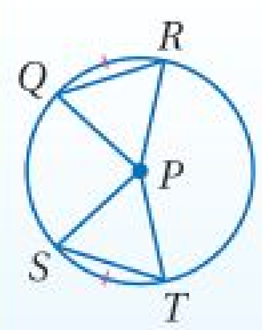
ستبرهن الجزء 2 من النظرية 8.2 في السؤال 20

برهان
نظرية 8.2 (الجزء 1: دائرة واحدة)

المعطيات: $\widehat{QR} \cong \widehat{ST}$ في $\odot P$.

المطلوب: $\overline{QR} \cong \overline{ST}$

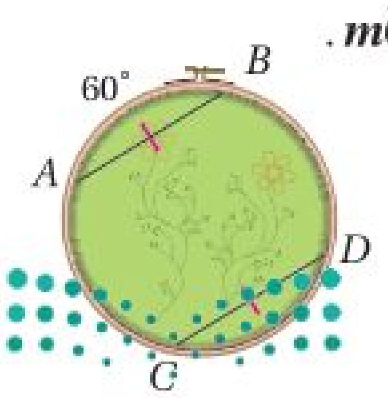
البرهان:



العبارات	المبررات
1) $\widehat{QR} \cong \widehat{ST}$ في $\odot P$	1) معطيات
2) $\angle QPR \cong \angle SPT$	2) إذا تطابقت الأقواس، فإن الزوايا المركزية المقابلة لها تكون متطابقة.
3) $\overline{QP} \cong \overline{PR} \cong \overline{SP} \cong \overline{PT}$	3) أنصاف أقطار الدائرة جميعها متطابقة.
4) $\triangle PQR \cong \triangle PST$	4) SAS
5) $\overline{QR} \cong \overline{ST}$	5) العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة.

مثال 1 من واقع الحياة — استعمال الأوتار المتطابقة لإيجاد قياس القوس

حرف يدوية: إذا كان: $\overline{AB} \cong \overline{CD}, m\widehat{AB} = 60°$ في الشكل المجاور، فأوجد $m\widehat{CD}$.



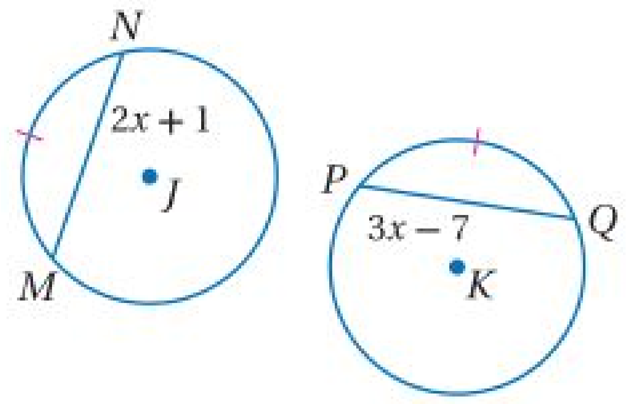
$\overline{AB}$, $\overline{CD}$ وتران متطابقان؛ إذن القوسان المقابلان لهما $\widehat{AB}$, $\widehat{CD}$ متطابقان

أي أنّ: $m\widehat{AB} = m\widehat{CD} = 60°$

تحقق من فهمك

1) إذا كان $m\widehat{AB} = 78°$ في الشكل أعلاه، فأوجد $m\widehat{CD}$.

مثال 2 استعمال الأقواس المتطابقة لإيجاد أطوال الأوتار



جبر: إذا كان: $\widehat{PQ} \cong \widehat{MN}$ ، $\odot J \cong \odot K$ ، فأوجد PQ .

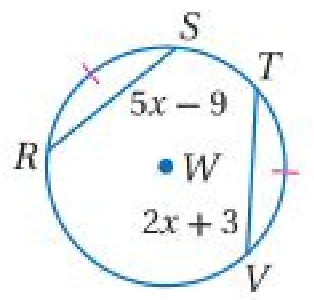
$\widehat{PQ}$ ، $\widehat{MN}$ قوسان متطابقان في دائرتين متطابقتين؛
لذا فإن الوترين $\overline{PQ}$ ، $\overline{MN}$ متطابقان.

$MN = PQ$ تعريف القطع المتطابقة

$2x + 1 = 3x - 7$ بالتعويض

$8 = x$ بالتبسيط

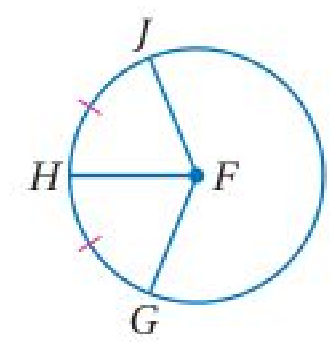
إذن: $PQ = 3(8) - 7 = 17$.



✓ تحقق من فهمك

2) في $\odot W$ ، إذا كان $\widehat{TV} \cong \widehat{RS}$، فأوجد RS.

تنصيف الأقواس والأوتار: إذا قسم مستقيم أو قطعة مستقيمة أو نصف مستقيم قوسًا إلى قوسين متطابقين؛ فإنه يُنصِّف القوس.

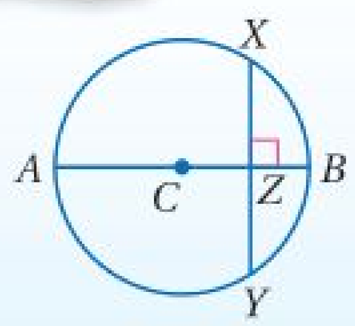
> **إرشادات للدراسة**
>
> **منصِّف القوس:** في الشكل الآتي $\overline{FH}$ منصِّف للقوس $\widehat{JHG}$.
>
> 
>

نظريات

أضف إلى مطويتك

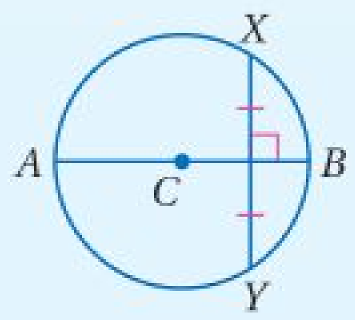
8.3 إذا كان قطر (أو نصف قطر) الدائرة عموديًا على وتر فيها، فإنه يُنصِّف ذلك الوتر، ويُنصِّف قوسه.

مثال: إذا كان القطر $\overline{AB}$ عموديًا على $\overline{XY}$ في النقطة Z،
فإن: $\overline{XZ} \cong \overline{ZY}, \widehat{XB} \cong \widehat{BY}$.



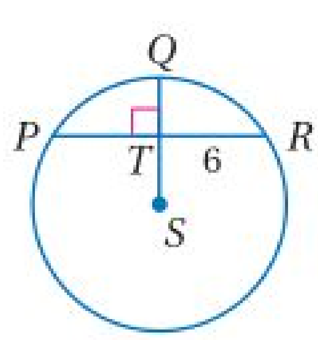
8.4 العمود المنصِّف لوتر في الدائرة هو قطر (أو نصف قطر) لها.

مثال: إذا كان $\overline{AB}$ عمودًا منصِّفًا للوتر $\overline{XY}$ ،
فإن $\overline{AB}$ قطر في $\odot C$.



ستبرهن النظريتين 8.3, 8.4 في السؤالين 21, 23 على الترتيب

مثال 3 استعمال نصف القطر العمودي على الوتر



في $\odot S$ ، إذا كان $m\widehat{PR} = 98°$ ، فأوجد $m\widehat{PQ}$.

نصف القطر $\overline{SQ}$ يعامد الوتر $\overline{PR}$؛ لذا وبحسب النظرية 8.3 فإن
$\overline{SQ}$ يُنصِّف $\widehat{PR}$ ؛ إذن $m\widehat{PQ} = m\widehat{QR}$

$$m\widehat{PQ} = \frac{m\widehat{PR}}{2} = \frac{98°}{2} = 49°$$

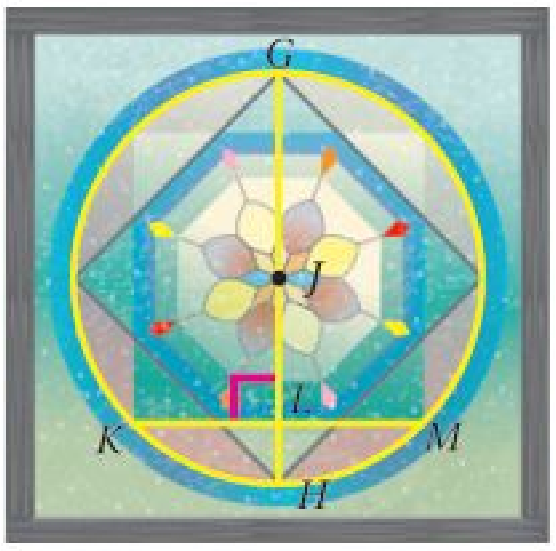
✓ تحقق من فهمك

3) أوجد PR في $\odot S$.

الربط مع الحياة

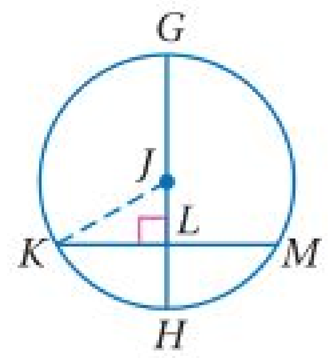
عند صناعة الزجاج الملون، يتمُّ تسخينه حتى درجة حرارة $2000°$، حتى يصبح لزجًا، ثم تضاف أكاسيد بعض المعادن فتكسبه لونًا.

مثال 4 من واقع الحياة — استعمال القطر العمودي على الوتر



زجاج ملون: يبين الشكل المجاور تصميمًا على نافذة ذات زجاج ملوّن، إذا كان $\overline{GH}$ قطرًا طوله 30 in ، و $\overline{KM}$ وترًا طوله 22 in ، فأوجد JL .

الخطوة 1: ارسم نصف القطر $\overline{JK}$.



فيتكوّن $\triangle JKL$ القائم الزاوية.

الخطوة 2: أوجد JK, KL .

بما أن $GH = 30$ ، فإن $JH = 15\,\text{in}$ ، وبما أن أنصاف أقطار الدائرة جميعها متطابقة، فإن $JK = 15\,\text{in}$.

بما أن القطر $\overline{GH}$ عمودي على $\overline{KM}$، فإن $\overline{GH}$ يُنصّف الوتر $\overline{KM}$ وفق النظرية 8.3
إذن: $KL = \frac{1}{2}(22) = 11\,\text{in}$.

الخطوة 3: أوجد JL باستعمال نظرية فيثاغورس.

$KL^2 + JL^2 = JK^2$	نظرية فيثاغورس
$11^2 + JL^2 = 15^2$	بالتعويض
$121 + JL^2 = 225$	بالتبسيط
$JL^2 = 104$	بطرح 121 من كلا الطرفين
$JL = \sqrt{104}$	بأخذ الجذر التربيعي الموجب لكلا الطرفين

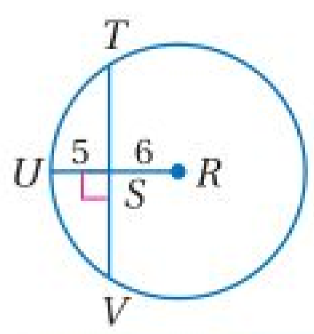
إذن: $JL = \sqrt{104} \approx 10.20\,\text{in}$.

إرشادات للدراسة

رسم القطع المستقيمة: يمكنك إضافة أي معلومة معروفة إلى الشكل؛ لمساعدتك على حل السؤال، ففي المثال 4 ، رُسم نصف القطر $\overline{JK}$.

تحقق من فهمك

4) أوجد TV في $\odot R$ مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.



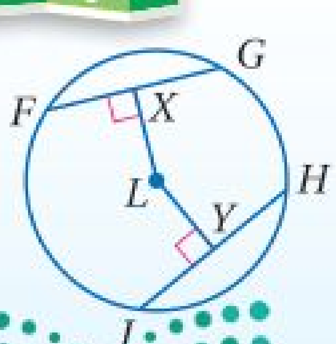
بالإضافة إلى النظرية 8.2، يمكنك استعمال النظرية الآتية؛ لتحديد ما إذا كان وتران في دائرة متطابقين.

نظرية 8.5

أضف إلى مطويتك

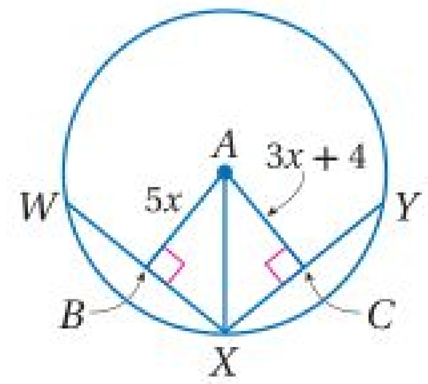
التعبير اللفظي: في الدائرة نفسها أو في دائرتين متطابقتين، يكون الوتران متطابقين إذا وفقط إذا كان بُعداهما عن مركز الدائرة متساويين.

مثال: $\overline{FG} \cong \overline{JH}$ إذا وفقط إذا كان $LX = LY$.



ستبرهن النظرية 8.5 في السؤالين 24, 25

مثال 5 الأوتار المتساوية البُعد عن المركز



جبر: في $\odot A$ إذا كان $WX = XY = 22$ ، فأوجد AB.

بما أن الوترين $\overline{WX}, \overline{XY}$ متطابقان. فإن بعديهما عن A متساويان.

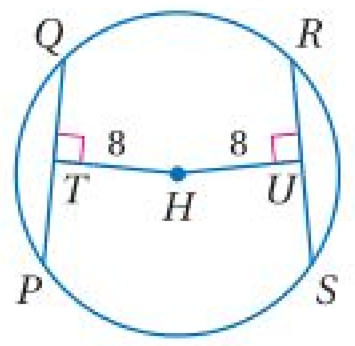
إذن:

$AB = AC$

$5x = 3x + 4$ بالتعويض

$x = 2$ بالتبسيط

إذن $AB = 5\,(2) = 10$



تحقق من فهمك

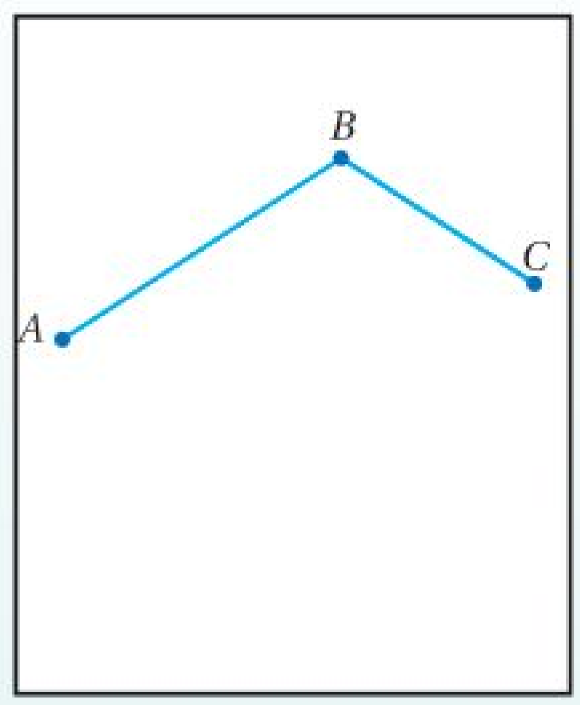
5) في $\odot H$ إذا كان: $PQ = 3x - 4\,, RS = 14$ ، فأوجد قيمة x

يمكنك استعمال النظرية 8.4؛ لإيجاد النقطة التي تبعد مسافات متساوية عن ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة، أو لتعيين مركز دائرة غير معلومة المركز.

إنشاءات هندسية

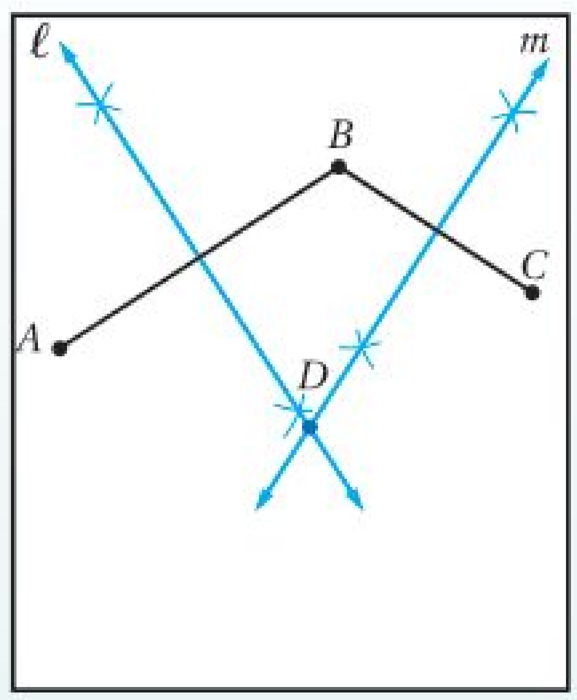
رسم الدائرة التي تمر بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

الخطوة 1:



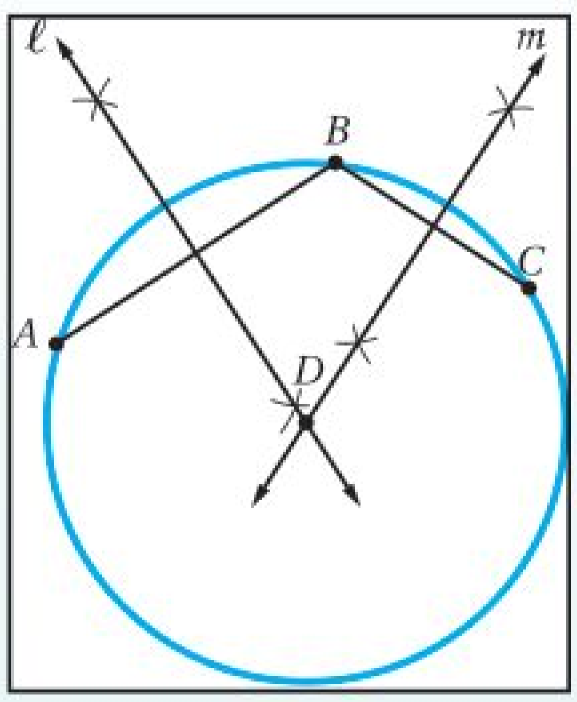
ارسم ثلاث نقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة، ثم ارسم القطعتين المستقيمتين $\overline{AB}, \overline{BC}$.

الخطوة 2:



أنشئ العمودين ℓ, m المنصفين للقطعتين $\overline{AB}, \overline{BC}$.
وسمِّ نقطة تقاطعهما D.

الخطوة 3:

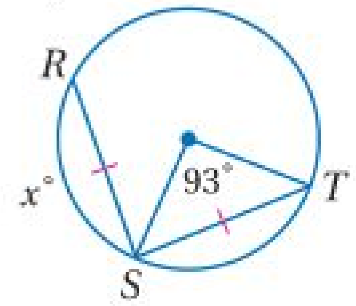


المستقيمان ℓ, m يحويان قطرين في الدائرة المارة بالنقاط الثلاث بحسب النظرية 8.4 ، ونقطة تقاطعهما هي مركز الدائرة . ضع رأس الفرجار عند النقطة D ، وارسم دائرة تمرُّ بالنقاط A, B, C.

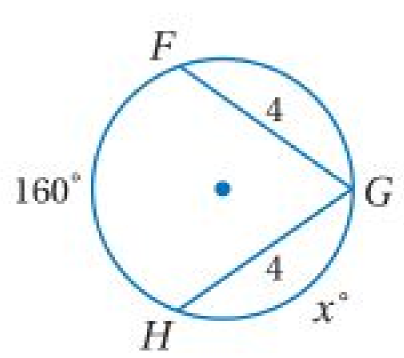
تأكد

المثالان 1, 2 **جبر:** أوجد قيمة x في كلٍّ ممَّا يأتي:

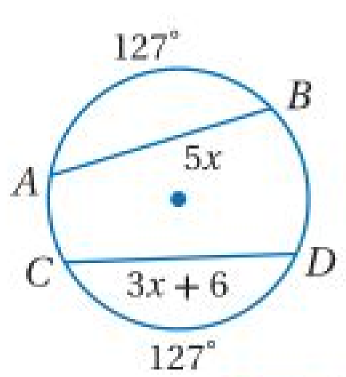
(1



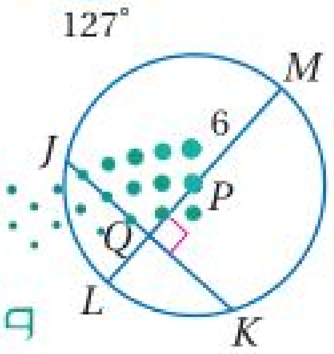
(2



(3



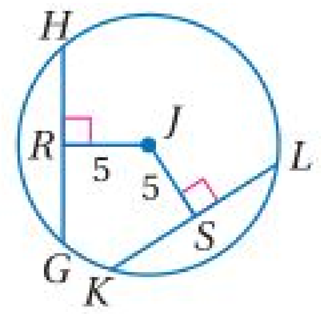
المثالان 3, 4 في $\odot P$ ، إذا كان: $JK = 10\,, m\widehat{JLK} = 134°$ ، فأوجد القياسات الآتية، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك.



4) $m\widehat{JL}$

5) PQ

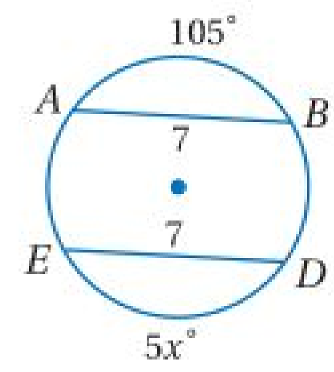
المثال 5 **6)** في $\odot J$ ، إذا كان: $GH = 9, KL = 4x + 1$ ، فأوجد قيمة x .



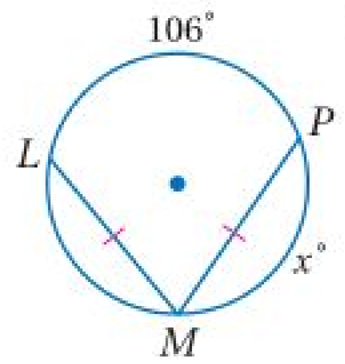
تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2 **جبر:** أوجد قيمة x في كلٍّ ممَّا يأتي:

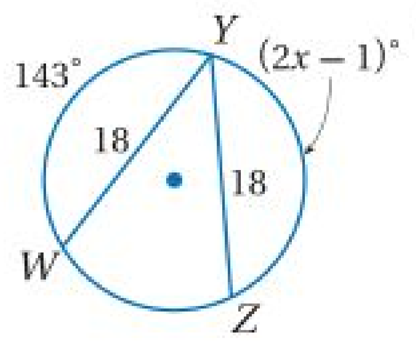
7)



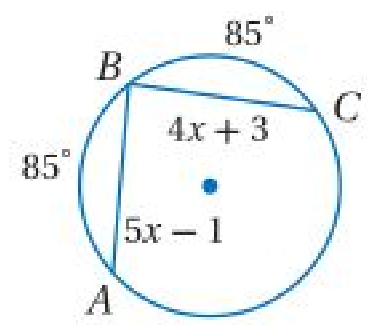
8)



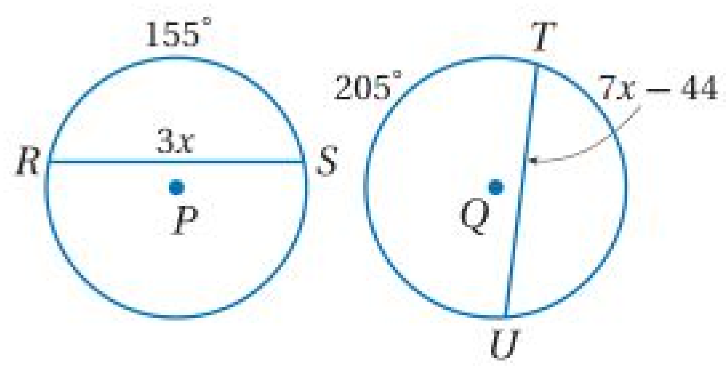
9)



10)



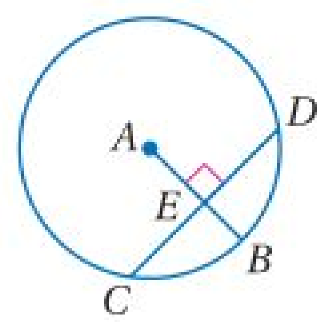
11) $\odot P \cong \odot Q$



المثالان 3, 4 إذا كان طول نصف قطر $\odot A$ يساوي 14 و $CD = 22$، فأوجد القياسين الآتيين مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة، إذا لزم ذلك.

12) CE

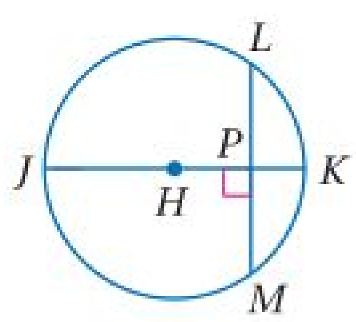
13) EB



إذا كان طول قطر $\odot H$ يساوي 18 و $LM = 12$ و $m\widehat{LM} = 84°$، فأوجد القياسين الآتيين مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة، إذا لزم ذلك.

14) $m\widehat{LK}$

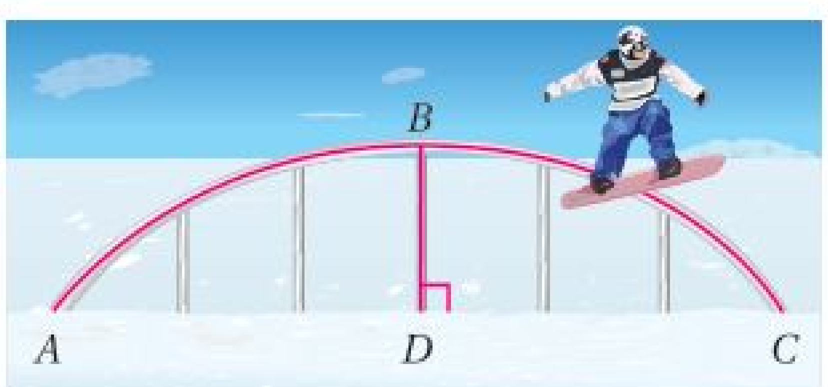
15) HP



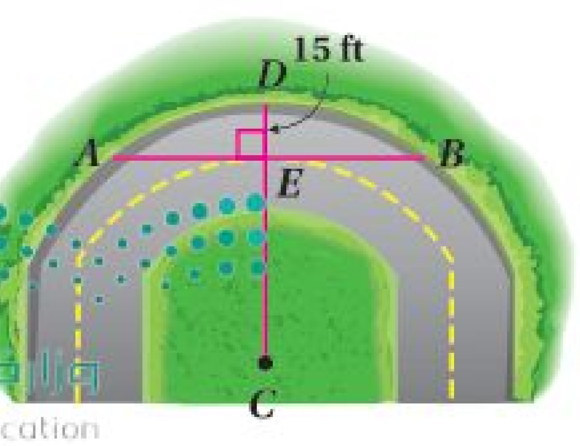
الربط مع الحياة

في مناطق التزلج، يتم تثبيت سكَة تمكّن المتزلّجين من القيام بحركاتٍ بهلوانية.

16) **تزلج:** سكة التزلّج في الشكل المجاور تأخذ شكل قوس من دائرة، حيث $\overline{BD}$ جزء من قطرها. إذا كان قياس $\widehat{ABC}$ يساوي 32% من الدائرة الكاملة، فأوجد $m\widehat{AB}$؟

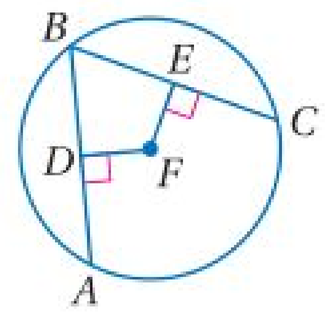


17) **طُرق:** الحافة الخارجية للطريق المنحنية المبيّنة في الشكل المجاور جزء من $\odot C$ التي نصف قطرها 88 ft.
أوجد AB مقرّبًا إجابتك إلى أقرب عُشرٍ.

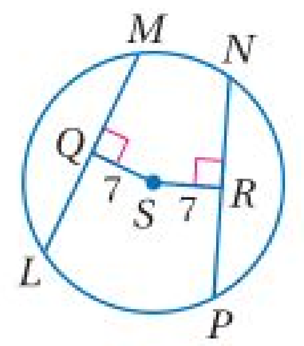


المثال 5

18) **جبر:** في $\odot F$ ، إذا كان: $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ ، $DF = 3x - 7, FE = x + 9$ ، فأوجد قيمة x .

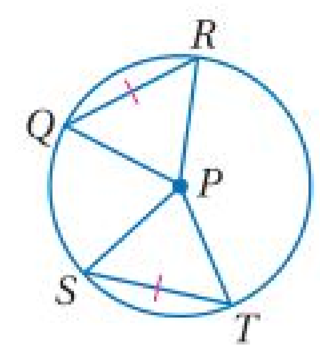


19) **جبر:** في $\odot S$ ، إذا كان: $LM = 16 , PN = 4x$ ، فأوجد قيمة x.

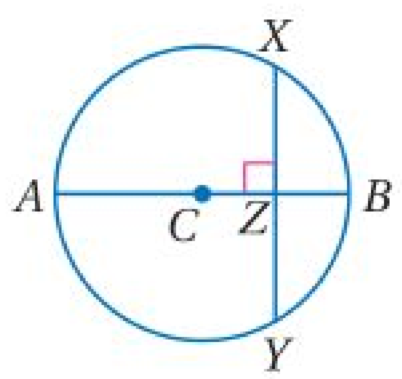


برهان: اكتب برهانًا من النوع المحدّد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

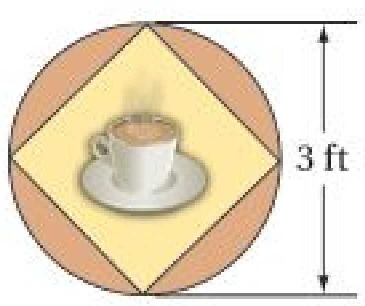
20) برهان حرّ للجزء الثاني من النظرية 8.2 ،
المعطيات: $\overline{QR} \cong \overline{ST}$ في $\odot P$.
المطلوب: $\widehat{QR} \cong \widehat{ST}$



21) برهان ذو عمودين للنظرية 8.3 ،
المعطيات: $\overline{AB} \perp \overline{XY}$ في $\odot C$.
المطلوب: $\overline{XZ} \cong \overline{YZ} , \widehat{XB} \cong \widehat{YB}$



22) **تصميم:** صمَّم زيد شعارًا لمقهىً كما في الشكل المجاور. إذا كانت أطوال الأوتار جميعها متساوية، فما قياس كل قوس؟ وما طول كل وتر؟



23) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 8.4

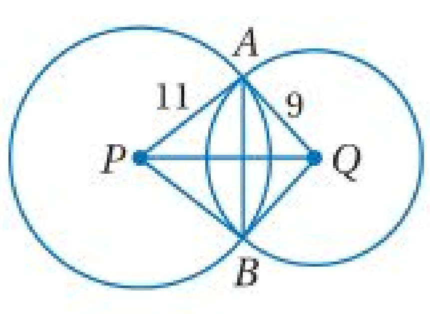
برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين للجزء المُشار إليه من النظرية 8.5 في كلٍّ من السؤالين الآتيين.

24) إذا تساوَى بُعدا وترين في دائرةٍ عن مركزها، فإن هذين الوترين متطابقان.

25) إذا تطابق وتران في دائرةٍ، فإن بعدَيهما عن مركزها متساويان.

مسائل مهارات التفكير العليا

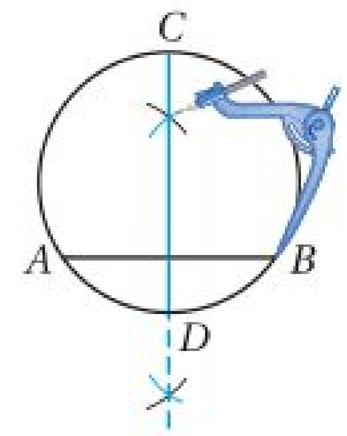
26) **تحدٍّ:** الوتر $\overline{AB}$ المشترك بين $\odot P, \odot Q$ يعُامد القطعة المستقيمة الواصلة بين مركزي هاتين الدائرتين، إذا كان $AB = 10$ ، فما طول $\overline{PQ}$؟ وضّح ذلك.



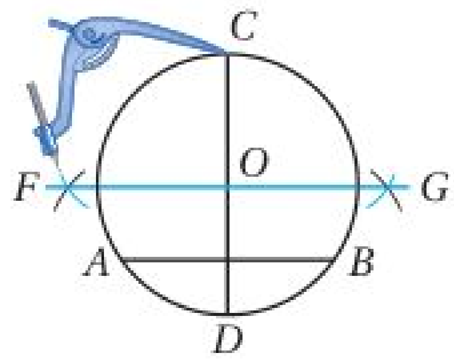
27) **تبرير:** $\overline{AB}$ قطر في الدائرة و $\overline{HG}$ وتر يتقاطع مع $\overline{AB}$ في النقطة X ، فهل العبارة $HX = GX$ صحيحة دائمًا، أم أحيانًا، أم غير صحيحة أبدًا؟

وزارة التعليم
Ministry of Education

28) تحدٍّ: الإنشاء الهندسي أدناه يوضح طريقة تعيين مركز دائرة معطاة.



الخطوة 1: ارسم الوتر $\overline{AB}$، وأنشئ العمود المنصف للوتر $\overline{AB}$ وسمّه $\overline{CD}$.



الخطوة 2: أنشئ العمود المنصّف للوتر $\overline{CD}$ وسمّه $\overline{FG}$. سمِّ نقطة تقاطع العمودين O.

a) استعمل البرهان غير المباشر لإثبات أن $\overline{CD}$ يمرّ بمركز الدائرة، مفترضًا أن مركز الدائرة لا يقع على $\overline{CD}$.

b) أثبت أن O هي مركز الدائرة.

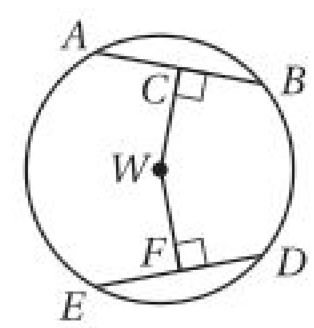
29) اكتب: إذا أصبح قياس قوس في دائرة ثلاثة أمثال قياسه الأصلي، فهل يصبح طول الوتر المقابل لهذا القوس الجديد ثلاثة أمثال طول الوتر المقابل للقوس الأصلي؟ ارسم شكلاً يؤيِّد استنتاجك.

إرشادات للدراسة

البرهان غير المباشر: تذكّر أن البرهان غير المباشر هو برهان بالتناقض تفترض فيه أن المطلوب غير صحيح، ثم تصل إلى نتيجة تناقض المعطيات أو حقيقة مثبتة من قبل أو مسلمة أو تعريف.

تدريب على اختبار

30) إذا كان: $CW = WF, ED = 30$ ، فأوجد DF؟



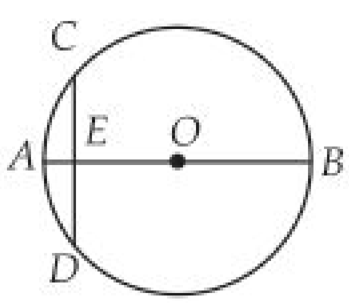
A 60

B 45

C 30

D 15

31) في $\odot O$ ، $\overline{AB}$ قطر عمودي على الوتر $\overline{CD}$ ، ويقطعه في النقطة E، إذا كان: $OB = 10$ ، $AE = 2$، فما طول $\overline{CD}$ ؟



A 4

B 6

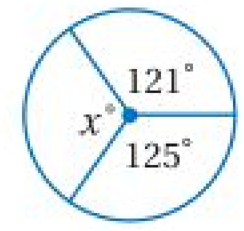
C 8

D 12

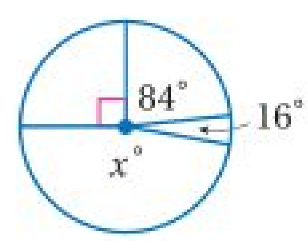
مراجعة تراكمية

أوجد قيمة x في كلٍّ ممَّا يأتي: (الدرس 2-8)

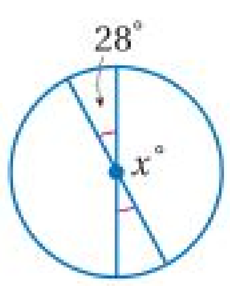
32)



33)



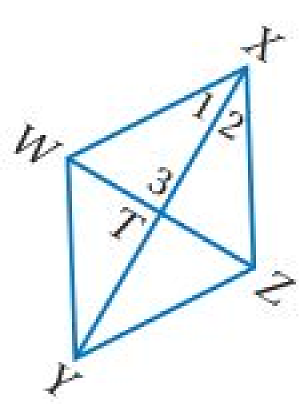
34)



35) حِرف يدوية: صمّمت شيماء مخططًا لتطريز 10 ورداتٍ على قطعة قماش، فرسمت 10 أشكال خماسية منتظمة طول ضلع كلٍّ منها 3.5 in ، ثم رسمت نصف دائرة على كل ضلع، فتشكّلت 10 ورداتٍ لكلٍّ منها خمس بتلاتٍ، فكم بوصةً طول الشريط الذهبي الذي تحتاجه لتزيين حواف جميع الوردات؟ قرّب إجابتك إلى أقرب بوصةٍ. (الدرس 1-8)

استعد للدرس اللاحق

جبر: أجب عن السؤالين الآتيين مستعينًا بالمعين $WXZY$:

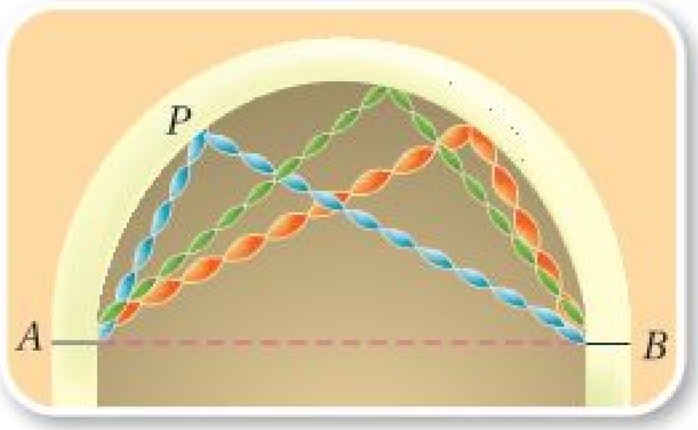


36) إذا كان: $m\angle 3 = (y^2 - 31)°$ ، فأوجد y .

37) إذا كان: $m\angle XZY = 56°$ ، فأوجد $m\angle YWZ$.

8-4 الزوايا المحيطية
Inscribed Angles

لماذا؟



يعلو مدخل قاعة احتفالات قوس على شكل نصف دائرة. زُيّن هذا المدخل بأشرطة ملونة، بحيث ثُبِّت أحد طرفَي كل شريط عند النقطة A، والطرف الآخر عند النقطة B. ثم رفعت الأشرطة، وتم تثبيت كلٍّ منها عند نقطة مختلفة على القوس مثل P، كما في الشكل المجاور. لاحظ أن الزوايا المتكوّنة من هذه الأشرطة تبدو متطابقة، بغض النظر عن موقع النقطة P.

فيما سبق:

درستُ إيجاد قياس الزوايا الداخلية للمضلعات.

(مهارة سابقة)

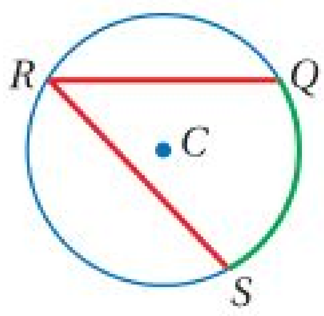
والآن:

- أجد قياسات الزوايا المحيطية.
- أجد قياسات زوايا المضلعات المحاطة بدائرة.

المفردات:

الزاوية المحيطية
inscribed angle

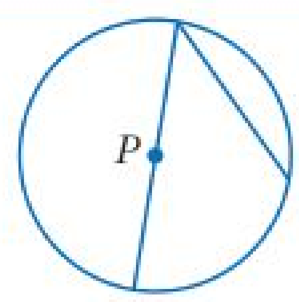
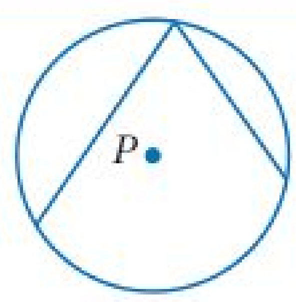
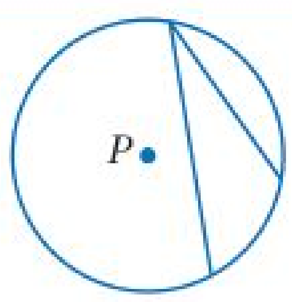
القوس المقابل
intercepted arc



الزوايا المحيطية: **الزاوية المحيطية** هي زاوية يقع رأسها على الدائرة، ويحتوي ضلعاها على وترين في الدائرة. فالزاوية QRS هي زاوية محيطية في $\odot C$

القوس المقابل للزاوية المحيطية هو قوس يقع داخل الزاوية المحيطية، ويقع طرفاه على ضِلْعَيها. القوس الأصغر $\widehat{QS}$ في $\odot C$ هو القوس المقابل للزاوية QRS.

توجد ثلاث حالات للزاوية المحيطية في الدائرة.

الحالة الأولى	الحالة الثانية	الحالة الثالثة
		
يقع مركز الدائرة P على أحد ضلعَي الزاوية المحيطية.	يقع مركز الدائرة P داخل الزاوية المحيطية.	يقع مركز الدائرة P خارج الزاوية المحيطية.

في الحالة الأولى يكون أحد ضلعَي الزاوية المحيطية قطرًا للدائرة

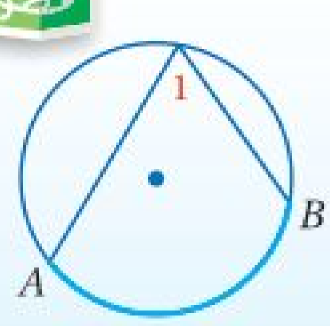
والنظرية الآتية صحيحة لهذه الحالات الثلاث جميعها.

نظرية 8.6 نظرية الزاوية المحيطية

أضف إلى مطويتك

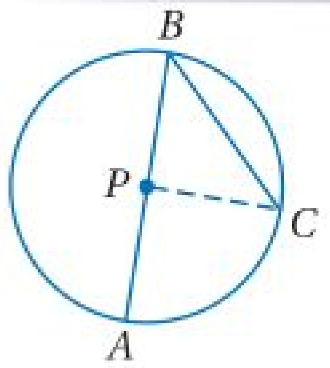
التعبير اللفظي: قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها.

مثال: $m\angle 1 = \frac{1}{2} m\widehat{AB}$, $m\widehat{AB} = 2m\angle 1$



ستبرهن النظرية 8.6 للحالتين الثانية والثالثة للزاوية المحيطية في السؤالين 28, 29 على الترتيب.

برهان نظرية الزاوية المحيطية (الحالة الأولى)



المعطيات: $\angle B$ محيطية في $\odot P$.

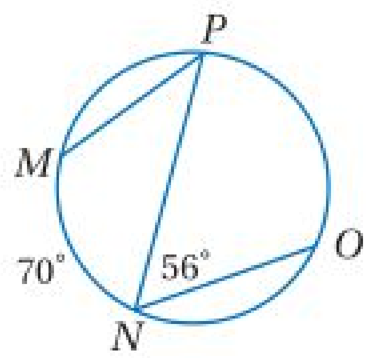
المطلوب: $m\angle B = \frac{1}{2} m\widehat{AC}$

البرهان: تعلم أن $\angle B$ محيطية في $\odot P$، وأن $\overline{PB}$ نصف قطر في $\odot P$.

ارسم نصف قطر آخر $\overline{PC}$ حيث إن كل نقطتين تحددان مستقيمًا واحدًا، وهذا سيقودنا إلى:

العبارات	المبررات
1) $\overline{PB} \cong \overline{PC}$	1) أنصاف أقطار الدائرة جميعها متطابقة.
2) $\triangle PBC$ متطابق الضلعين.	2) تعريف المثلث المتطابق الضلعين
3) $m\angle B = m\angle C$	3) نظرية المثلث المتطابق الضلعين
4) $m\angle APC = m\angle B + m\angle C$	4) نظرية الزاوية الخارجية
5) $m\angle APC = 2m\angle B$	5) بالتعويض (من الخطوة 3 في الخطوة 4 ثم الجمع)
6) $m\widehat{AC} = m\angle APC$	6) تعريف قياس القوس
7) $m\widehat{AC} = 2m\angle B$	7) بالتعويض (من الخطوة 5 في الخطوة 6)
8) $2m\angle B = m\widehat{AC}$	8) خاصية التماثل للمساواة
9) $m\angle B = \frac{1}{2} m\widehat{AC}$	9) خاصية القسمة للمساواة

مثال 1 استعمال الزوايا المحيطية لإيجاد قياسات



أوجد القياسين الآتيين مستعملًا الشكل المجاور:

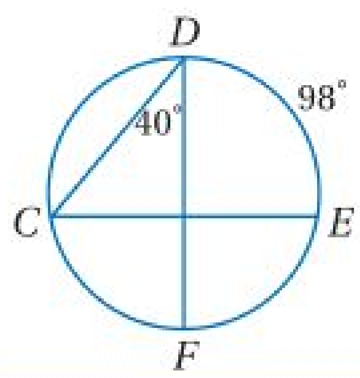
a) $m\angle P$

$$m\angle P = \frac{1}{2} m\widehat{MN}$$
$$= \frac{1}{2}(70°) = 35°$$

b) $m\widehat{PO}$

$$m\widehat{PO} = 2m\angle N$$
$$= 2(56°) = 112°$$

تحقق من فهمك



أوجد القياسات الآتية مستعملًا الشكل المجاور:

1A) $m\widehat{CF}$

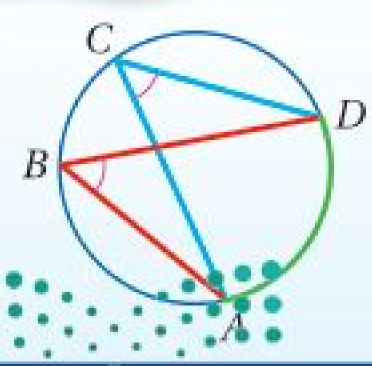
1B) $m\angle C$

هناك علاقة بين الزاويتين المحيطيَّتين اللتين تقابلان القوس نفسه في دائرة.

نظرية 8.7

أضف إلى مطويتك

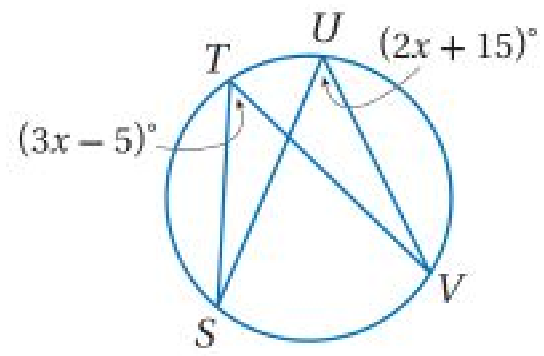
التعبير اللفظي: إذا قابلت زاويتان محيطيَّتان في دائرة القوس نفسه أو قوسين متطابقين، فإن الزاويتين تكونان متطابقتين.



مثال: $\angle B , \angle C$ تقابلان $\widehat{AD}$، إذن $\angle B \cong \angle C$.

ستبرهن النظرية 8.7 في السؤال 30

مثال 2 استعمال الزوايا المحيطية لإيجاد قياسات



جبر: أوجد $m\angle T$ مستعملًا الشكل المجاور.

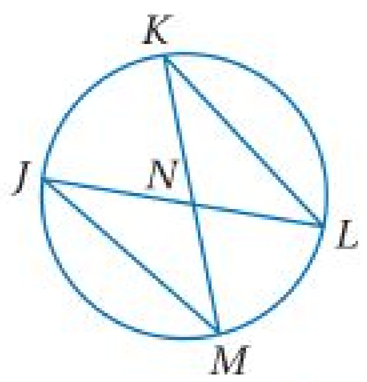
$\angle T \cong \angle U$	$\angle U , \angle T$ كلاهما تقابلان $\widehat{SV}$
$m\angle T = m\angle U$	تعريف تطابق الزوايا
$3x - 5 = 2x + 15$	بالتعويض
$x = 20$	بالتبسيط

إذن: $m\angle T = (3(20) - 5)° = 55°$.

تحقق من فهمك

2) إذا كان: $m\angle S = (3x)° , m\angle V = (x + 16)°$ ، فأوجد $m\angle S$ مستعملًا الشكل أعلاه.

مثال 3 استعمال الزوايا المحيطية في البراهين



اكتب برهانًا ذا عمودين.

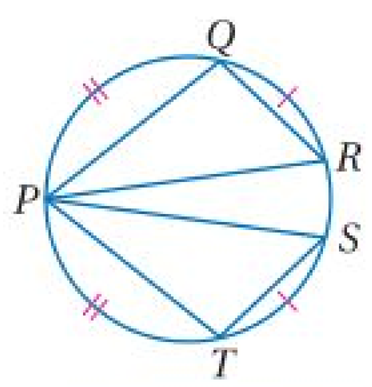
المعطيات: $\widehat{JM} \cong \widehat{KL}$

المطلوب: $\triangle JMN \cong \triangle KLN$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\widehat{JM} \cong \widehat{KL}$	**1)** معطيات
2) $\overline{JM} \cong \overline{KL}$	**2)** إذا كانت الأقواس متطابقة؛ فإن الأوتار المقابلة لها تكون متطابقة أيضًا.
3) $\angle M$ تقابل $\widehat{JK}$ $\angle L$ تقابل $\widehat{JK}$	**3)** تعريف القوس المقابل.
4) $\angle M \cong \angle L$	**4)** الزوايا المحيطية التي تقابل القوس نفسه تكون متطابقة.
5) $\angle JNM \cong \angle KNL$	**5)** الزوايا المتقابلة بالرأس تكون متطابقة.
6) $\triangle JMN \cong \triangle KLN$	**6)** AAS

تحقق من فهمك



3) اكتب برهانًا ذا عمودين:

المعطيات: $\widehat{QR} \cong \widehat{ST} , \widehat{PQ} \cong \widehat{PT}$

المطلوب: $\triangle PQR \cong \triangle PTS$

إرشادات للدراسة

المضلعات المحاطة بدائرة:
يكون المضلع محاطًا بدائرة، إذا وقعت رؤوسه جميعها على الدائرة نفسها.

زوايا المضلعات المحاطة بدائرة: للمثلثات والأشكال الرباعية المحاطة بدائرة خصائص خاصة.

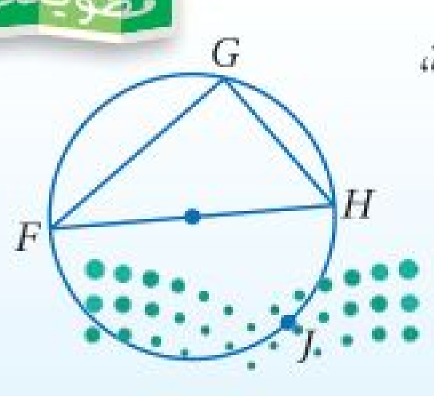
النظرية 8.8

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تقابل الزاوية المحيطية في مثلث قطرًا أو نصف دائرة، إذا وفقط إذا كانت هذه الزاوية قائمة.

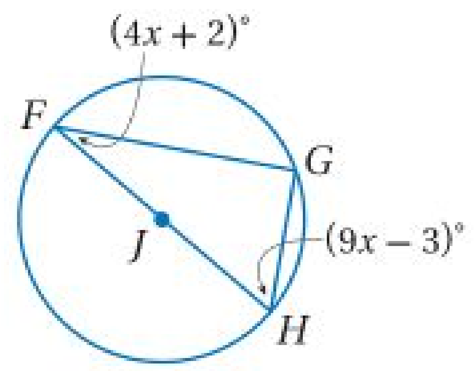
مثال: إذا كانت $\widehat{FJH}$ نصف دائرة، فإن $m\angle G = 90°$.

إذا كان $m\angle G = 90°$ ، فإن $\widehat{FJH}$ هي نصف دائرة، ويكون $\overline{FH}$ قطرًا فيها.



ستبرهن النظرية 8.8 في السؤال 31

مثال 4 إيجاد قياسات زوايا المثلث المحاط بدائرة



جبر: أوجد $m\angle F$ مستعملًا الشكل المجاور.

$\triangle FGH$ قائم الزاوية؛ لأن $\angle G$ محيطية تقابل نصف دائرة.

$m\angle F + m\angle G + m\angle H = 180°$	نظرية مجموع زوايا المثلث
$(4x+2)° + 90° + (9x-3)° = 180°$	بالتعويض
$(13x)° + 89° = 180°$	بالتبسيط
$13x = 91$	بطرح 89 من كلا الطرفين
$x = 7$	بقسمة كلا الطرفين على 13

إذن: $m\angle F = (4(7)+2)° = 30°$.

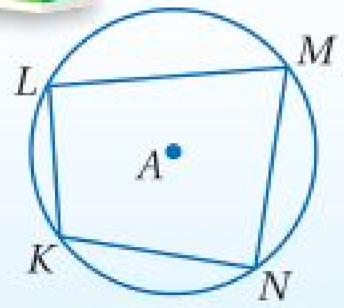
تحقق من فهمك

4) إذا كان $m\angle F = (7x+2)°$, $m\angle H = (17x-8)°$، فأوجد قيمة x مستعملًا الشكل أعلاه.

يمكنك إحاطة مختلف أنواع المثلثات، بما فيها المثلث القائم الزاوية بدائرة إلاّ أن أنواعًا معينة فقط من الأشكال الرباعية يمكنك إحاطتها بدائرة.

نظرية 8.9

أضف إلى مطويتك



التعبير اللفظي: إذا كان الشكل الرباعي محاطًا بدائرة، فإن كل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان.

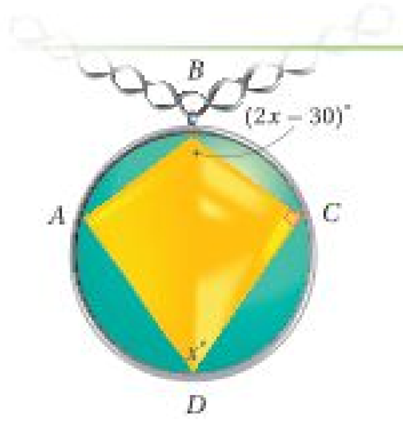
مثال: إذا كان الشكل الرباعي $KLMN$ محاطًا بـ $\odot A$، فإن $\angle L, \angle N$ متكاملتان و $\angle K, \angle M$ متكاملتان أيضًا.

سوف تُبرهن النظرية 8.9 في السؤال 27

إرشادات للدراسة

الأشكال الرباعية: يمكن إثبات نظرية 8.9، بإثبات أن القوسين المقابلين لكل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي المحاط بدائرة يكوّنان دائرةً كاملةً.

مثال 5 من واقع الحياة إيجاد قياسات الزوايا



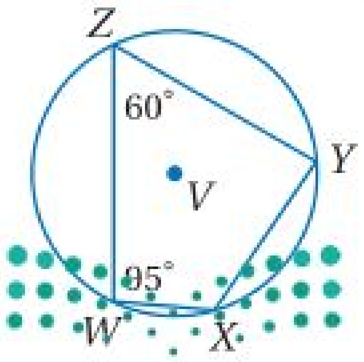
مجوهرات: يحتوي العقد الظاهر في الشكل على جوهرة بصورة مضلع رباعي محاط بدائرة، أوجد $m\angle A, m\angle B$.

بما أن $ABCD$ شكل رباعي محاط بدائرة، فإن كل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان.

$m\angle A + m\angle C = 180°$	$m\angle B + m\angle D = 180°$	كل زاويتين متقابلتين في الرباعي الدائري متكاملتين
$m\angle A + 90° = 180°$	$(2x-30)° + x° = 180°$	بالتعويض
$m\angle A = 90°$	$(3x)° - 30° = 180°$	بالتبسيط
	$3x = 210$	بإضافة $30°$ لكلا الطرفين
	$x = 70$	بقسمة كلا الطرفين على 3

إذن: $m\angle A = 90°$, $m\angle B = (2(70)-30)° = 110°$.

تحقق من فهمك

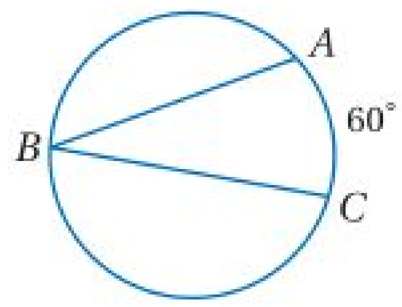


5) المضلع $WXYZ$ شكل رباعي محاط بـ $\odot V$، أوجد $m\angle X, m\angle Y$.

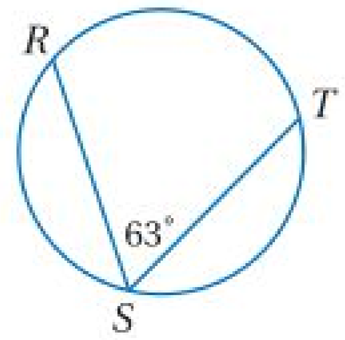
تأكد

المثال 1 أوجد كل قياس ممّا يأتي:

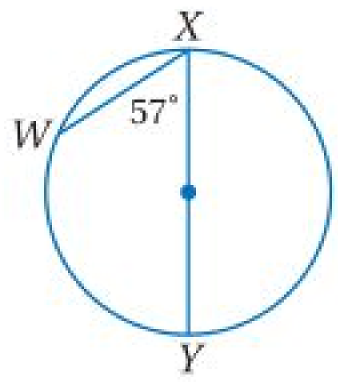
1) $m\angle B$



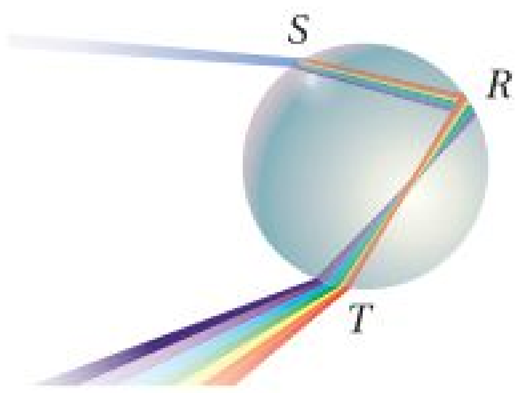
2) $m\widehat{RT}$



3) $m\widehat{WX}$

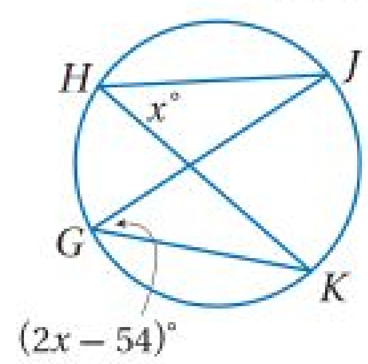


4) **علوم:** يُبيّن الشكل المجاور انكسار أشعة الضوء في قطرة مطر لإنتاج ألوان الطيف، فإذا كان $m\widehat{ST} = 144°$ ، فأوجد $m\angle R$؟

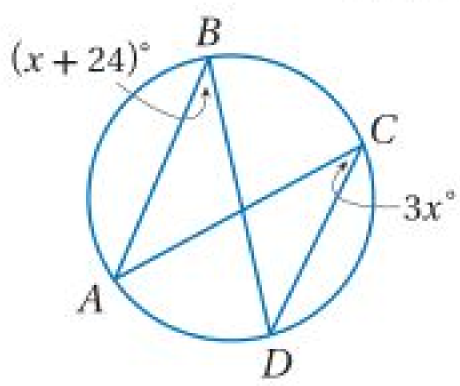


المثال 2 **جبر:** أوجد كلًّا من القياسين الآتيين:

5) $m\angle H$



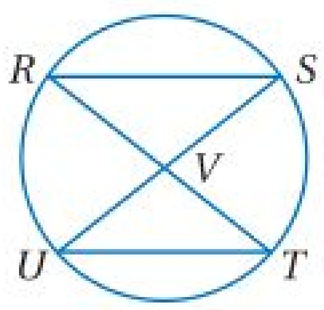
6) $m\angle B$



المثال 3 7) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.

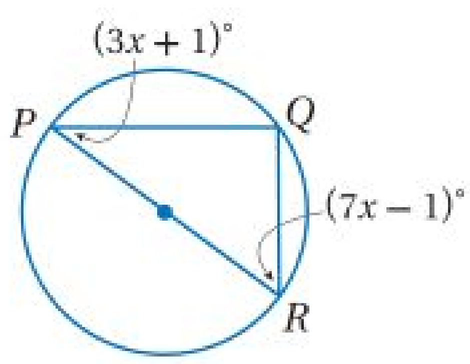
المعطيات: $\overline{RT}$ تُنصِّف $\overline{SU}$.

المطلوب: $\triangle RVS \cong \triangle UVT$

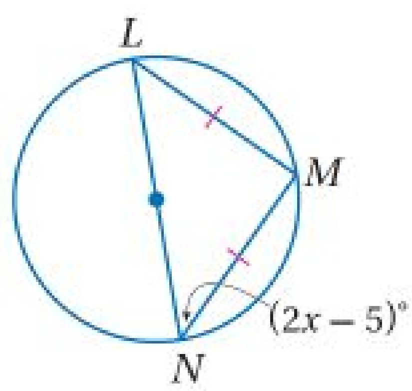


المثالان 4, 5 **جبر:** أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

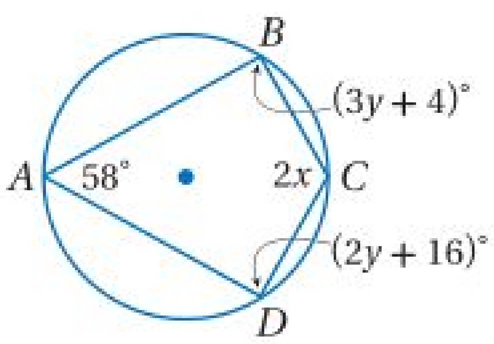
8) $m\angle R$



9) x



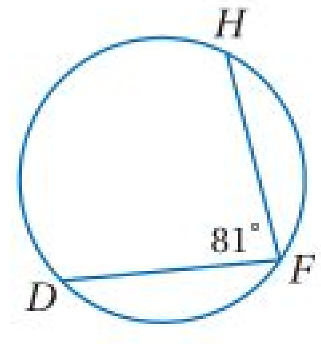
10) $m\angle C, m\angle D$



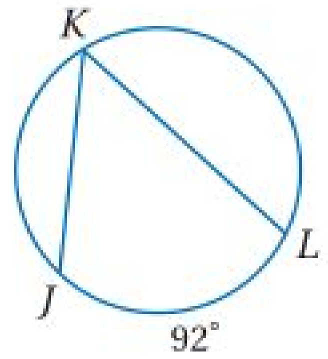
تدرب وحل المسائل

المثال 1 أوجد كل قياس ممّا يأتي:

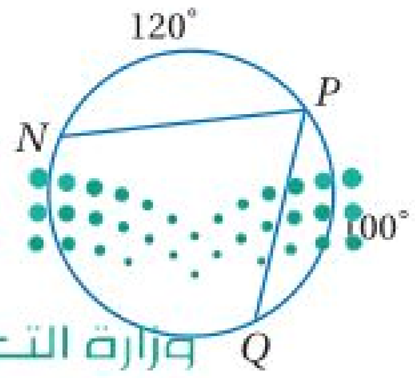
11) $m\widehat{DH}$



12) $m\angle K$



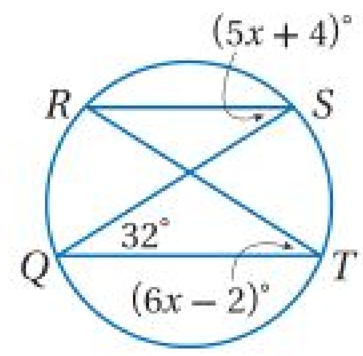
13) $m\angle P$



المثال 2 **جبر:** أوجد كل قياسٍ ممّا يأتي:

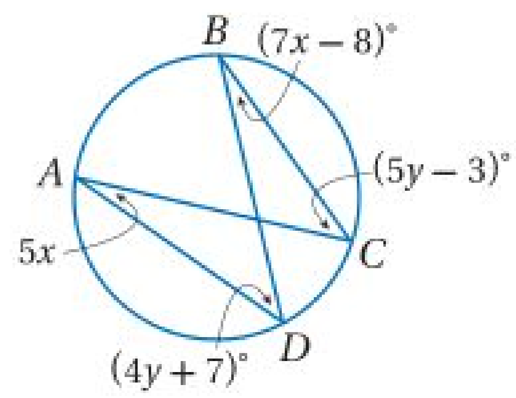
14) $m\angle R$

15) $m\angle S$



16) $m\angle A$

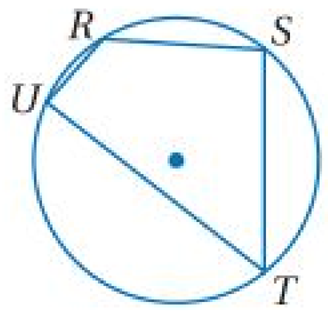
17) $m\angle C$



المثال 3 18) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $m\angle T = \frac{1}{2} m\angle S$

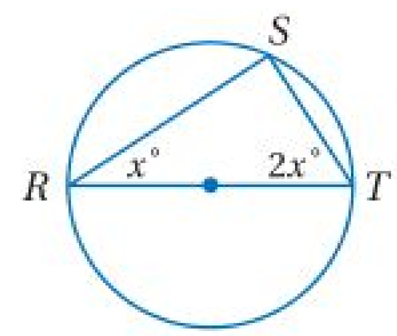
المطلوب: $m\widehat{TUR} = 2m\widehat{US}$



المثال 4 **جبر:** أوجد قيمة كلٍّ ممَّا يأتي:

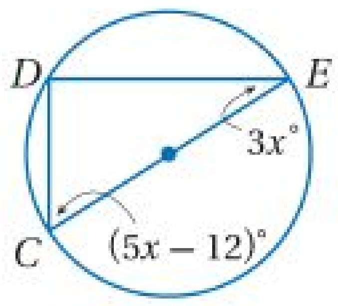
19) x

21) $m\angle T$



20) x

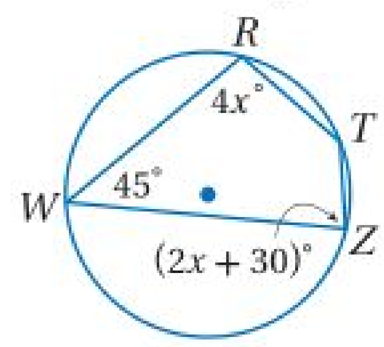
22) $m\angle C$



المثال 5 **جبر:** أوجد كلّ قياسٍ ممّا يأتي:

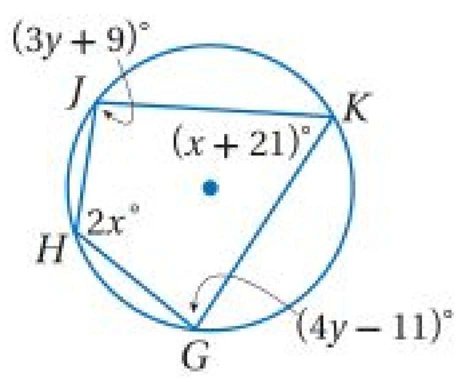
23) $m\angle T$

25) $m\angle Z$



24) $m\angle H$

26) $m\angle G$



27) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 8.9 .

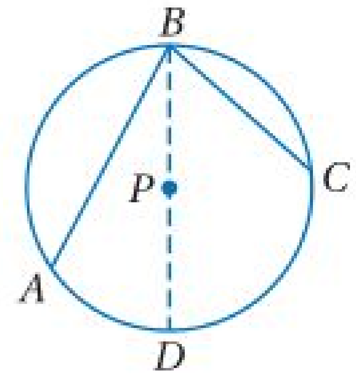
برهان: برهن النظرية **8.6** لحالتَي الزاوية المحيطية في الدائرة فيما يأتي:

28) الحالة الثانية:

المعطيات: يقع المركز P داخل $\angle ABC$.

$\overline{BD}$ قطر للدائرة.

المطلوب: $m\angle ABC = \frac{1}{2} m\widehat{AC}$

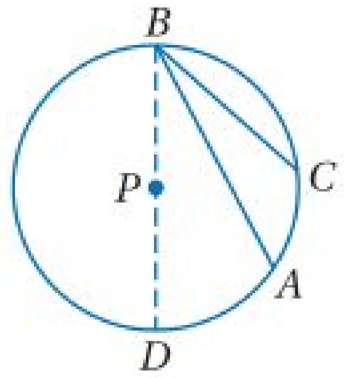


29) الحالة الثالثة:

المعطيات: يقع المركز P خارج $\angle ABC$.

$\overline{BD}$ قطر للدائرة.

المطلوب: $m\angle ABC = \frac{1}{2} m\widehat{AC}$



برهان: اكتب برهانًا من النوع المحدد لكلٍّ من النظريتين الآتيتين:

30) النظرية 8.7 ، برهانًا ذا عمودين.

31) النظرية 8.8 ، برهانًا حرًّا.

32) **تمثيلات متعددة:** في هذا السؤال ستستقصي العلاقة بين القوسين المحصورين بين وترين متوازيين في الدائرة.

a) **هندسيًّا:** ارسم دائرة تحوي وترين متوازيين هما $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ مستعملًا الفرجار، ثم صِلْ A , D برسم $\overline{AD}$.

b) **عدديًّا:** أوجد $m\angle A , m\angle D$ مستعملًا المنقلة، ثم حدّد $m\widehat{AC} , m\widehat{BD}$، ما العلاقة بين هذين القوسين؟ فسّر إجابتك.

c) **لفظيًّا:** ارسم دائرةً أخرى وكرّر الخطوتين **a , b** ، ثم ضع تخمينًا حول القوسين المحصورين بين وترين متوازيين في الدائرة.

مسائل مهارات التفكير العليا

تبرير: **حدّد ما إذا كان يمكن إحاطة كلٍّ من الأشكال الرباعية الآتية بدائرة دائمًا أو أحيانًا أو لا يمكن أبدًا. برّر إجابتك.**

33) المربع 34) المستطيل 35) المعين 36) شكل الطائرة الورقية

37) **تحدٍّ:** إذا كان مربع ما محاطًا بدائرة، فما نسبة مساحة الدائرة إلى مساحة المربع؟

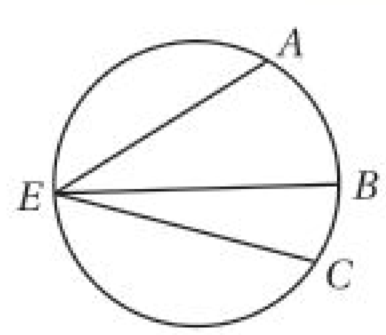
38) **اكتب:** إذا كان مثلث قائم زواياه $90°-45°-45°$ محاطًا بدائرة، وأُعطيت نصف قطر الدائرة، فاشرح طريقة لإيجاد طولَي ساقَي هذا المثلث.

39) **مسألة مفتوحة:** أوجد شعارًا **من واقع الحياة** يحوي مضلعًا محاطًا بدائرة، وارسمه.

40) **اكتب:** بيّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين الزاوية المركزية والزاوية المحيطية في الدائرة، وإذا كانت هاتان الزاويتان تقابلان القوس نفسه، فما العلاقة بينهما؟

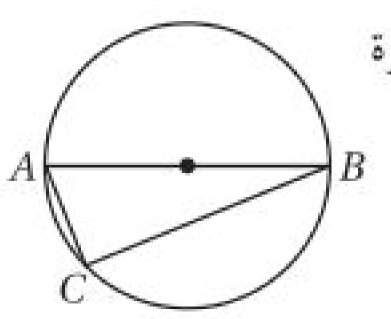
تدريب على اختبار

41) إذا كان: $m\widehat{AC} = 160°$ ، $m\angle BEC = 38°$ ، فأوجد قيمة $m\angle AEB$ مستعملًا الدائرة المجاورة:



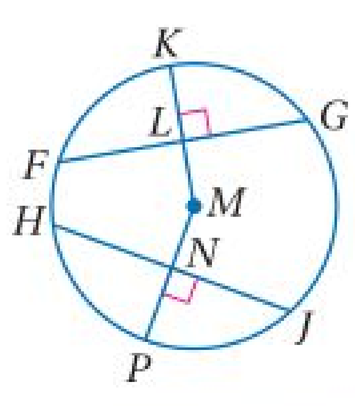
A $42°$ **B** $61°$ **C** $80°$ **D** $84°$

42) **إجابة قصيرة:** $\overline{AB}$ قطر في الدائرة المجاورة، وAC يساوي $8\,\text{in}$ ، و BC يساوي $15\,\text{in}$ ، أوجد قطر الدائرة ونصف قطرها ومحيطها.



مراجعة تراكمية

إذا كان: $m\widehat{HP} = 65°$ ، $FL = 24\,\text{in} , HJ = 48\,\text{in}$ ، فأوجد كلَّ قياسٍ ممَّا يأتي مستعملاً $\odot M$: (الدرس 3-8)



43) FG 44) $m\widehat{PJ}$

45) NJ 46) $m\widehat{HJ}$

استعد للدرس اللاحق

جبر: افترض أن B نقطة منتصف $\overline{AC}$ ، استعمل المعلومات المعطاة في كلٍّ ممَّا يأتي لإيجاد القياسات المجهولة:

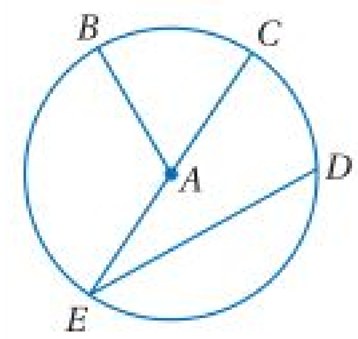
47) $AB = 4x - 5, BC = 11 + 2x, AC = ?$

48) $AB = 10s + 2, AC = 49 + 5s, BC = ?$

اختبار منتصف الفصل

الدروس 1-8 إلى 4-8

أجب عن الأسئلة 3 –1، مستعينًا بالدائرة أدناه. (الدرس 1-8)



1) سمِّ الدائرة.

2) سمِّ قطرًا.

3) سمِّ وترًا لا يكون قطرًا.

4) **دراجة هوائية:** قطر إطار دراجة هوائية يساوي 24 in (الدرس 1-8)

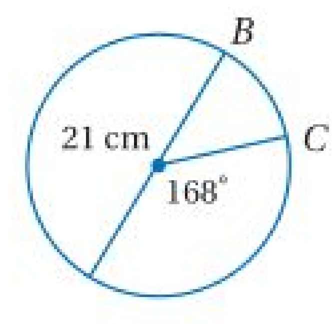
a) أوجد محيط إطار الدراجة.

b) ما المسافة بالبوصات التي تقطعها الدراجة عندما يدور إطارها 100 دورة؟

أوجد قطر ونصف قطر الدائرة المُعطَى محيطها في كلٍّ من السؤالين الآتيين مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة. (الدرس 1-8)

5) $C = 23$ cm **6)** $C = 78$ ft

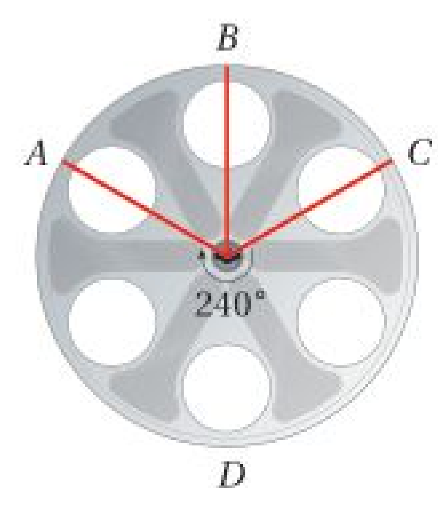
7) **اختيار من متعدد:** أوجد طول $\widehat{BC}$ في الشكل أدناه مقرّبًا إلى أقرب جزء من مئة: (الدرس 2-8)



A 2.20 cm **C** 30.79 cm

B 4.40 cm **D** 61.58 cm

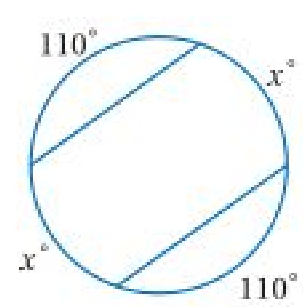
8) **أفلام:** قطر بكرة الفيلم الظاهرة في الشكل أدناه 14.5 in (الدرس 2-8)



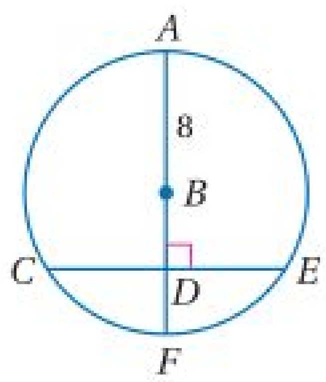
a) أوجد $m\widehat{ADC}$.

b) أوجد طول $\widehat{ADC}$.

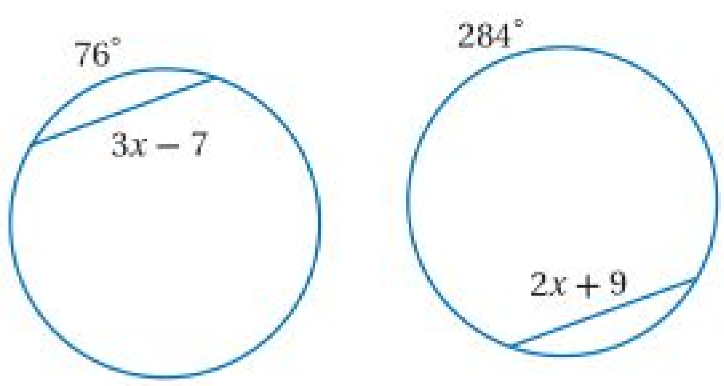
9) أوجد قيمة x في الشكل المجاور. (الدرس 3-8)



10) في $\odot B$، إذا كان $CE = 13.5$ cm، فأوجد BD مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.



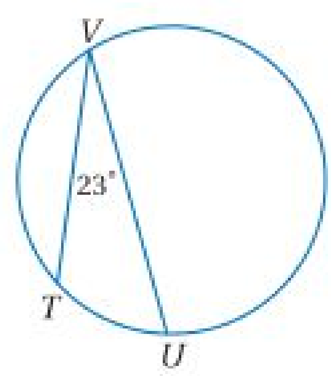
11) إذا كانت الدائرتان أدناه متطابقتين، فأوجد قيمة x وطول الوتر. (الدرس 3-8)

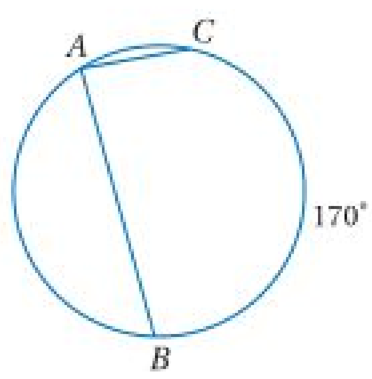


أوجد القياس المطلوب في كلٍّ من السؤالين الآتيين: (الدرس 4-8)

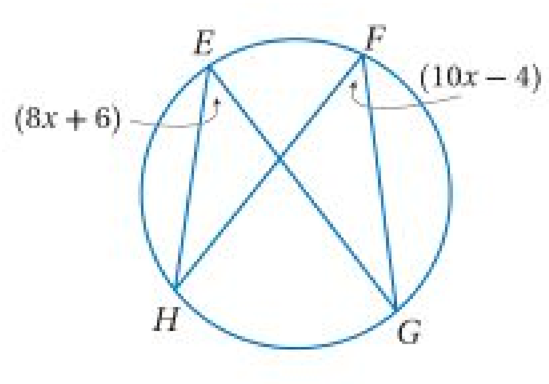
12) $m\widehat{TU}$ **13)** $m\angle A$

في الدائرة أدناه: في الدائرة أدناه:





14) **اختيار من متعدد:** أوجد قيمة x في الشكل أدناه: (الدرس 4-8)



A 1.8 **C** 5

B 46 **D** 90

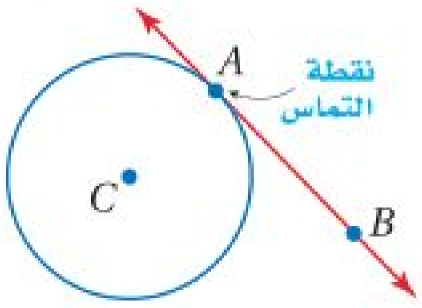
15) رُسم مربع طول ضلعه 14 cm، بحيث تقع رؤوسه على دائرة، فما قطر هذه الدائرة؟

8-5 المماسات
Tangents

لماذا؟

كانت الدراجات الهوائية تُحرّك سابقًا بدفع القدم على الأرض، أمّا الدّراجات الحديثة، فإنها تستعمل الدواسات والسلاسل والتروس، حيث تدور السلسلة حول تروس دائرية. ويُقاس طول السلسلة بين الترسين من نقطتَي تماسّ السلسلة مع الترسين.

المماسات: **المماس** هو مستقيم يقع في المستوى نفسه الذي تقع فيه الدائرة ويقطعها في نقطةٍ واحدةٍ فقط، تُسمّى **نقطة التماس**. $\overleftrightarrow{AB}$ مماس لـ $\odot C$ عند النقطة A، ويُسمّى كلٌّ من $\overrightarrow{AB}$, $\overline{AB}$ مماسًا للدائرة أيضًا.

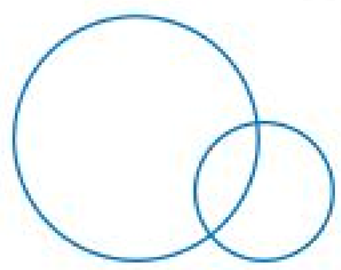


المماس المشترك هو مستقيم أو نصف مستقيم أو قطعة مستقيمة تمس الدائرتين في المستوى نفسه، وفي الشكلين أدناه المستقيم ℓ مماس مشترك للدائرتين F , G .

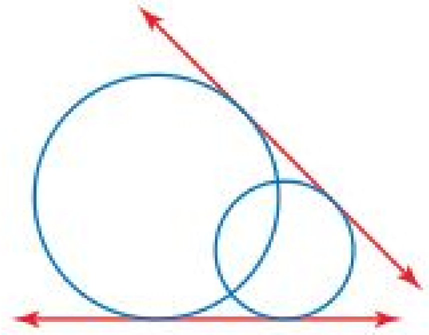
مثال 1 تحديد المماسات المشتركة

ارسم المماسات المشتركة للدائرتين في كلٍّ ممّا يأتي، وإذا لم يوجد مماس مشترك، فاكتب "لا يوجد مماس مشترك".

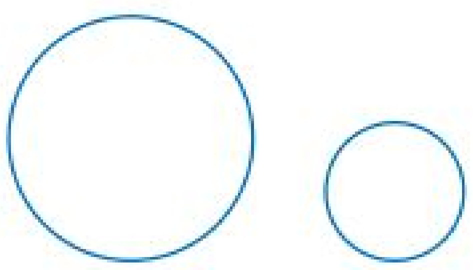
a)



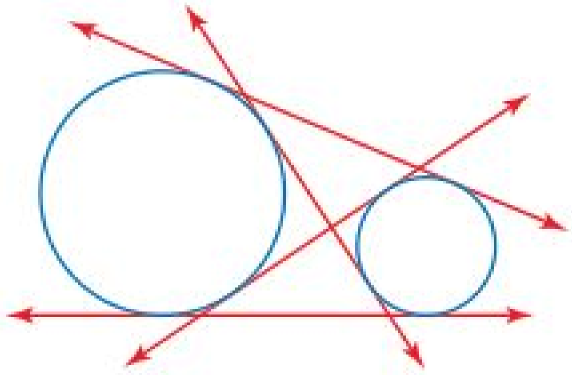
هاتان الدائرتان لهما مماسان مشتركان



b)



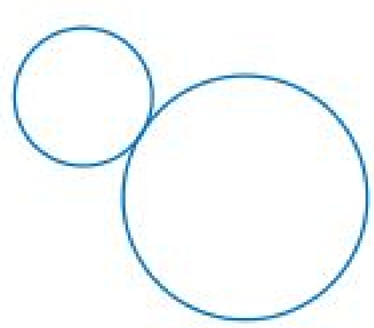
هاتان الدائرتان لهما 4 مماسات مشتركة



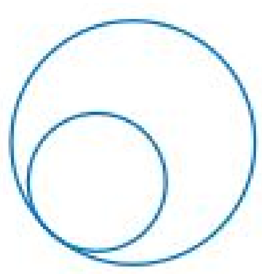
✓ تحقق من فهمك

ارسم المماسات المشتركة للدائرتين في كلٍّ ممّا يأتي، وإذا لم يوجد مماس مشترك، فاكتب "لا يوجد مماس مشترك".

1A)



1B)



فيما سبق:

درستُ استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية.

(مهارة سابقة)

والآن:

- أستعمل خصائص المماسات لإيجاد قياسات تتعلق بالدائرة.
- أحل مسائل تتضمَن المضلعات المحيطة بدائرة.

المفردات:

المماس
tangent

نقطة التماس
point of tangency

المماس المشترك
common tangent

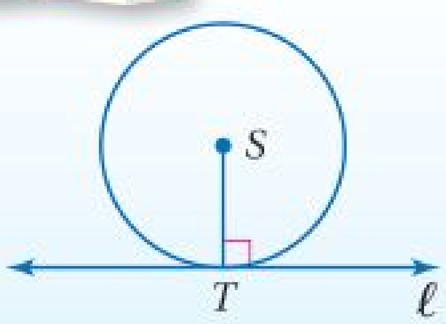
أقصر مسافة من المماس إلى مركز الدائرة هي نصف القطر المار بنقطة التماس.

النظرية 8.10

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يكون المستقيم مماسًّا لدائرة في المستوى نفسه، إذا وفقط إذا كان عموديًا على نصف القطر عند نقطة التماس.

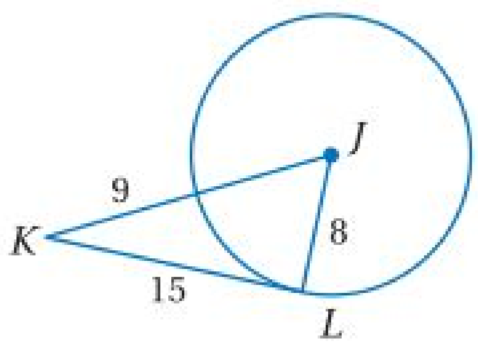
مثال: يكون المستقيم ℓ مماسًّا لـ $\odot S$، إذا وفقط إذا كان $\overline{ST} \perp \ell$.



ستبرهن جزأي النظرية 8.10 في السؤالين 24, 25

مثال 2 تحديد المماس

$\overline{JL}$ نصف قطر في $\odot J$، حدّد ما إذا كانت $\overline{KL}$ مماسًّا لـ $\odot J$ أم لا، برّر إجابتك.



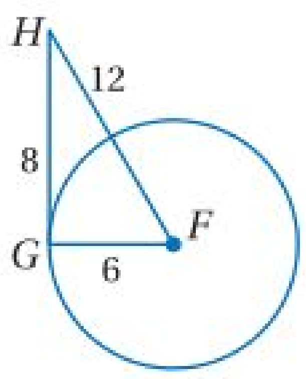
اختبر ما إذا كان $\triangle JKL$ قائم الزاوية.

$8^2 + 15^2 \stackrel{?}{=} (8+9)^2$ عكس نظرية فيثاغورس

$289 = 289$ ✓ بالتبسيط

لذا فإن $\triangle JKL$ قائم الزاوية في $\angle JLK$؛ أي أن $\overline{KL}$ عمودية على $\overline{JL}$ عند النقطة L. وبحسب النظرية 8.10 يكون $\overline{KL}$ مماسًّا لـ $\odot J$.

تحقق من فهمك



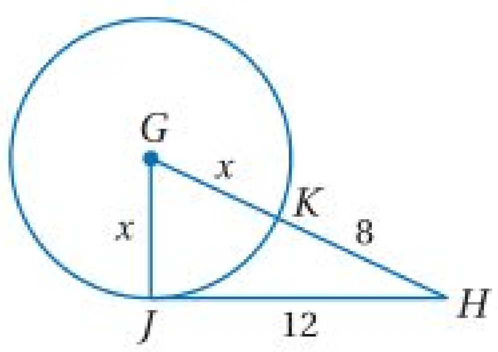
2) حدّد ما إذا كان $\overline{GH}$ مماسًّا لـ $\odot F$ أم لا، برّر إجابتك.

يمكنك استعمال النظرية 8.10 لإيجاد قيم مجهولة.

مثال 3 استعمال المماس لإيجاد القيم المجهولة

$\overline{JH}$ مماس لـ $\odot G$ عند J، أوجد قيمة x.

وفقًا للنظرية 8.10، يكون $\overline{GJ} \perp \overline{JH}$، إذن $\triangle GHJ$ قائم الزاوية.



$GJ^2 + JH^2 = GH^2$ نظرية فيثاغورس

$x^2 + 144 = (x+8)^2$ $GJ = x, JH = 12, GH = x + 8$

$x^2 + 144 = x^2 + 16x + 64$ بالضرب

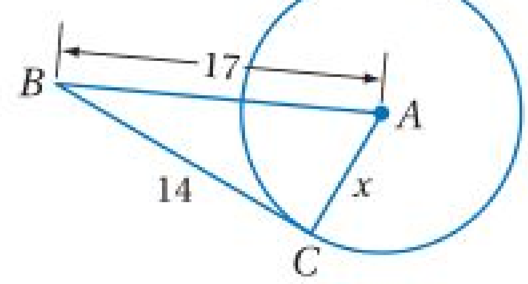
$80 = 16x$ بالتبسيط

$5 = x$ بقسمة كلا الطرفين على 16

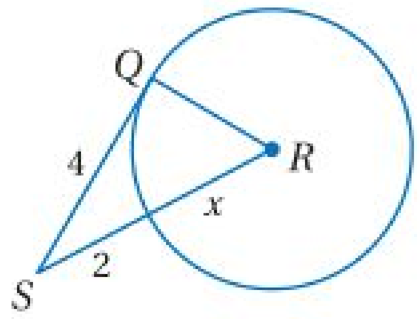
تحقق من فهمك

أوجد قيمة x في كلٍّ من الشكلين الآتيين مفترضًا أن القطعة المستقيمة التي تبدو مماسًّا للدائرة، هي مماسٌ فعلًا.

(3A

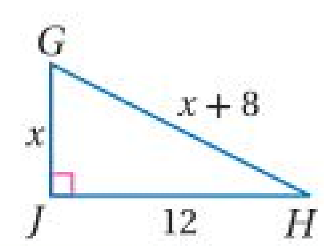


(3B



إرشادات لحل المسألة

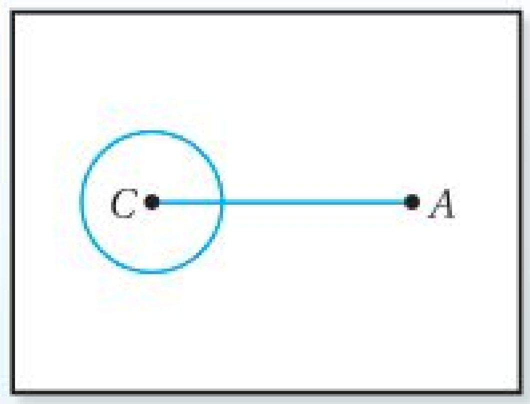
حل مسألة أبسط: يمكنك استعمال استراتيجية حل مسألة أبسط، برسم المثلث القائم من دون الدائرة وتسميته، والشكل أدناه يُبيِّن رسم المثلث في المثال 3



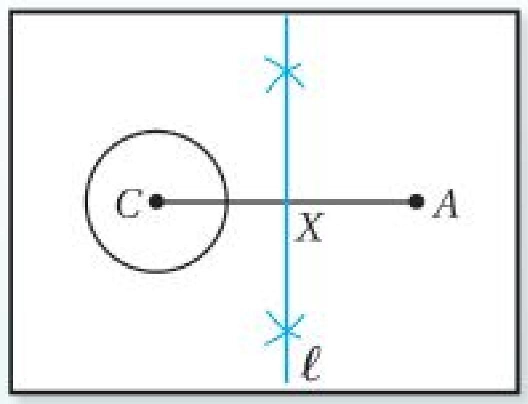
يمكنك استعمال النظريتين 8.10 , 8.8؛ لإنشاء مماسات الدائرة.

إنشاءات هندسية

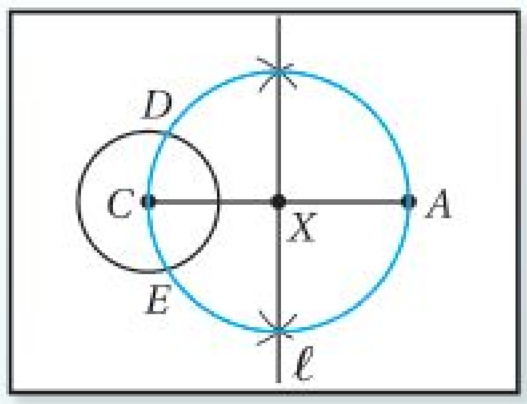
إنشاء مماسٍّ لدائرةٍ من نقطة خارجها



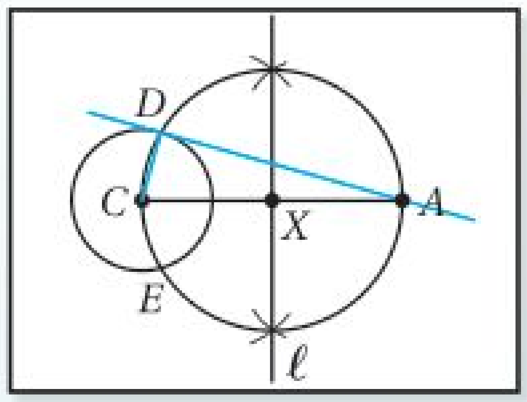
الخطوة 1: ارسم الدائرة C مستعملًا الفرجار، وحدّد نقطة A خارجها، ثم ارسم $\overline{CA}$.



الخطوة 2: أنشئ العمود المنصّف لـ $\overline{CA}$ وسَمِّه ℓ ، وسمِّ نقطة تقاطع ℓ مع $\overline{CA}$ النقطة X .



الخطوة 3: أنشئ الدائرة X بنصف قطر $\overline{XC}$، وسمِّ نقطتَي تقاطع الدائرتين D , E .



الخطوة 4: ارسم $\overleftrightarrow{AD}, \overline{DC}$. $\angle ADC$ تقابل قطرًا للدائرة X ؛ إذن فهي زاوية قائمة؛ لذا فإن $\overleftrightarrow{AD}$ مماسٌّ للدائرة C .

ستنشئ مماسًّا لدائرةٍ من نقطةٍ عليها في السؤال 26

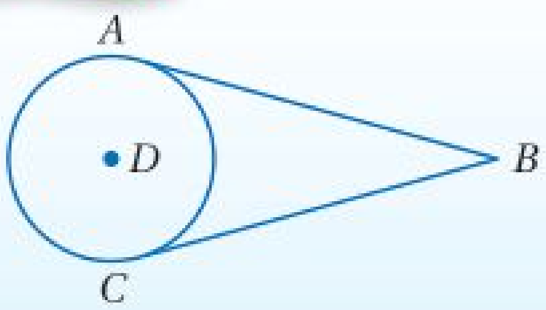
يمكنك أن ترسم مماسين للدائرة نفسها من نقطة واحدة خارجها.

نظرية 8.11

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا رُسمت قطعتان مستقيمتان مماستان لدائرة من نقطة خارجها فإنهما متطابقتان.

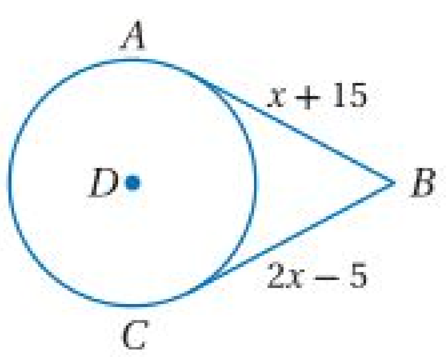
مثال: إذا كان $\overline{AB}$, $\overline{CB}$ مماسان لِـ $\odot D$ فإن $\overline{AB} \cong \overline{CB}$.



ستبرهن النظرية 8.11 في السؤال 22

مثال 4 استعمال المماسات المتطابقة لإيجاد قياسات

جبر: إذا كان $\overline{AB}, \overline{CB}$ مماسان للدائرة D ، فأوجد قيمة x .

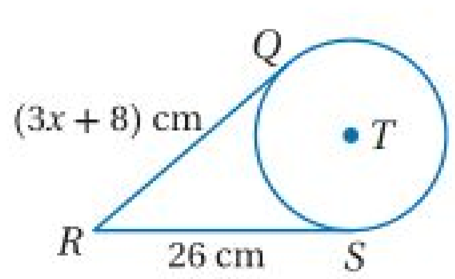


$AB = CB$	المماسان المرسومان من نقطة خارج الدائرة متطابقان
$x + 15 = 2x - 5$	بالتعويض
$15 = x - 5$	بطرح x من كلا الطرفين
$20 = x$	بإضافة 5 لكلا الطرفين

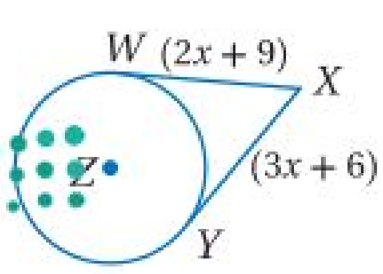
تحقق من فهمك

جبر: أوجد قيمة x في كلٍّ من الشكلين الآتيين، مفترضًا أن القطعة المستقيمة التي تبدو مماسًّا للدائرة هي مماسٌّ فعلًا.

(4A



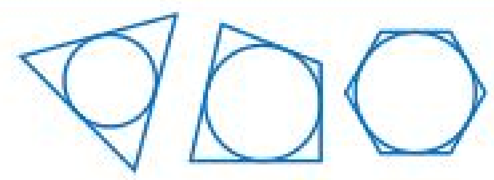
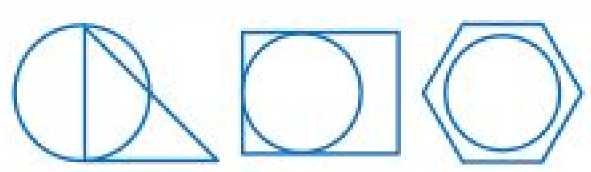
(4B



تنبيه !

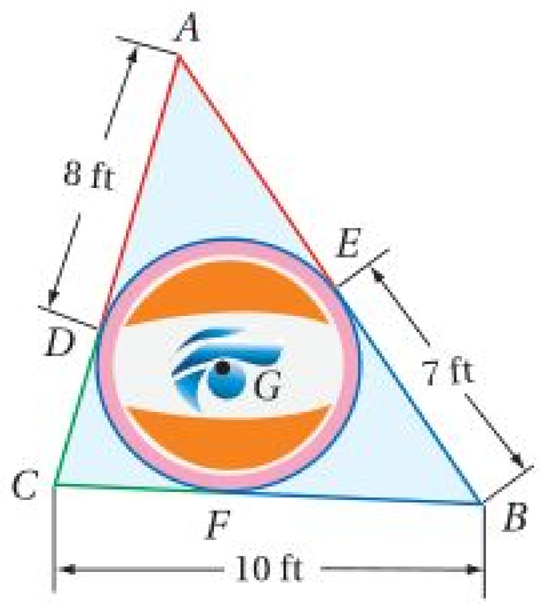
تحديد المضلّعات المحيطة بدائرة: إذا مسّت الدائرة بعض أضلاع المضلع ولم تمسها جميعها، فلا يُعدُّ المضلع محيطًا بالدائرة، وهذا ما يتضح في الجدول.

المضلّعات المحيطة بدائرة: يُحيط المضلّع بالدائرة، إذا كان كل ضلع من أضلاعه مماسًّا للدائرة.

مضلعات محيطة بدائرة	مضلعات ليست محيطة بدائرة
	

يمكنك استعمال النظرية 8.11؛ لإيجاد قياسات مجهولة في المضلّعات المحيطة بدائرة.

مثال 5 من واقع الحياة — إيجاد قياسات في المضلعات المحيطة بدائرة



تصميم مصور: صمّم منصور الشعار المبيّن في الشكل المجاور، إذا كان $\triangle ABC$ محيطًا بالدائرة G ، فأوجد محيطه.

الخطوة 1: أوجد القياسات المجهولة.

بما أن $\triangle ABC$ يحيط بالدائرة G ، فإن $\overline{AE}, \overline{AD}$ مماسّان للدائرة $\odot G$ ، وكذلك $\overline{BE}, \overline{BF}$ و $\overline{CF}, \overline{CD}$ مماسات أيضًا.

إذن: $\overline{AE} \cong \overline{AD}, \overline{BF} \cong \overline{BE}, \overline{CF} \cong \overline{CD}$

لذا فإن: $AE = AD = 8$ ft , $BF = BE = 7$ ft .

وبتطبيق مسلّمة جمع القطع المستقيمة ينتج أن $CF + FB = CB$

إذن: $CF = CB - FB = 10 - 7 = 3$ ft ؛ لذا فإن: $CD = CF = 3$ ft .

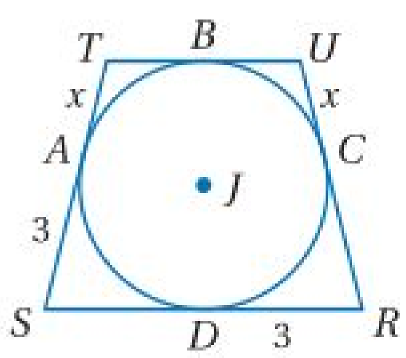
الخطوة 2: أوجد محيط $\triangle ABC$.

المحيط يساوي:

$AE + EB + BC + CD + DA = 8 + 7 + 10 + 3 + 8 = 36$

إذن محيط $\triangle ABC$ يساوي 36 ft .

تحقق من فهمك

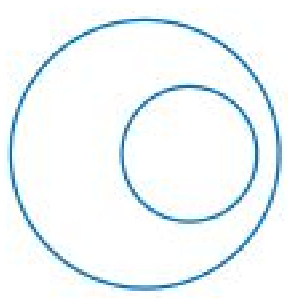


5) الشكل الرباعي $RSTU$ محيط بالدائرة J، إذا كان محيطه 18 وحدة، فأوجد قيمة x .

تأكـد

المثال 1

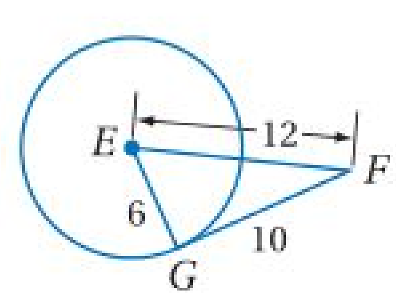
1) ارسم المماسات المشتركة للدائرتين المجاورتين، وإذا لم يوجد مماس مشترك، فاكتب "لا يوجد مماس مشترك".



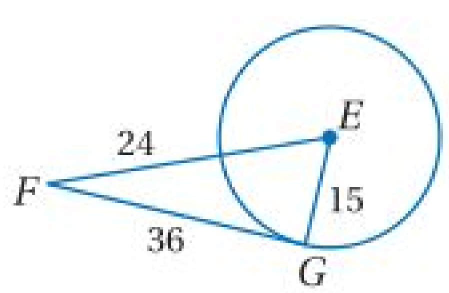
المثال 2

حدّد ما إذا كانت $\overline{FG}$ في كلٍّ من الشكلين الآتيين مماسًّا للدائرة E أم لا، وبرّر إجابتك.

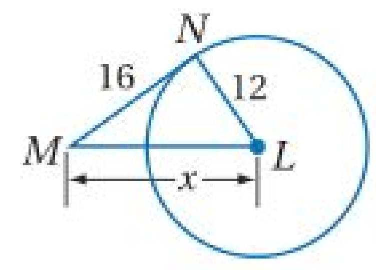
(2

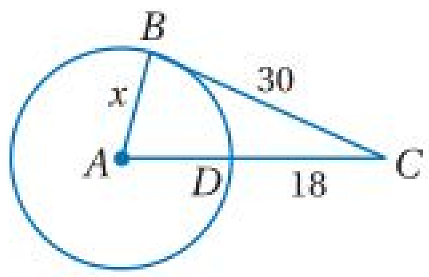


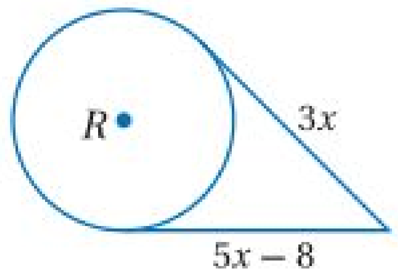
(3



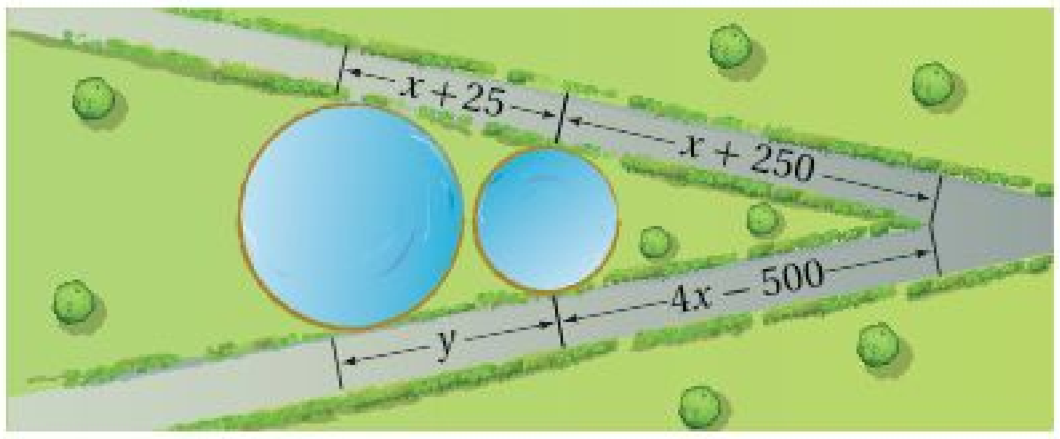
المثالان 3, 4 أوجد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا.

4)


5)


6)


7) **هندسة الحدائق:** خطط مهندس ممَّرين للمشاة يُشكّلان مماسين لبركتين دائريتين كما في الشكل أدناه. إذا كانت الأطوال معطاة بالأقدام، فأوجد قيمة كلٍّ من x و y.

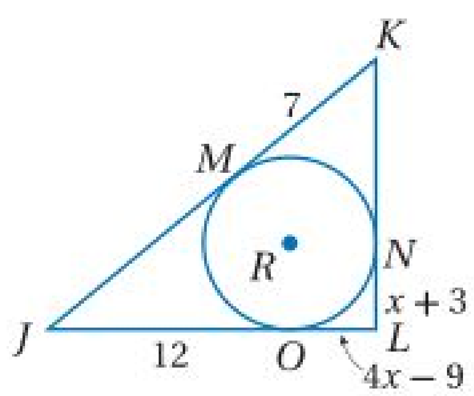


المثال 5

8) **جبر:** المثلث JKL يُحيط بالدائرة R.

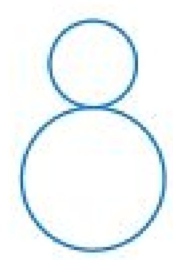
a) أوجد قيمة x.

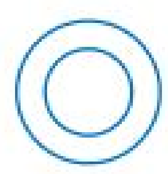
b) أوجد محيط $\triangle JKL$.

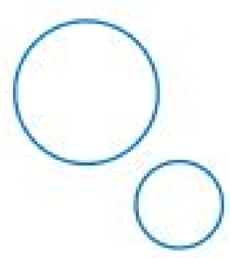


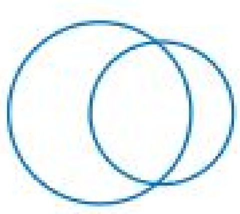
تدرب وحل المسائل

المثال 1 ارسم المماسات المشتركة للدائرتين في كلٍّ ممّا يأتي، وإذا لم يوجد مماس مشترك، فاكتب "لا يوجد مماس مشترك".

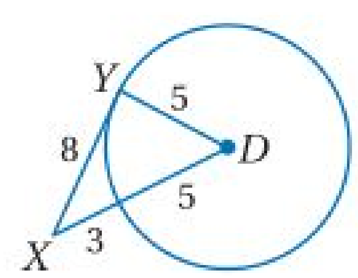
9)


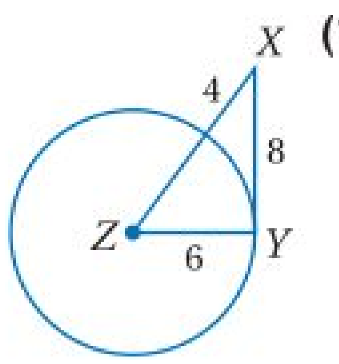
10)


11)


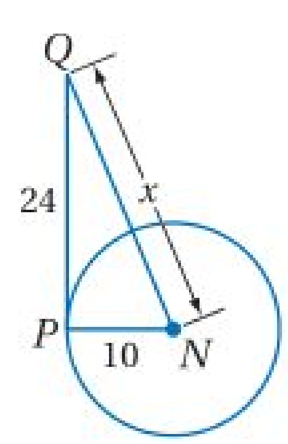
12)


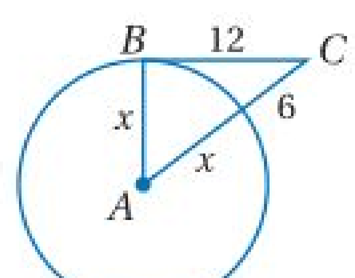
المثال 2 حدّد ما إذا كانت $\overline{XY}$ مماسًا للدائرة المعطاة في كلٍّ من السؤالين الآتيين أم لا، وبرّر إجابتك.

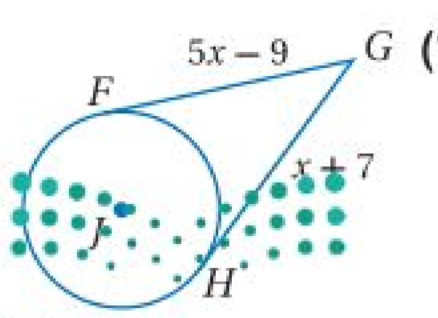
13)


14)


المثالان 3, 4 أوجد قيمة x في كلٍّ من الأسئلة الآتية مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا.

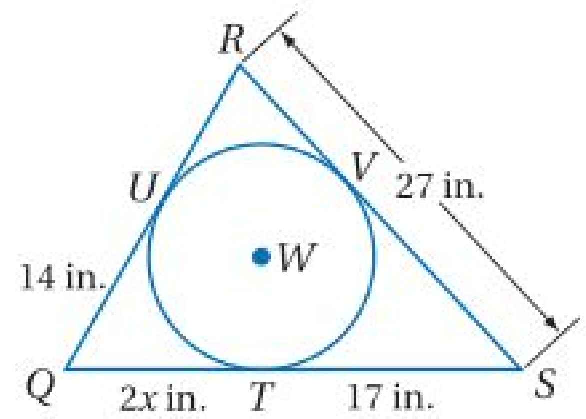
15)


16)


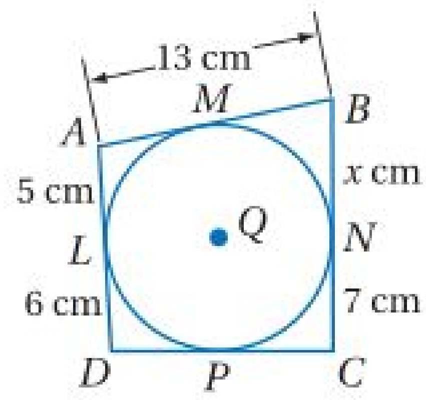
17)


المثال 5 إذا كان المضلع يحيط بالدائرة، فأوجد قيمة x، ثم أوجد محيط المضلّع في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

18)

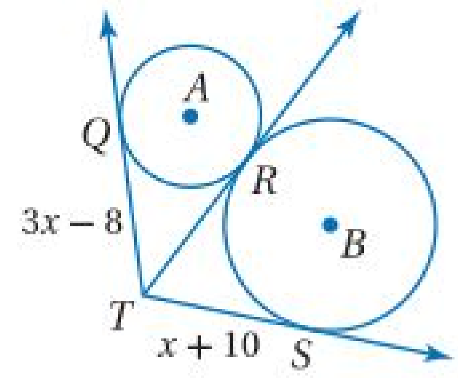


19)

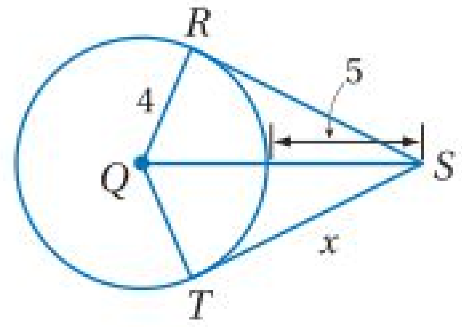


أوجد قيمة x في كلٍّ من السؤالين الآتيين، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا، وقرِّب إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ.

20)



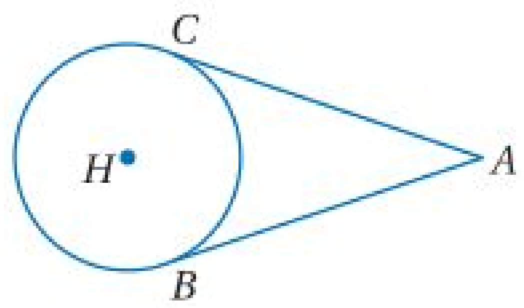
21)



إرشادات للدراسة

تحديد المماسات: لا تفترض أن القطع المستقيمة مماسات لمجرد أنها تبدو في الشكل كذلك إلا إذا طُلب إليك ذلك في السؤال. فيجب أن يحتوي الشكل على رمز الزاوية القائمة أو أن تكون الأطوال المبيّنة على الشكل تؤكّد أن الزاوية قائمة.

اكتب برهانًا من النوع المحدّد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:



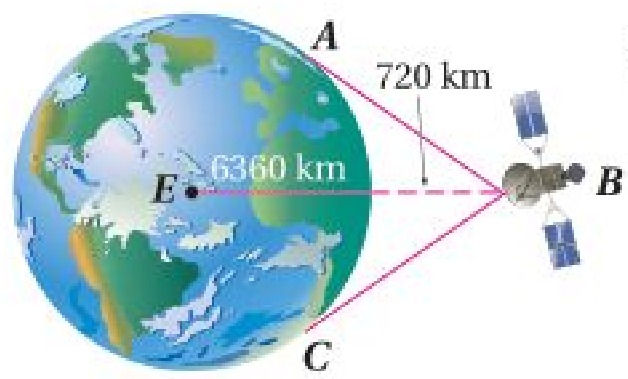
22) برهان ذي عمودين للنظرية 8.11

المعطيات: $\overline{AC}$ مماس لـ $\odot H$ عند النقطة C.

$\overline{AB}$ مماس لـ $\odot H$ عند النقطة B.

المطلوب: $\overline{AC} \cong \overline{AB}$

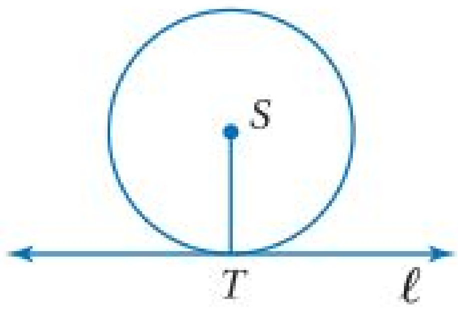
23) **أقمار اصطناعية:** يرتفع قمر اصطناعيٌّ مسافة 720 km عن سطح الأرض التي نصف قطرها 6360 km، ويمكن منه رؤية المنطقة التي تقع بين المماسين $\overline{BA}$, $\overline{BC}$ من سطح الأرض. أوجد BA مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ.



الربط مع الحياة

يوجد أكثر من 8000 قطعة كبيرة من الركام المداري كالأقمار الاصطناعية ومخلفاتها التي تدور حول الأرض بسرعة 8 km في الثانية تقريبًا.

24) **برهان:** اكتب برهانًا غير مباشر، لإثبات أنه إذا كان المستقيم مماسًّا للدائرة، فإنه يكون عموديًّا على نصف قطرها (الجزء 1 من النظرية 8.10)

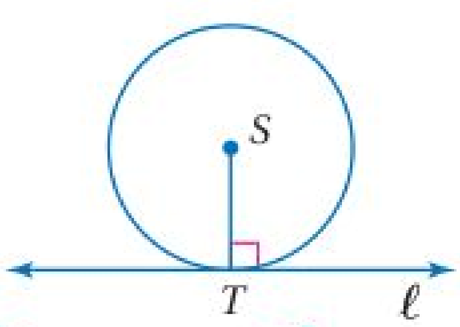


المعطيات: ℓ مماس للدائرة S عند T؛ $\overline{ST}$ نصف قطر في $\odot S$.

المطلوب: $\ell \perp \overline{ST}$

(إرشاد: افترض أن ℓ ليس عموديًّا على $\overline{ST}$).

25) **برهان:** اكتب برهانًا غير مباشر؛ لإثبات أنه إذا كان المستقيم عموديًّا على نصف قطر الدائرة عند نقطة التقائهما على الدائرة؛ فإنه مماسٌّ لهذه الدائرة. (الجزء 2 من النظرية 8.10)



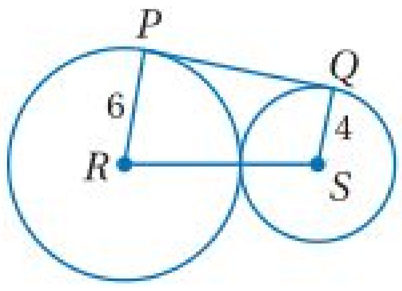
المعطيات: $\ell \perp \overline{ST}$ ، $\overline{ST}$ نصف قطر في $\odot S$.

المطلوب: إثبات أن ℓ مماس للدائرة S .

(إرشاد: افترض أن ℓ ليس مماسًّا للدائرة S).

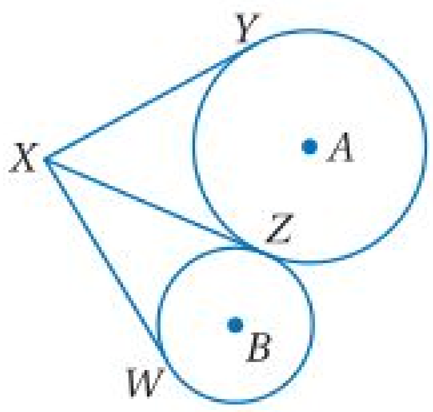
26) **إنشاءات هندسية :** أنشئ مماسًّا لدائرة من نقطة واقعة عليها باتباع الخطوات الآتية: ارسم $\odot A$ مستعملًا الفرجار. اختر نقطة P على الدائرة وارسم $\overleftrightarrow{AP}$ ، ثم أنشئ مستقيمًا عموديًّا على $\overleftrightarrow{AP}$ يمر بالنقطة P ، وسمِّ المماس المستقيم t.

مسائل مهارات التفكير العليا



27) **تحدٍّ :** $\overline{PQ}$ مماس للدائرتين R, S كما في الشكل المجاور. أوجد PQ ، وبرِّر إجابتك.

28) **مسألة مفتوحة :** ارسم مثلثًا يُحيط بدائرة، ومثلثًا محاطًا بدائرة.



29) **تبرير :** $\overline{XY}, \overline{XZ}$ مماسان للدائرة A ، و $\overline{XZ}$, $\overline{XW}$ مماسان للدائرة B كما في الشكل المجاور. فسّر لماذا تكون القطع المستقيمة $\overline{XY}, \overline{XZ}, \overline{XW}$ متطابقة رغم أن نصفَي قطرَي الدائرتين مختلفان.

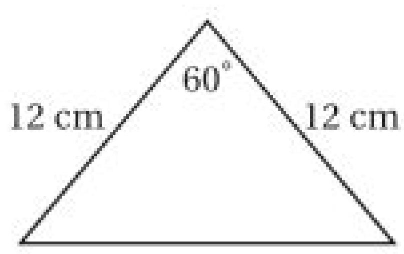
30) **اكتب :** ما عدد مماسات الدائرة التي يمكن رسمها من نقطة خارجها، ومن نقطة عليها، ومن نقطة داخلها؟ برّر إجابتك.

تدريب على اختبار

31) نصف قطر $\odot P$ يساوي 10 cm ، و $\overline{ED}$ مماسٌّ لها عند D ، وتقع F على $\odot P$ وعلى القطعة المستقيمة $\overline{EP}$. إذا كان $ED = 24$ cm ، فما طول $\overline{EF}$ ؟

A 10 cm **B** 16 cm **C** 21.8 cm **D** 26 cm

32) ما محيط المثلث المجاور؟

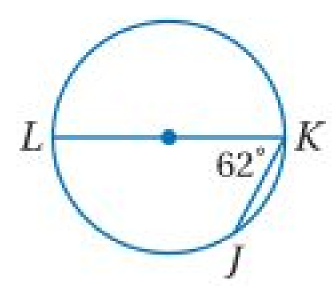


A 24 cm **B** 34.4 cm **C** 36 cm **D** 104 cm

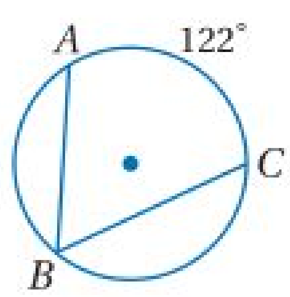
مراجعة تراكمية

أوجد كلّ قياس ممّا يأتي: (الدرس 4-8)

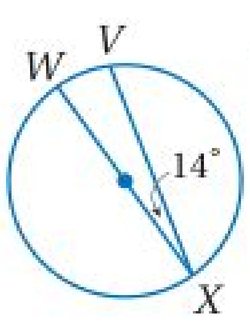
33) $m\widehat{JK}$



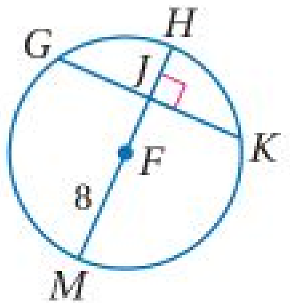
34) $m\angle B$



35) $m\widehat{VX}$



في $\odot F$ ، إذا كان: $m\widehat{GK} = 142°$, $GK = 14$ cm ، فأوجد كلًّا من القياسات الآتية: (الدرس 3-8)



36) $m\widehat{GH}$ 37) JK 38) $m\widehat{KM}$

استعد للدرس اللاحق

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

39) $15 = \frac{1}{2}[(360 - x) - 2x]$

40) $x + 12 = \frac{1}{2}[(180 - 120)]$

41) $x = \frac{1}{2}[(180 - 64)]$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

8-6 القاطع والمماس وقياسات الزوايا
Secant, Tangent, and Angle Measures

فيما سبق:

درست إيجاد أطوال القطع المستقيمة المتكوّنة من مماساتٍ للدائرة.

(الدرس 5-8)

والآن:

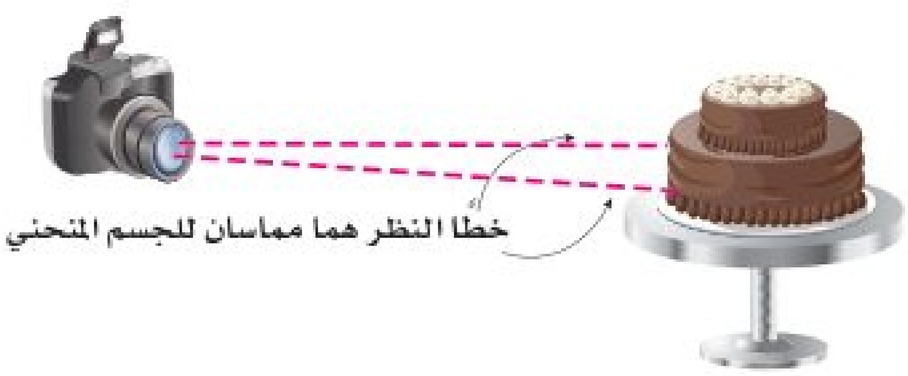
- أجد قياسات الزوايا المتكوّنة من مستقيمين يتقاطعان داخل الدائرة أو عليها.
- أجد قياسات الزوايا المتكونة من مستقيمين يتقاطعان خارج الدائرة.

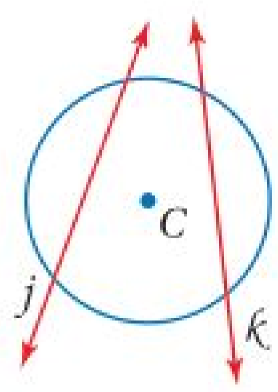
المفردات:

القاطع
secant

لماذا؟

معدل مجال الرؤية عند الإنسان يساوي $180°$ تقريبًا، ولكن زاوية الرؤية في معظم آلات التصوير أضيق من ذلك بكثير، فهي تتراوح بين $20°$ و$50°$. وتُحدّد زاوية الرؤية في آلات التصوير مقدار ما يمكن أن تلتقطه آلة التصوير على الفيلم من الأجسام المنحنية.



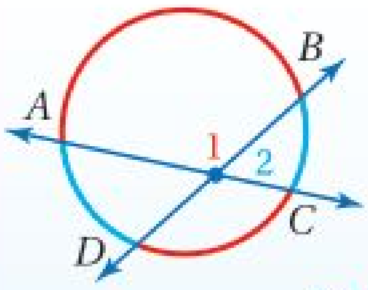


التقاطع على الدائرة أو داخلها: **القاطع** هو مستقيم يقطع الدائرة في نقطتين فقط، فالمستقيمان j, k هما قاطعان للدائرة C.

عندما يتقاطع قاطعان داخل دائرة؛ فإن الزوايا المتكوّنة ترتبط بالأقواس التي تقابلها.

نظرية 8.12

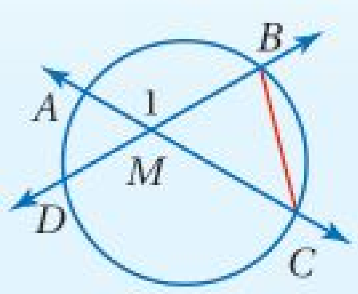
أضف إلى مطويتك



التعبير اللفظي: **إذا تقاطع قاطعان أو وتران داخل دائرة، فإن قياس الزاوية المتكوّنة من التقاطع يساوي نصف مجموع قياسَي القوس المقابل لهذه الزاوية والقوس المقابل للزاوية التي تقابلها بالرأس.**

مثال: $m\angle 2 = \frac{1}{2}(m\widehat{DA} + m\widehat{BC})$ و $m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} + m\widehat{CD})$

برهان



المعطيات: $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{BD}$ قاطعان للدائرة ويتقاطعان داخلها في M.

المطلوب: $m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} + m\widehat{CD})$

البرهان: تعلم أن $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{BD}$ قاطعان للدائرة، وأنهما يتقاطعان داخلها في M.

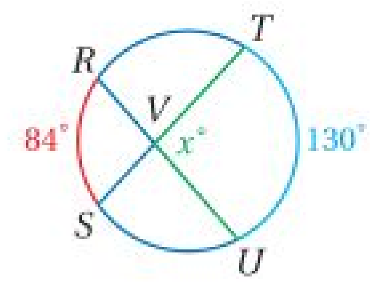
ارسم القطعة المستقيمة BC؛ لتحصل على المثلث MBC وهذا سيقودنا إلى ما يلي:

العبارات	المبررات
1) $m\angle 1 = m\angle MBC + m\angle MCB$	1) نظرية الزاوية الخارجية للمثلث
2) $m\angle MBC = \frac{1}{2} m\widehat{DC}, m\angle MCB = \frac{1}{2} m\widehat{BA}$	2) قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها.
3) $m\angle 1 = \frac{1}{2} m\widehat{DC} + \frac{1}{2} m\widehat{BA}$	4) بالتعويض
4) $m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\widehat{DC} + m\widehat{BA})$	4) خاصية التوزيع

مثال 1 استعمال القاطعين أو الوترين المتقاطعين

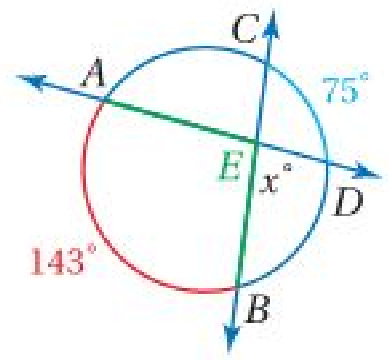
أوجد قيمة x في كلٍّ من الأشكال الآتية:

(a



$m\angle TVU = \frac{1}{2}(m\widehat{RS} + m\widehat{UT})$	النظرية 8.12
$x° = \frac{1}{2}(84° + 130°)$	بالتعويض
$= \frac{1}{2}(214°) = 107°$	بالتبسيط

(b



الخطوة 1: أوجد $m\angle AEB$.

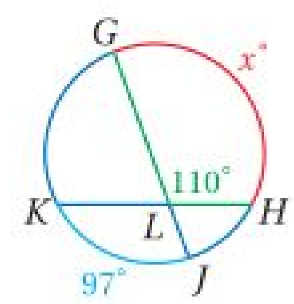
$m\angle AEB = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} + m\widehat{DC})$	النظرية 8.12
$= \frac{1}{2}(143° + 75°)$	بالتعويض
$= \frac{1}{2}(218°) = 109°$	بالتبسيط

الخطوة 2: أوجد قيمة x: أي قياس $\angle DEB$.

$\angle AEB$, $\angle DEB$ زاويتان متكاملتان.

$x° = 180° - 109° = 71°$

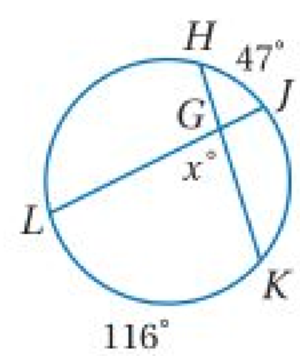
(c



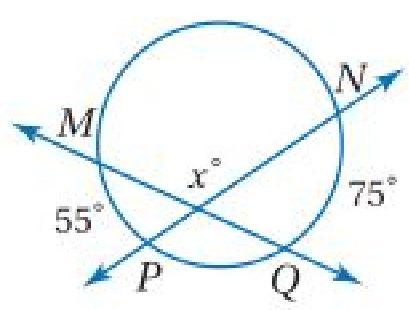
$m\angle GLH = \frac{1}{2}(m\widehat{HG} + m\widehat{KJ})$	النظرية 8.12
$110° = \frac{1}{2}(x° + 97°)$	بالتعويض
$220° = (x° + 97°)$	بضرب كلا الطرفين في 2
$123° = x°$	بطرح 97 من كلا الطرفين

تحقق من فهمك أوجد قيمة x في كلٍّ من الأشكال الآتية:

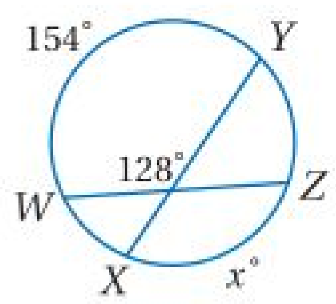
(1A



(1B



(1C



إرشادات للدراسة

طريقة بديلة: في المثال 1b، يمكنك إيجاد $m\angle DEB$ بحساب مجموع قياسَي $\widehat{AC}$, $\widehat{BD}$ أولًا.

$m\widehat{AC} + m\widehat{BD}$

$= 360° - (m\widehat{AB} + m\widehat{CD})$

$= 360° - (143° + 75°)$

$= 142°$

$m\angle DEB$

$= \frac{1}{2}(m\widehat{AC} + m\widehat{BD})$

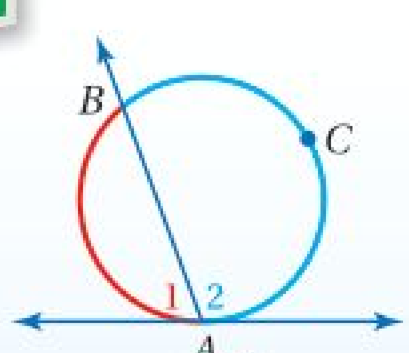
$= \frac{1}{2}(142°) = 71°$

تذكّر النظرية 8.6، والتي تنصُّ على أن قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها، وتبقى هذه النظرية صحيحة إذا كان أحد ضلعَي الزاوية مماسًّا للدائرة، وتسمى الزاوية في هذه الحالة الزاوية المماسية.

نظرية 8.13 نظرية الزاوية المماسية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا تقاطع مماس وقاطع عند نقطة التماس، فإن قياس كل زاوية متكونة من التقاطع يساوي نصف قياس القوس المقابل لها.

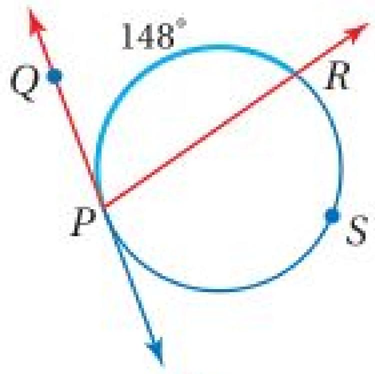


مثال: $m\angle 1 = \frac{1}{2} m\widehat{AB}$ و $m\angle 2 = \frac{1}{2} m\widehat{ACB}$

ستبرهن النظرية 8.13 في السؤال 27

مثال 2 استعمال القاطع والمماس المتقاطعين

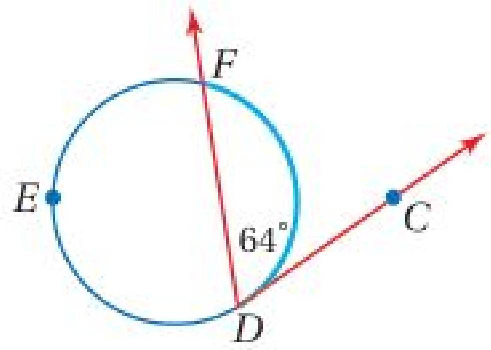
أوجد كلًّا من القياسات الآتية:



a) $m\angle QPR$

$m\angle QPR = \frac{1}{2}\, m\widehat{PR}$ النظرية 8.13

$= \frac{1}{2}\,(148°) = 74°$ بالتعويض والتبسيط



b) $m\widehat{DEF}$

$m\angle CDF = \frac{1}{2}\, m\widehat{FD}$ النظرية 8.13

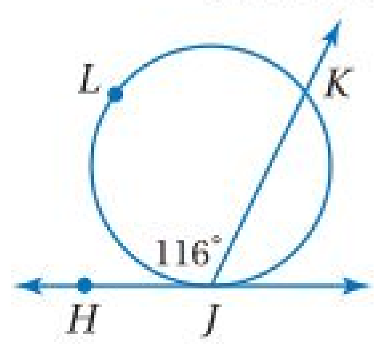
$64° = \frac{1}{2}\, m\widehat{FD}$ بالتعويض

$128° = m\widehat{FD}$ بضرب كلا الطرفين في 2

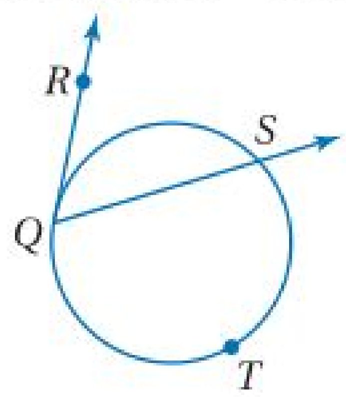
$$m\widehat{DEF} = 360° - m\widehat{FD} = 360° - 128° = 232°$$

تحقق من فهمك

2A) أوجد $m\widehat{JLK}$.



2B) إذا كان: $m\widehat{QTS} = 238°$، فأوجد $m\angle RQS$.



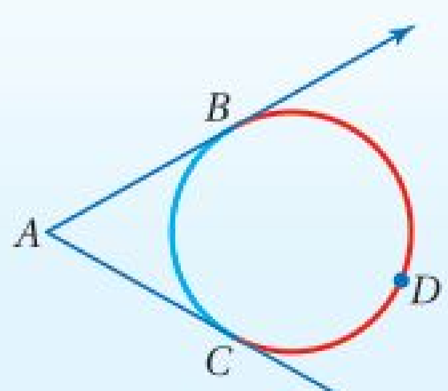
التقاطع خارج الدائرة: يمكن أن يتقاطع قاطعان أو قاطع ومماس أو مماسان خارج الدائرة أيضًا، وهنا يرتبط قياس الزوايا المتكونة بقياسَي القوسين المقابلين لها.

نظرية 8.14

أضف إلى مطويتك

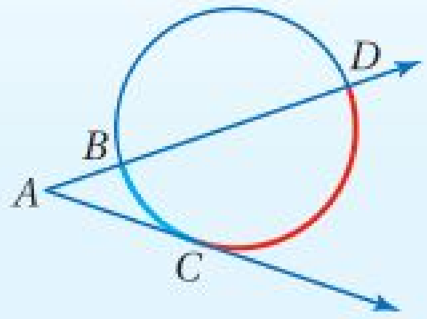
التعبير اللفظي: إذا تقاطع قاطعان أو قاطع ومماس أو مماسان في نقطة خارج دائرة، فإن قياس الزاوية المتكوِّنة يساوي نصف الفرق الموجب بين قياسَي القوسين المقابلين لها.

أمثلة:



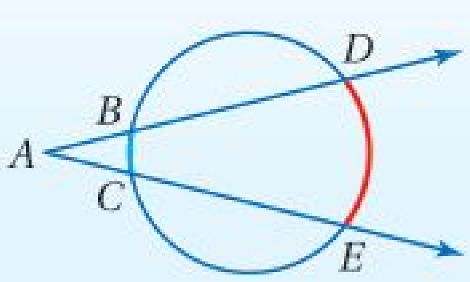
مماسان

$m\angle A = \frac{1}{2}\,(m\widehat{BDC} - m\widehat{BC})$



قاطع ومماس

$m\angle A = \frac{1}{2}\,(m\widehat{DC} - m\widehat{BC})$



قاطعان

$m\angle A = \frac{1}{2}\,(m\widehat{DE} - m\widehat{BC})$

ستبرهن النظرية 8.14 في الأسئلة 26–24

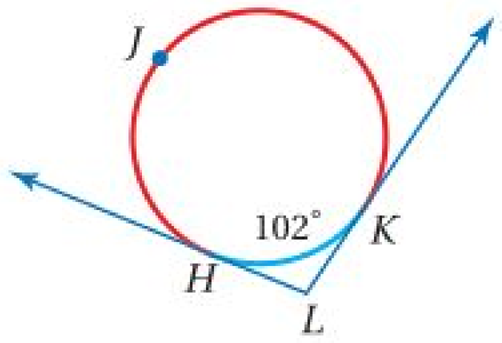
إرشادات للدراسة

القيمة المطلقة: يمكن التعبير عن قياس $\angle A$ في الحالات جميعها بنصف القيمة المطلقة للفرق بين قياسَي القوسين، وهكذا لا يؤثِّر ترتيب القوسين في نتيجة الحسابات.

مثال 3 استعمال المماسات والقواطع التي تتقاطع خارج الدائرة

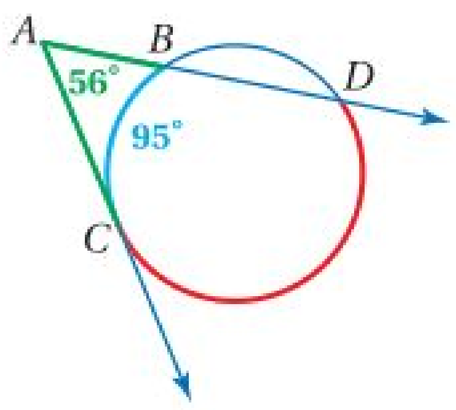
أوجد كلًّا من القياسين الآتيين:

a) $m\angle L$



$m\angle L = \frac{1}{2}(m\widehat{HJK} - m\widehat{HK})$	النظرية 8.14
$= \frac{1}{2}[(360° - 102°) - 102°]$	بالتعويض
$= \frac{1}{2}(258° - 102°) = 78°$	بالتبسيط

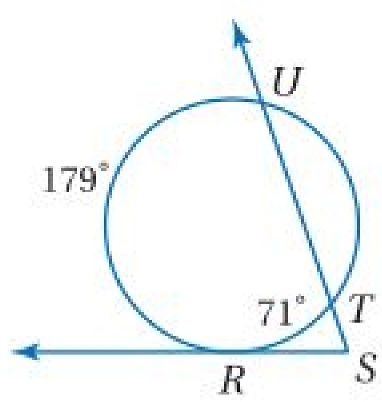
b) $m\widehat{CD}$



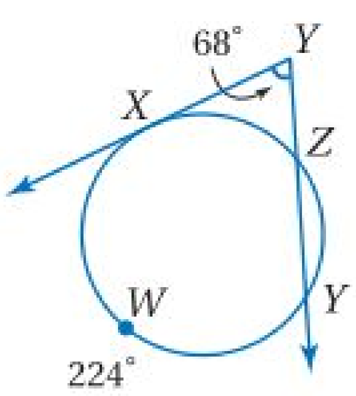
$m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{CD} - m\widehat{BC})$	النظرية 8.14
$56° = \frac{1}{2}(m\widehat{CD} - 95°)$	بالتعويض
$112° = m\widehat{CD} - 95°$	بضرب كلا الطرفين في 2
$207° = m\widehat{CD}$	بإضافة 95 لكلا الطرفين

تحقق من فهمك

3A) $m\angle S$



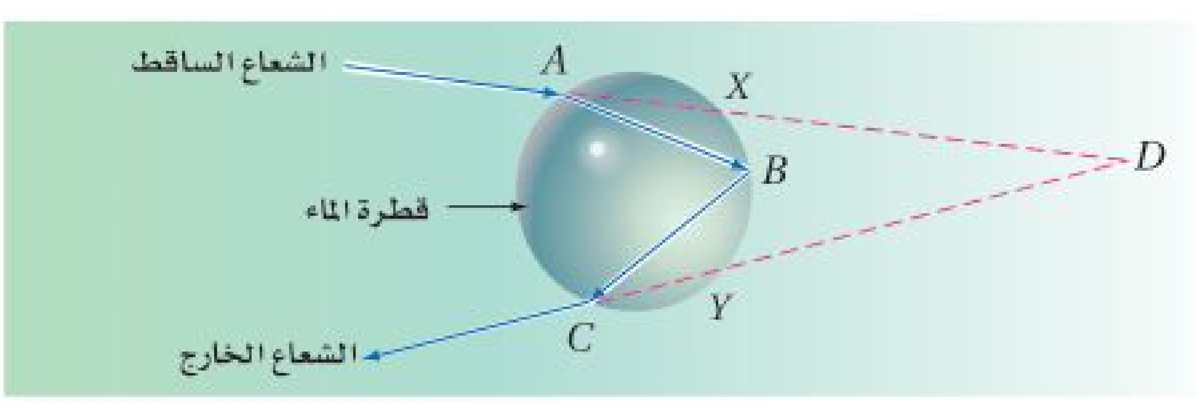
3B) $m\widehat{XZ}$



يمكنك تطبيق خصائص القواطع المتقاطعة، لحل مسائل **من واقع الحياة**.

مثال 4 من واقع الحياة تطبيق خصائص القواطع المتقاطعة خارج الدائرة

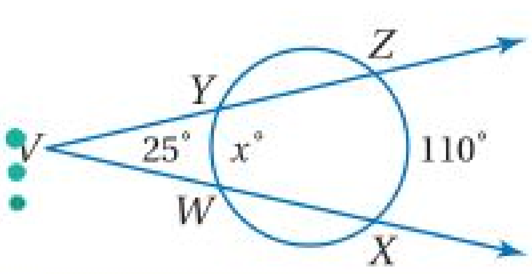
علوم: يُبيّن الشكل أدناه انكسار شعاع ضوء في قطرة ماء، وانحرافه عن مساره عند النقاط A, B, C، إذا كان $m\widehat{AC} = 128°$ و $m\widehat{XY} = 84°$، فما قيمة $m\angle D$؟



$m\angle D = \frac{1}{2}(m\widehat{AC} - m\widehat{XY})$	نظرية 8.14
$= \frac{1}{2}(128° - 84°)$	بالتعويض
$= \frac{1}{2}(44°) = 22°$	بالتبسيط

تحقق من فهمك

4) أوجد قيمة x في الشكل المجاور.



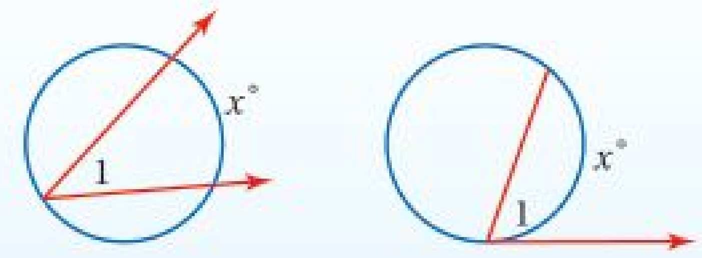
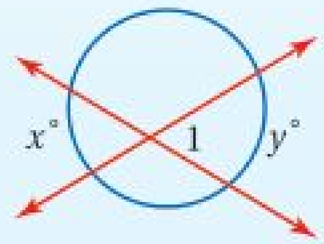
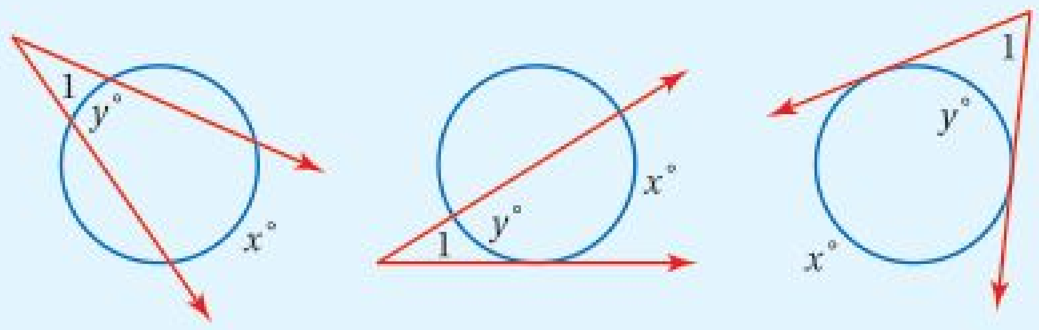
الربط مع الحياة

يتفاوت معامل الانكسار من وسط إلى آخر، ويُعبَر عن معامل الانكسار N لوسطٍ شفافٍ ما بالصيغة $N = \frac{c}{V}$، حيث c سرعة الضوء في الفراغ و V سرعة الضوء في ذلك الوسط.

ملخص المفهوم

أضف إلى مطويتك

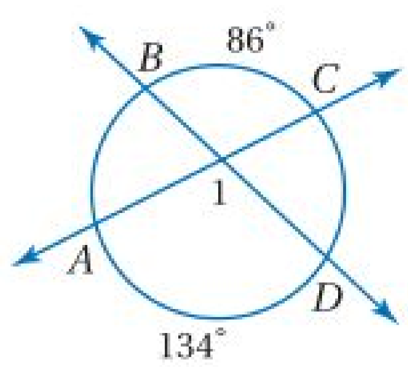
الدائرة وعلاقات الزوايا

موقع رأس الزاوية	نماذج	قياس الزاوية
على الدائرة		**نصف قياس القوس المقابل** $m\angle 1 = \frac{1}{2}x^\circ$
داخل الدائرة		**نصف مجموع قياسَي القوس المقابل للزاوية، والقوس المقابل للزاوية التي تقابلها بالرأس.** $m\angle 1 = \frac{1}{2}(x^\circ + y^\circ)$
خارج الدائرة		**نصف الفرق الموجب بين قياسَي القوسين المقابلَين لها** $m\angle 1 = \frac{1}{2}(x^\circ - y^\circ)$

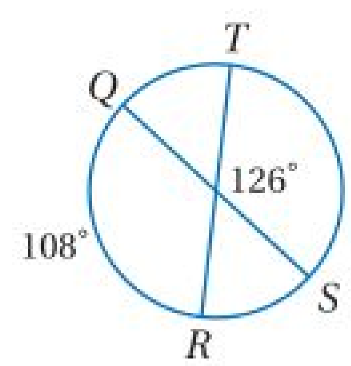
تأكد

المثالان 1, 2 أوجد كلًّا من القياسات الآتية، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا.

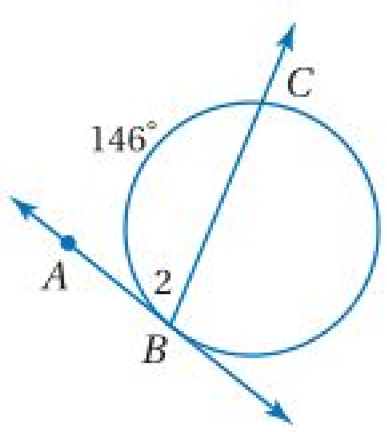
1) $m\angle 1$



2) $m\widehat{TS}$

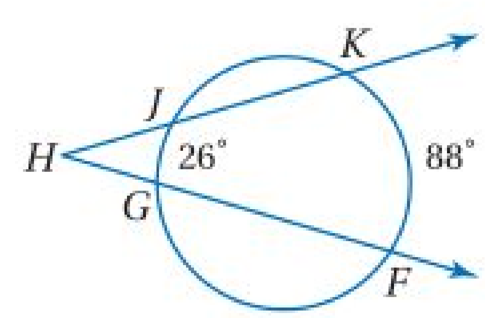


3) $m\angle 2$

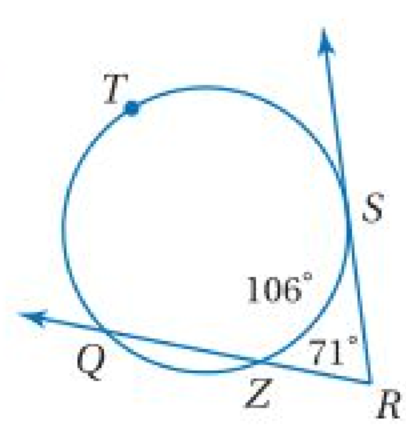


المثالان 3, 4

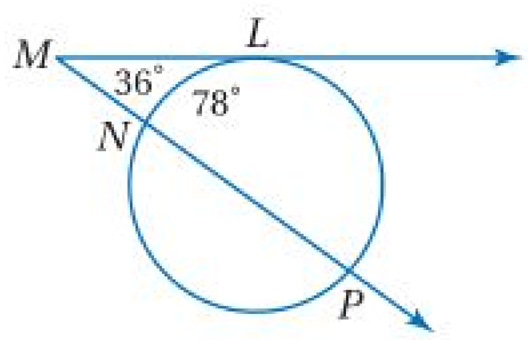
4) $m\angle H$



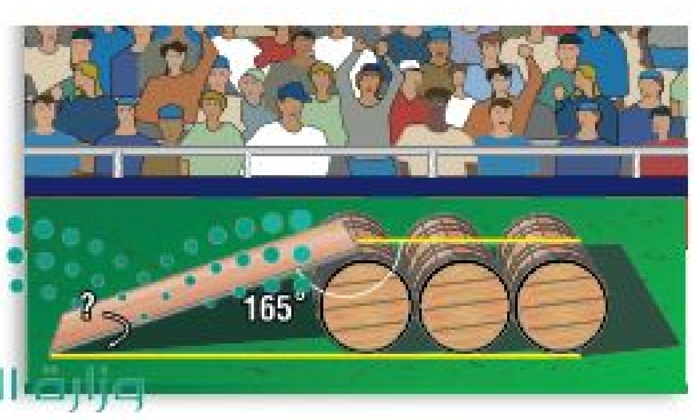
5) $m\widehat{QTS}$



6) $m\widehat{LP}$



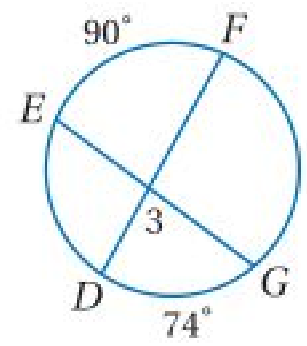
7) **ألعاب بهلوانية:** ثُبّت سطح مائل على البرميل الأول من مجموعة براميل رُبطت مع بعضها؛ ليقدم عليها لاعب السيرك عروضه المثيرة على دراجة نارية. ما قياس الزاوية التي يصنعها السطح المائل مع الأرض؟



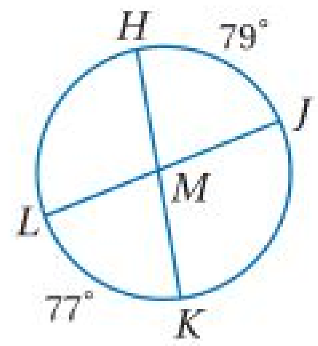
تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2 أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

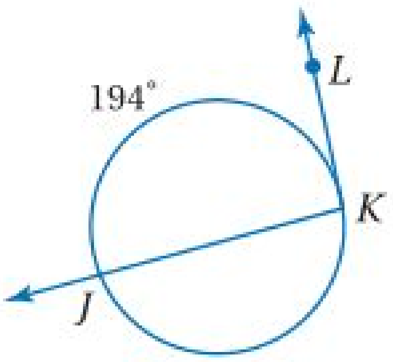
8) $m\angle 3$



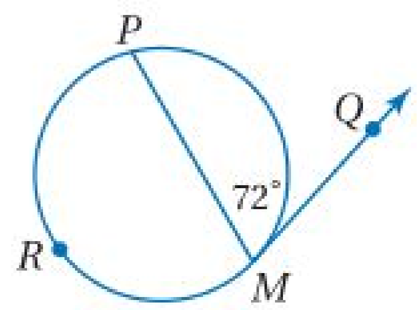
9) $m\angle JMK$



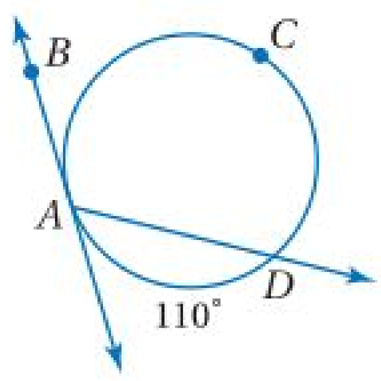
10) $m\angle K$



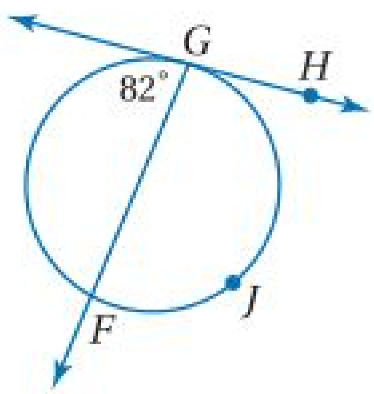
11) $m\widehat{PM}$



12) $m\angle DAB$



13) $m\widehat{GJF}$

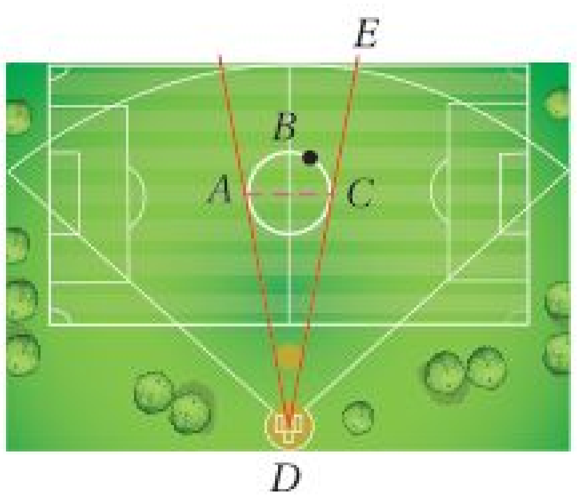


14) **رياضة:** يُمثّل الشكل المجاور ملعبًا رياضيًّا متعدّد الأغراض،

إذا كان: $m\widehat{ABC} = 200°$ ، فأوجد كلًّا من القياسين الآتيين:

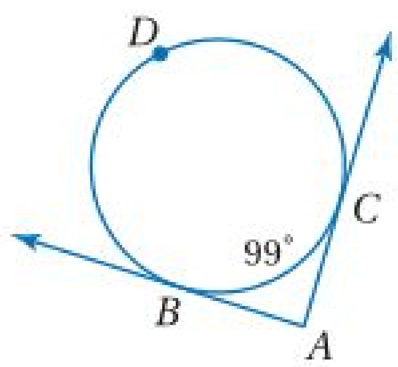
a) $m\angle ACE$

b) $m\angle ADC$

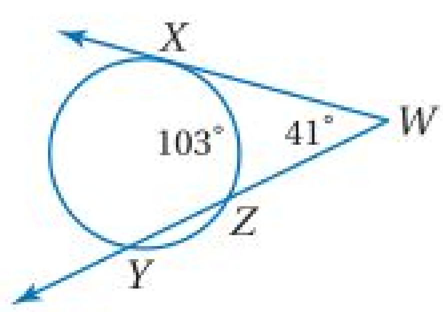


المثالان 3, 4 أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

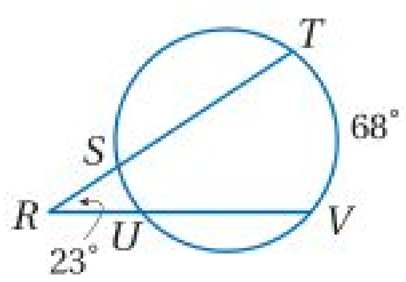
15) $m\angle A$



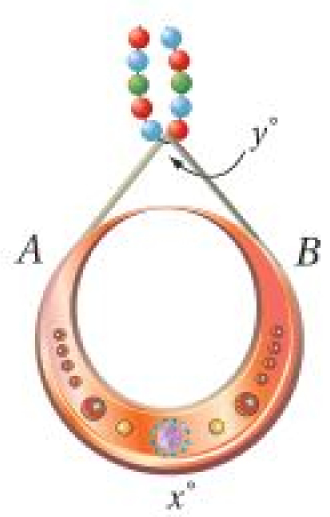
16) $m\widehat{XY}$



17) $m\widehat{SU}$



18) **مجوهرات:** يظهر في الشكل المجاور جزء من قلادة، A و B نقطتا تماسٍّ فيها، إذا كانت $x° = 260°$ ، فأوجد قيمة $y°$؟

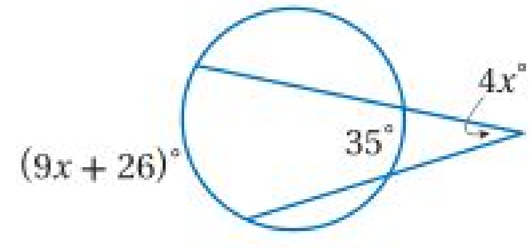


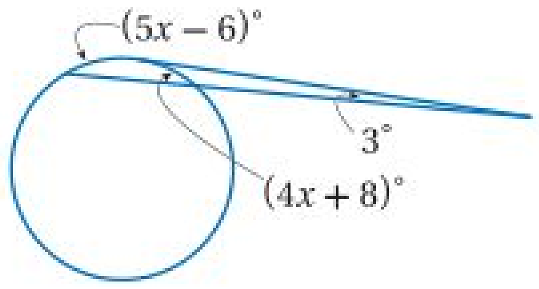
19) **تصوير:** استعدّ مصوِّر لالتقاط صورة بآلة التصوير للعبة الدوّامة الدائرية، بحيث كان خطّا النظر مماسين لها، كما في الشكل المجاور .

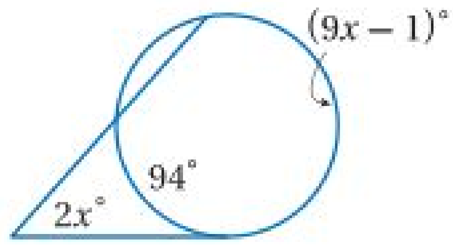
a) إذا كانت زاوية الرؤية لآلة التصوير تساوي $35°$، فما قياس قوس الدوّامة الذي سيظهر في الصورة؟

b) إذا أردت التقاط صورة لقوسٍ قياسه $150°$، فما قياس زاوية الرؤية التي يجب استعمالها؟

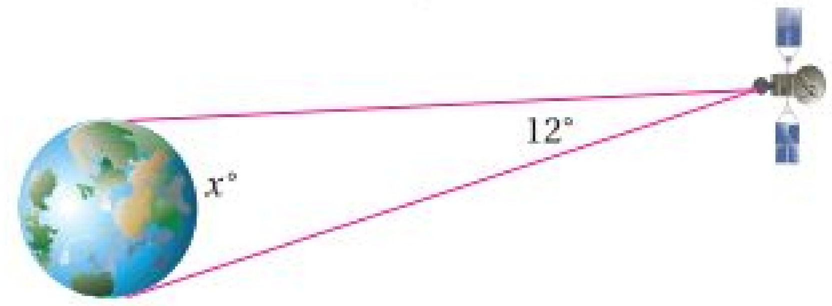
جبر: أوجد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:

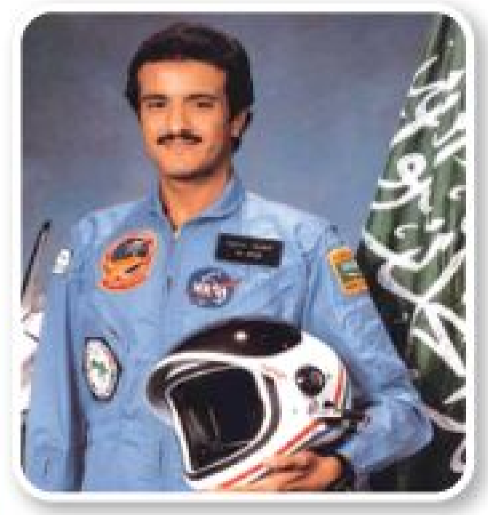
20)


21)


22)


23) **فضاء:** يدور قمر اصطناعي في مدار فوق خط الاستواء، أوجد قيمة x°، وهي قياس القوس المرئي من الأرض بالنسبة للقمر الاصطناعي.





الربط مع الحياة

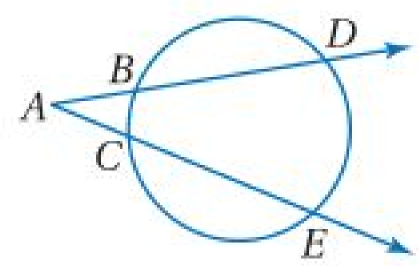
أول رائد فضاء سعودي هو صاحب السمو الملكي الأمير سلطان بن سلمان ابن عبدالعزيز على متن مكوك الفضاء (ديسكفري) رحلة رقم STS−51G في 29 من رمضان 1405هـ الموافق 17 يونيو 1985م.

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لكلّ حالة من حالات النظرية 8.14
(إرشاد: ارسم وترًا يصل نقطتي تقاطع القاطعان أو القاطع والمماس أو المماسان مع الدائرة).

24) حالة 1

المعطيات: $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AE}$ قاطعان للدائرة

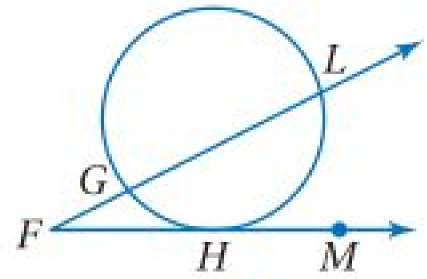
المطلوب: $m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{DE} - m\widehat{BC})$



25) حالة 2

المعطيات: $\overrightarrow{FM}$ مماس للدائرة و $\overrightarrow{FL}$ قاطع لها

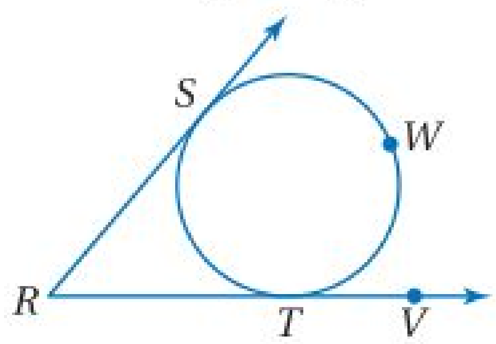
المطلوب: $m\angle F = \frac{1}{2}(m\widehat{LH} - m\widehat{GH})$



26) حالة 3

المعطيات: $\overrightarrow{RS}$ و $\overrightarrow{RV}$ مماسان للدائرة

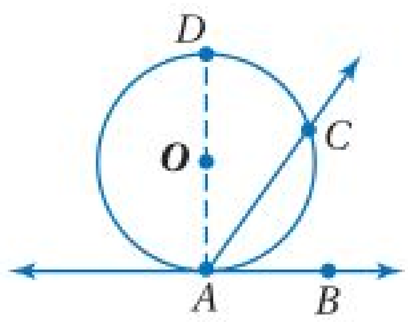
المطلوب: $m\angle R = \frac{1}{2}(m\widehat{SWT} - m\widehat{ST})$



27) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 8.13

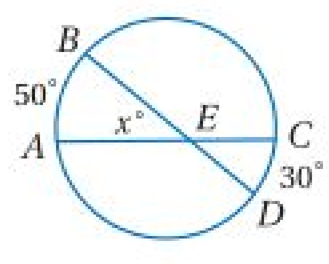
a) **المعطيات:** $\overleftrightarrow{AB}$ مماس لـ $\odot O$ ، $\overleftrightarrow{AC}$ قاطع لـ $\odot O$

المطلوب: إثبات أن $m\angle CAB = \frac{1}{2} m\widehat{CA}$.



b) برهن نظرية 8.13 إذا كانت الزاوية في فرع (a) زاويةً منفرجةً.

28) **تمثيلات متعددة:** في هذا السؤال ستستكشف العلاقة بين النظريتين 8.6, 8.12 ،



a) **هندسيًّا:** انقل الشكل المجاور إلى دفترك. ثم ارسم ثلاثة أشكال متتالية بحيث يتحرّك موقع D مقتربًا من C، مع بقاء C, A, B ثابتة في مواقعها.

b) **جدوليًّا:** قدِّر قياس $\widehat{CD}$ لكلٍّ من الدوائر المتتالية، سجّل قياسات $\widehat{AB}$ و $\widehat{CD}$ في جدول، ثم أوجد قيمة x لكلٍّ من هذه الدوائر.

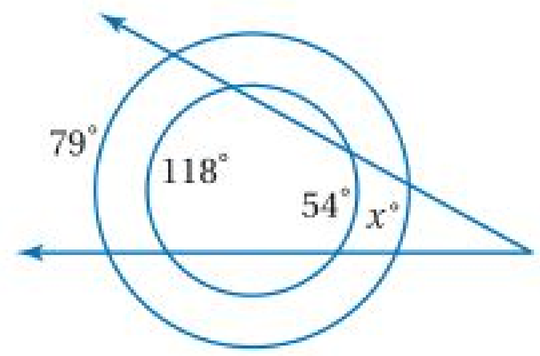
c) **لفظيًّا:** صِفِ العلاقة بين $m\widehat{AB}$ وقيمة x° عندما يقترب $m\widehat{CD}$ من الصفر. ما نوع $\angle AEB$ عندما يكون $m\widehat{CD} = 0$ ؟

d) **تحليليًّا:** اكتب برهانًا جبريًّا لإثبات ما توصّلت إليه في الفقرة c.

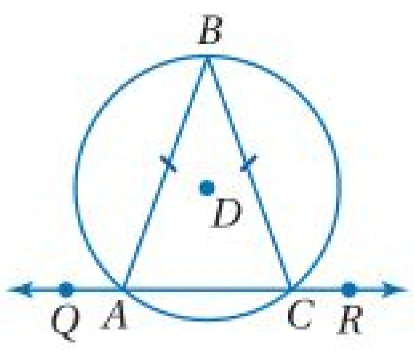
مسائل مهارات التفكير العليا

29) **اكتب:** اشرح كيفية إيجاد قياس الزاوية المكوّنة من تقاطع القاطع والمماس خارج الدائرة.

30) **تحدٍّ:** إذا كانت الدائرتان أدناه متحدتين في المركز، فما قيمة $x°$؟



31) **تبرير:** $\triangle ABC$ متطابق الضلعين محاط بالدائرة D، ماذا تستنتج عن $m\widehat{AB}$ و $m\widehat{BC}$؟ وضّح إجابتك.



32) **مسألة مفتوحة:** ارسم دائرةً ومماسَّين لها متقاطعين، واستعمل المنقلة لقياس الزاوية المتكوّنة، ثم أوجد قياس كلٍّ من القوسين الأكبر والأصغر المتكوّنين. برّر إجابتك.

33) **اكتب:** رُسمت دائرة محاطة بالمثلث PQR. إذا كان: $m\angle P = 50°, m\angle Q = 60°$ ، فصف طريقة إيجاد قياس الأقواس الثلاثة الصغرى المتكوّنة من نقاط التماس.

تدريب على اختبار

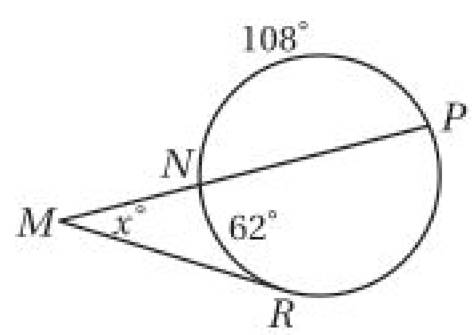
34) إذا كان:

$m\widehat{NR} = 62°, m\widehat{NP} = 108°$

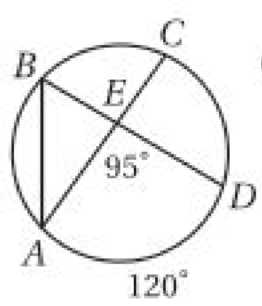
فما قيمة x؟

A $23°$ **C** $64°$

B $31°$ **D** $128°$



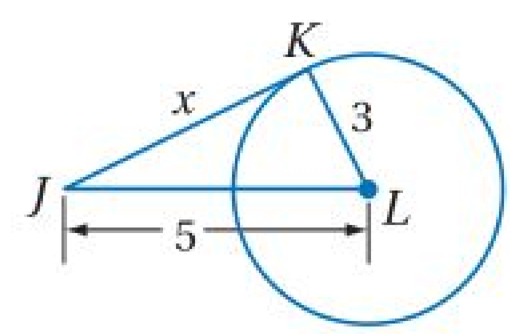
35) إذا كان: $m\angle AED = 95°, m\widehat{AD} = 120°$، فأوجد $m\angle BAC$؟



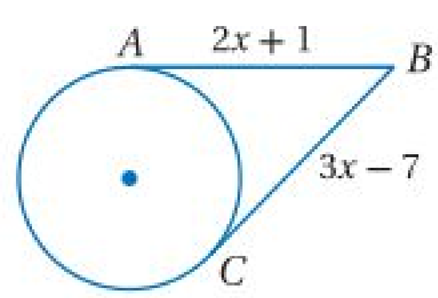
مراجعة تراكمية

أوجد قيمة x في كلّ ممّا يأتي، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا. (الدرس 8-5)

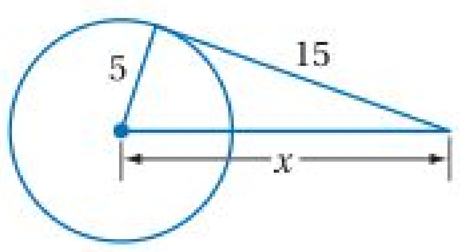
36)



37)



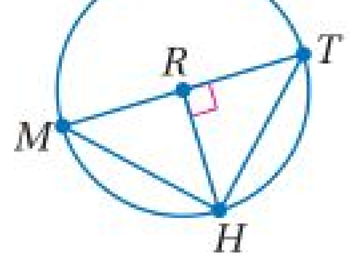
38)



39) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين. (الدرس 8-4)

المعطيات: $\widehat{MHT}$ نصف دائرة، $\overline{RH} \perp \overline{TM}$.

المطلوب: $\frac{TR}{RH} = \frac{TH}{HM}$



استعد للدرس اللاحق

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

40) $x^2 + 13x = -36$

41) $x^2 - 6x = -9$

42) $x^2 + 5x = -\frac{25}{4}$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

8-7 قطع مستقيمة خاصة في الدائرة
Special Segments in a Circle

فيما سبق:

درستُ إيجاد قياس الأقطار التي تتقاطع داخل متوازي الأضلاع.

(مهارة سابقة)

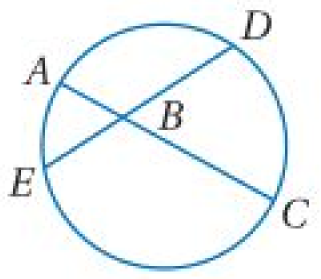
والآن:

- أجد قياسات الأوتار المتقاطعة داخل الدائرة.
- أجد قياسات القطع المستقيمة المتقاطعة خارج الدائرة.

لماذا؟

قُطِّعت كعكة دائرية كبيرة طوليًّا لتكفي أكبر عدد ممكن من المدعوين إلى حفلة، ولم يبقَ منها إلا قطعة صغيرة. يمكنك إيجاد قطر الكعكة الأصلية باستعمال الخصائص الهندسية للدائرة.

الأوتار المتقاطعة داخل الدائرة: عندما يتقاطع وتران داخل دائرة، ينقسم كلٌّ منهما جزأين، ففي الشكل المجاور، انقسم الوتر $\overline{AC}$ إلى $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ ، وكذلك انقسم الوتر $\overline{ED}$ إلى $\overline{EB}$ و $\overline{BD}$.



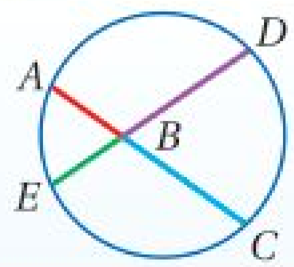
تصف النظرية الآتية العلاقة بين القطع المستقيمة الأربع التي تكوّنت من تقاطع وترين داخل دائرة.

نظرية 8.15 **نظرية قِطَع الوتر**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا تقاطع وتران في دائرة، فإن حاصل ضرب طولي جزأي الوتر الأول يساوي حاصل ضرب طولَي جزأي الوتر الثاني.

مثال: $AB \cdot BC = DB \cdot BE$

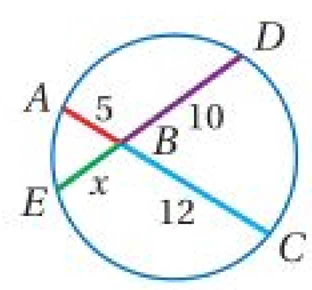


ستبرهن النظرية 8.15 في السؤال 15

مثال 1 **استعمال تقاطع الوترين**

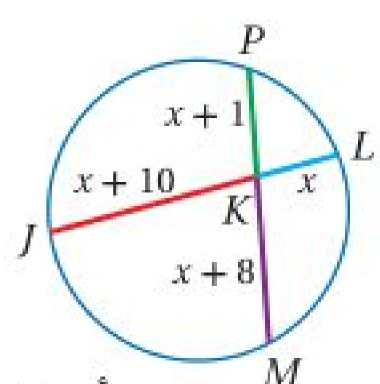
أوجد قيمة x في كلٍّ من الشكلين الآتيين:

a)



$AB \cdot BC = EB \cdot BD$	النظرية 8.15
$5 \cdot 12 = x \cdot 10$	بالتعويض
$60 = 10x$	بالضرب
$6 = x$	بقسمة كلا الطرفين على 10

b)

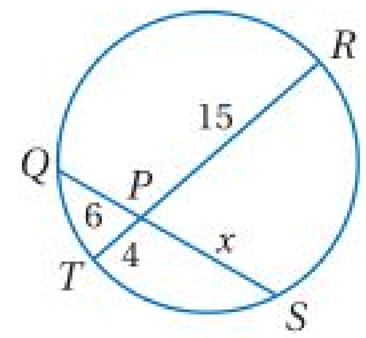


$JK \cdot KL = PK \cdot KM$	النظرية 8.15
$(x+10) \cdot x = (x+1)(x+8)$	بالتعويض
$x^2 + 10x = x^2 + 9x + 8$	بالضرب
$10x = 9x + 8$	بطرح x^2 من كلا الطرفين
$x = 8$	بطرح $9x$ من كلا الطرفين

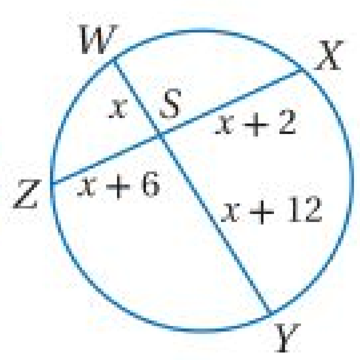
تحقق من فهمك

أوجد قيمة x في كلٍّ من الشكلين الآتيين :

(1A



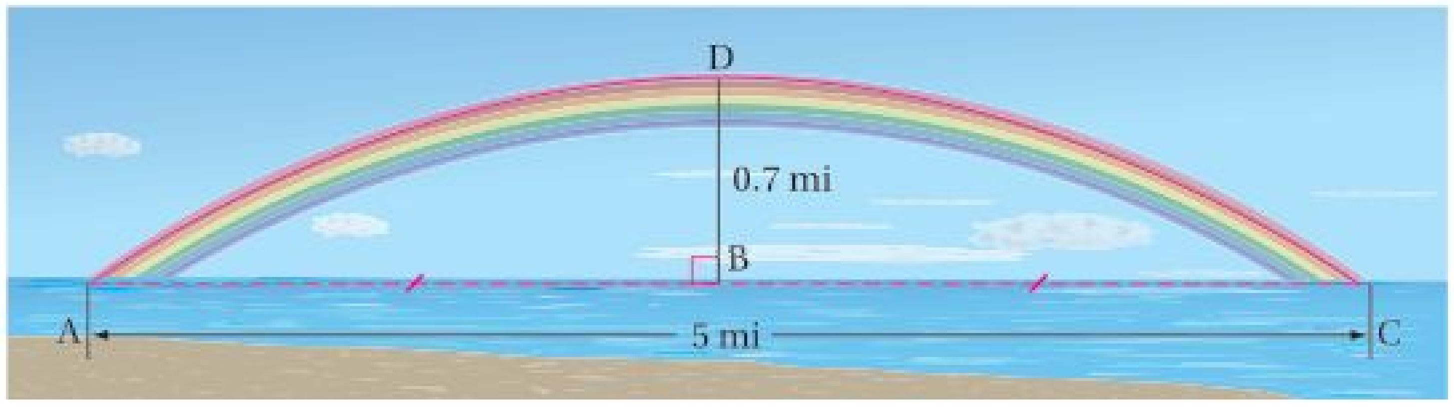
(1B



وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال 2 من واقع الحياة — إيجاد قياس قطع مستقيمة في الدائرة

علوم: شكل قوس المطر الحقيقي دائرة كاملة، ولا يظهر لنا منها إلا القوس الذي يظهر فوق أفق الكرة الأرضية. ما نصف قطر الدائرة التي تحوي قوس المطر الظاهر في الشكل أدناه؟



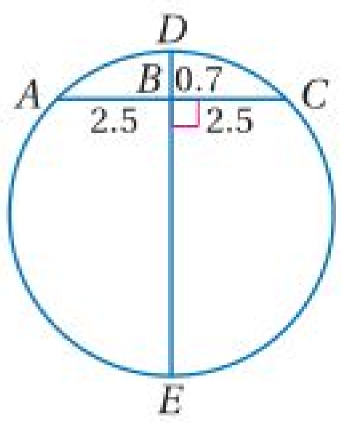
افهم: **المعطيات:** قوس المطر الظاهر جزء من دائرة

$\overline{AC}$ وتر في الدائرة

$\overline{DB}$ عمود منصف للوتر $\overline{AC}$

المطلوب: إيجاد طول نصف قطر الدائرة التي تحوي قوس المطر الظاهر.

خطط: ارسم نموذجًا للمسألة، بما أن $\overline{DE}$ تُنصّف الوتر $\overline{AC}$ ، فإن $\overline{DE}$ قطرٌ في الدائرة. استعمل ناتج ضرب أطوال الأوتار المتقاطعة لإيجاد طول قطر الدائرة.

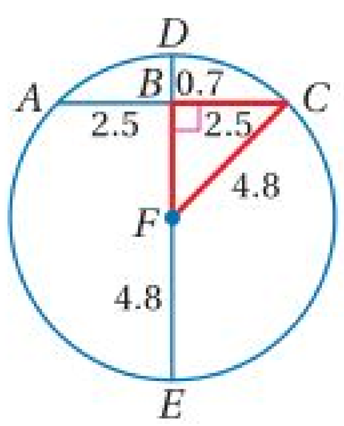


حُل:

$AB \cdot BC = DB \cdot BE$	النظرية 8.15
$2.5 \cdot 2.5 = 0.7 \cdot BE$	بالتعويض
$6.25 = 0.7BE$	بالضرب
$8.9 \approx BE$	بقسمة كلا الطرفين على 0.7
$DE = DB + BE$	مسلّمة جمع القطع المستقيمة
$\approx 0.7 + 8.9$	بالتعويض
$= 9.6$	بالجمع

بما أن قطر الدائرة يساوي 9.6 mi تقريبًا، فإن نصف قطرها يساوي $9.6 \div 2 \approx 4.8$

تحقّق: استعمل عكس نظرية فيثاغورس؛ للتحقّق من أن المثلث المتكوّن من نصف القطر وجزءٍ من الوتر وجزءٍ من القطر في الدائرة قائم الزاوية.



$DB + BF = DF$	مسلّمة جمع القطع المستقيمة
$0.7 + BF = 4.8$	بالتعويض
$BF = 4.1$	بطرح 0.7 من الطرفين
$BF^2 + BC^2 = CF^2$	نظرية فيثاغورس
$4.1^2 + 2.5^2 \stackrel{?}{=} 4.8^2$	بالتعويض
$23.06 \approx 23.04$ ✓	بالتبسيط

✓ تحقق من فهمك

2) **مصلّى قبة الصخرة:** هو أحد أهم معالم المسجد الأقصى المبارك في مدينة القدس، وتعتبر قبته من أهم وأبرز المعالم المعمارية الإسلامية، فهي عبارة عن قبة كروية قطر الدائرة التي تحتوي على القوس المار بالقمة هي 20m، ويبلغ ارتفاع أعلى نقطة فيها عن الجزء الأسطواني الذي يحملها 15m، أوجد المسافة بين طرفَي القبة؟

الربط مع الحياة

كلما كانت الشمس قريبة من الأفق، زاد الجزء الذي تراه من قوس المطر. وعند غروب الشمس، يمكنك رؤية قوس المطر على شكل نصف دائرة، بحيث تصنع أعلى نقطة في هذا القوس زاوية مقدارها 42 درجة فوق الأفق.

إرشادات لحل المسألة

ارسم شكلًا: عند حلّ المسائل اللفظية المتعلّقة بالدوائر، يُفضّل أن ترسم شكلًا وتضع عليه قياسات كل عناصر الدائرة المعطاة، وأن تسمّي القياس المجهول برمز متغير لمساعدتك على اختيار خطة الحل المناسبة.

قطع مستقيمة تتقاطع خارج الدائرة: الأوتار غير المتوازية في الدائرة وغير المتقاطعة داخلها، يمكن أن تمتد لتشكّل قواطع تتقاطع خارج الدائرة.

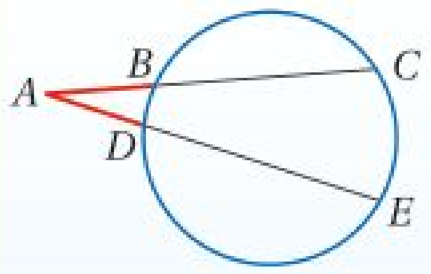
نظرية 8.16

أضف إلى مطويتك

نظرية القاطع

التعبير اللفظي: **إذا رُسم قاطعان لدائرة من نقطة خارجها، فإن حاصل ضرب طول القاطع الأول في طول الجزء الخارجي منه، يساوي حاصل ضرب طول القاطع الثاني في طول الجزء الخارجي منه.**

مثال: $AC \cdot AB = AE \cdot AD$



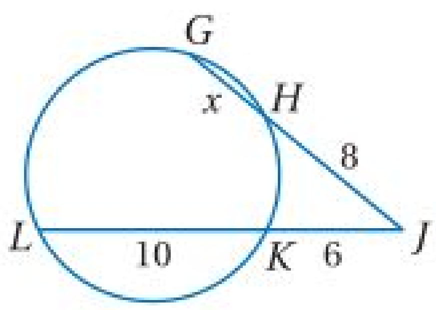
ستبرهن النظرية 8.16 في السؤال 16

إرشادات للدراسة

تبسيط نص النظرية: كل طرفٍ من طرفَي المعادلة في مثال النظرية 8.16، هو ناتج ضرب طول الجزء الخارجي من القاطع في طول القاطع بكامله.

مثال 3 استعمال تقاطع القاطعين

أوجد قيمة x في الشكل المجاور.



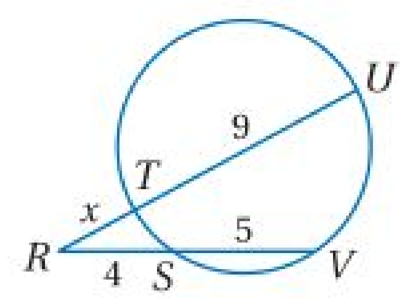
$JG \cdot JH = JL \cdot JK$	النظرية 8.16
$(x + 8)8 = (10 + 6)6$	بالتعويض
$8x + 64 = 96$	بالضرب
$8x = 32$	بطرح 64 من كلا الطرفين
$x = 4$	بقسمة كلا الطرفين على 8

تنبيه!

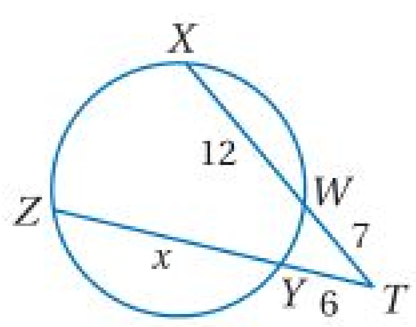
استعمال المعادلة الصحيحة: تأكد من أنك تجد ناتج ضرب طول القاطع في طول القطعة الخارجية منه. وليس في طول القطعة الداخلية منه.

✓ تحقق من فهمك

(3A



(3B



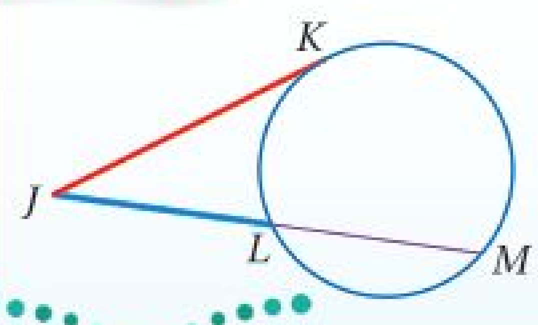
يمكنك استعمال معادلة مشابهة لمعادلة النظرية 8.16 عندما يتقاطع مماس وقاطع خارج الدائرة، وفي هذه الحالة المماس أو قطعة المماس التي يقع أحد طرفيها على الدائرة تُمثّل قطعة المماس الخارجية، وقطعة المماس الكلية في آنٍ معًا.

نظرية 8.17

أضف إلى مطويتك

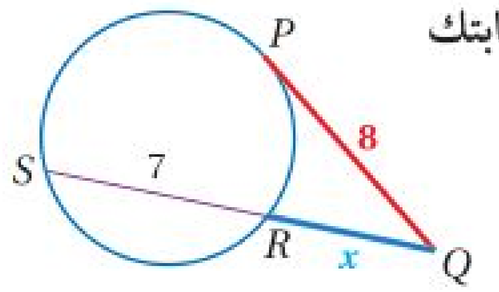
التعبير اللفظي: **إذا رُسم مماسٌ وقاطع لدائرة من نقطة خارجها، فإن مربع طول المماس يساوي حاصل ضرب طول القاطع في طول الجزء الخارجي منه.**

مثال: $JK^2 = JL \cdot JM$



ستبرهن النظرية 8.17 في السؤال 17

مثال 4 استعمال المماس والقاطع



إذا كانت $\overline{PQ}$ مماسًّا للدائرة كما في الشكل المجاور، فأوجد قيمة x مقرّبًا إجابتك إلى أقرب عُشْرٍ.

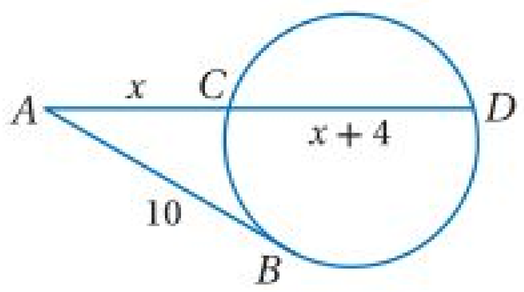
$PQ^2 = QR \cdot QS$	النظرية 8.17
$8^2 = x(x+7)$	بالتعويض
$64 = x^2 + 7x$	بالضرب
$0 = x^2 + 7x - 64$	بطرح 64 من كلا الطرفين

استعمل القانون العام لحل المعادلة التربيعية؛ لأن المقدار غير قابل للتحليل.

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	القانون العام
$= \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(1)(-64)}}{2(1)}$	$a = 1, b = 7, c = -64$
$= \frac{-7 \pm \sqrt{305}}{2}$	بالتبسيط
≈ -12.2 أو 5.2	باستعمال الحاسبة

وبما أنه لا يمكن أن تكون الأطوال سالبةً، فإن قيمة x تساوي 5.2 تقريبًا.

تحقق من فهمك

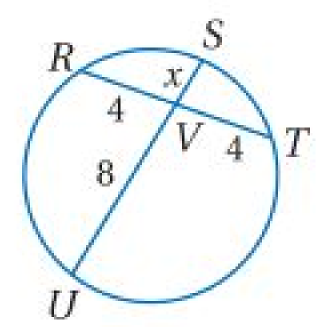


4) $\overline{AB}$ مماس للدائرة في الشكل المجاور، أوجد قيمة x مقربًا إجابتك إلى أقرب عُشْرٍ.

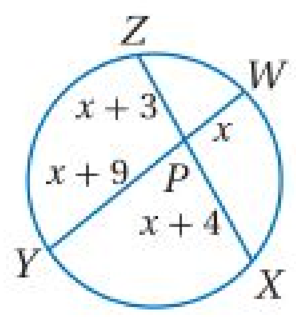
تأكـد

الأمثلة 1, 3, 4 أوجد قيمة x في كلٍّ من الأشكال الآتية، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة، هي مماساتٌ فعلًا.

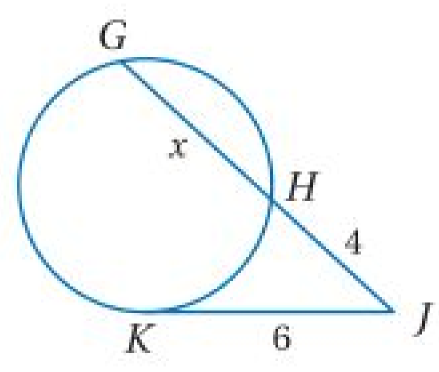
1)



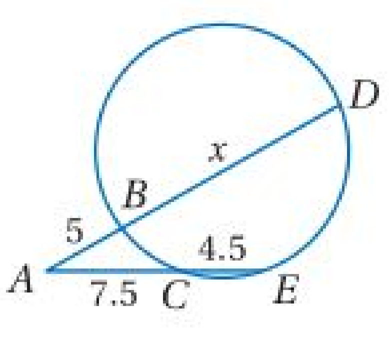
2)



3)

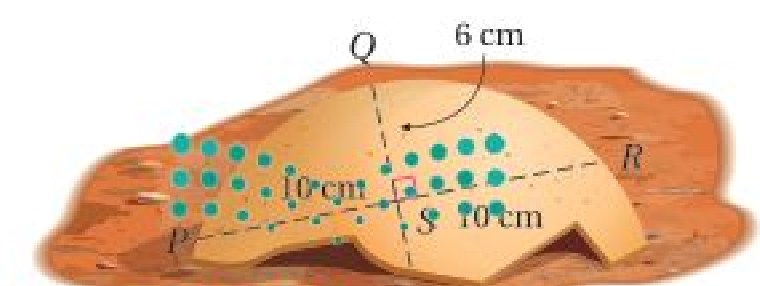


4)



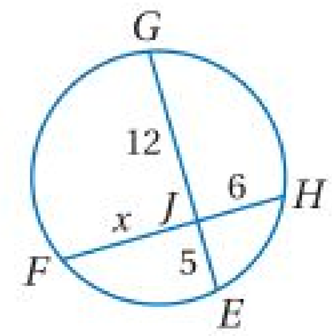
المثال 2

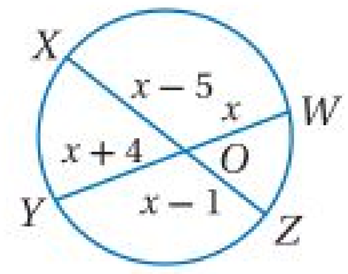
5) **آثار:** يبيِّن الشكل المجاور صورة جزء مكسور من إناءٍ فخاري دائري وُجِدَ في موقع أثري. إذا كانت $\overline{QS}$ جزءًا من قطر الدائرة، فما محيط الإناء الفخاري الأصلي؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ.

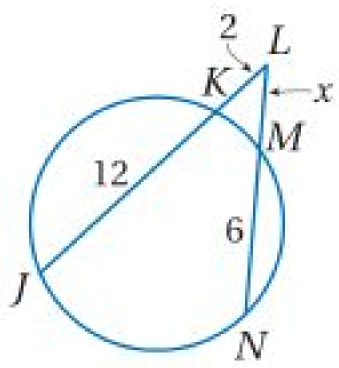


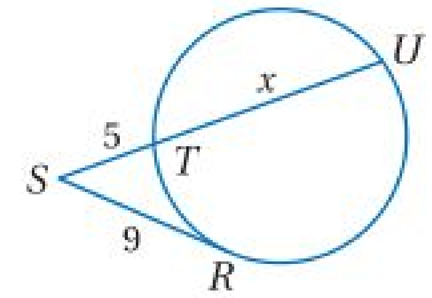
تدرب وحل المسائل

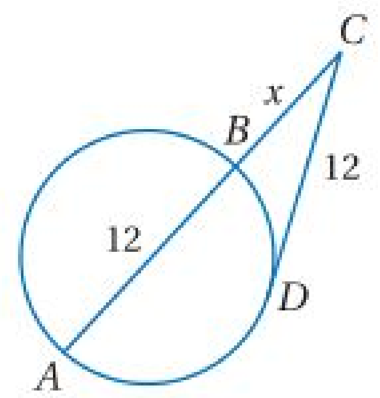
الأمثلة 1, 3, 4 **أوجد قيمة x في كلٍّ من الأشكال الآتية مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة، هي مماسات فعلًا، وقرِّب إجابتك إلى أقرب عُشرٍ.**

6)


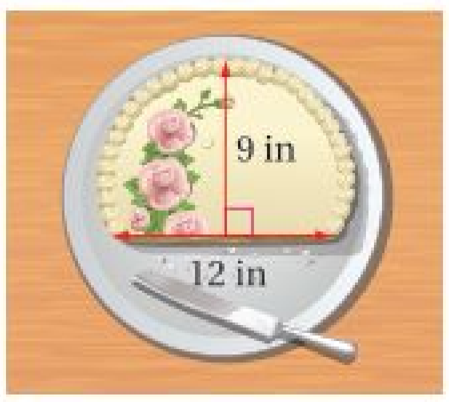
7)


8)


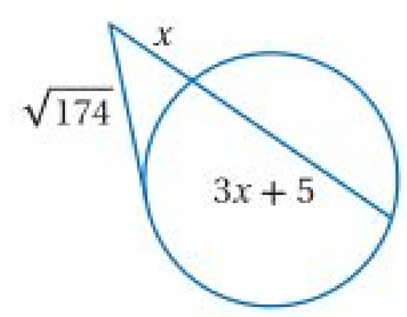
9)


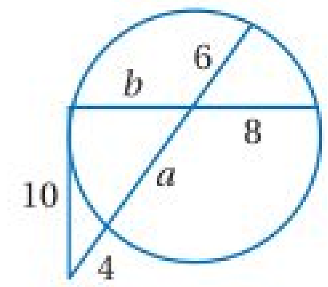
10)


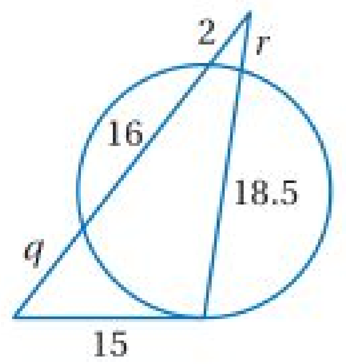
11) كعك: توزِّع سلْمَى الكعك في حفلٍ. إذا كانت أبعاد القطعة المتبقية من الكعكة كما في الشكل المجاور، فما قطر الكعكة الأصلية؟



المثال 2 **أوجد قيم المتغيرات في كلٍّ من الأشكال الآتية، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا، وقرِّب إجابتك إلى أقرب عُشرٍ.**

12)


13)


14)


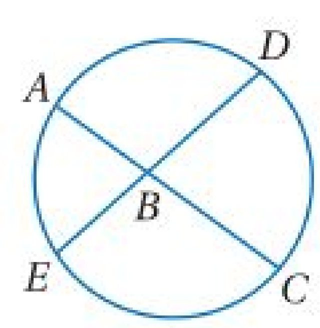
برهان: **اكتب برهانًا من النوع المحدد لكلٍّ من النظريات الآتية:**

(إرشاد: ارسم أوتارًا تصل نقاط القطع المستقيمة المتقاطعة داخل الدائرة أو خارجها بالدائرة)

15) برهان ذي عمودين للنظرية 8.15

المعطيات: $\overline{AC}$ و $\overline{DE}$ وتران متقاطعان في B.

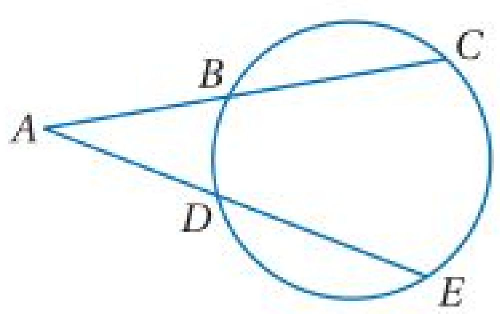
المطلوب: $AB \cdot BC = EB \cdot BD$



16) برهان حرّ للنظرية 8.16

المعطيات: $\overline{AC}$ و $\overline{AE}$ قاطعان لدائرة.

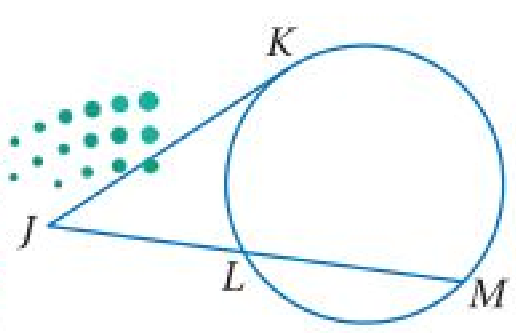
المطلوب: $AB \cdot AC = AD \cdot AE$



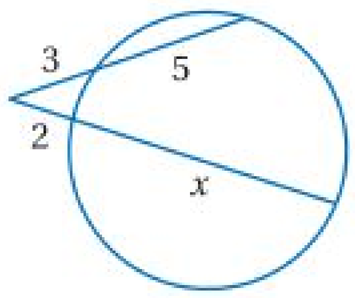
17) برهان ذي عمودين للنظرية 8.17

المعطيات: $\overline{JK}$ مماس، $\overline{JM}$ قاطع

المطلوب: $JK^2 = JL \cdot JM$



مسائل مهارات التفكير العليا



18) اكتشف الخطأ: يحسب كلٌّ من خالد وعبدالعزيز قيمة x في الشكل المجاور . فكتب خالد المعادلة: $3(5) = 2x$، بينما كتب عبدالعزيز المعادلة: $3(8) = 2(2 + x)$. هل أيٌّ منهما كتب المعادلة الصحيحة؟ برّر إجابتك.

19) تبرير: إذا تقاطع وتران في مركز دائرة، فهل تكون قياسات الأقواس المحصورة بينهما متساوية أحيانًا، أم دائمًا، أو غير متساوية أبدًا؟

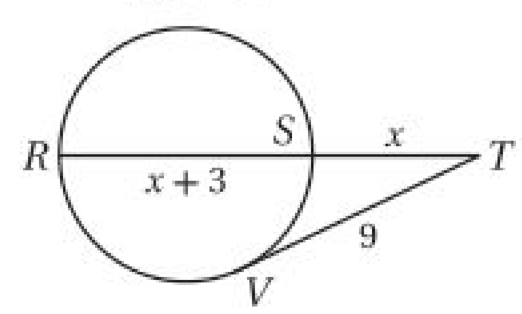
20) اكتب: إذا تقاطع وتران داخل الدائرة، فصِفِ العلاقة بين جزأَي الأول وجزأَي الثاني.

تدريب على اختبار

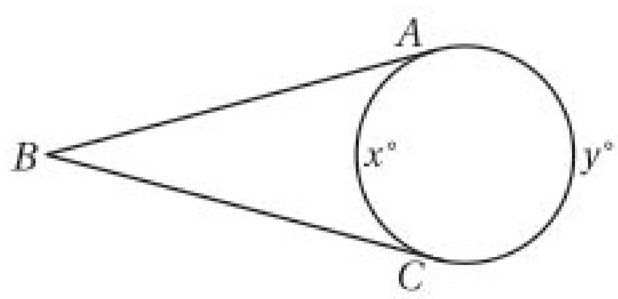
21) $\overline{TV}$ مماس للدائرة، و R, S نقطتان عليها ، ما قيمة x مقربةً إلى أقرب عُشرٍ؟

A 7.6 **C** 5.7

B 6.4 **D** 4.8



22) إجابة مطوّلة: $\overline{BA}, \overline{BC}$ مماسان للدائرة في الشكل أدناه، $m\angle ABC = 70°$.

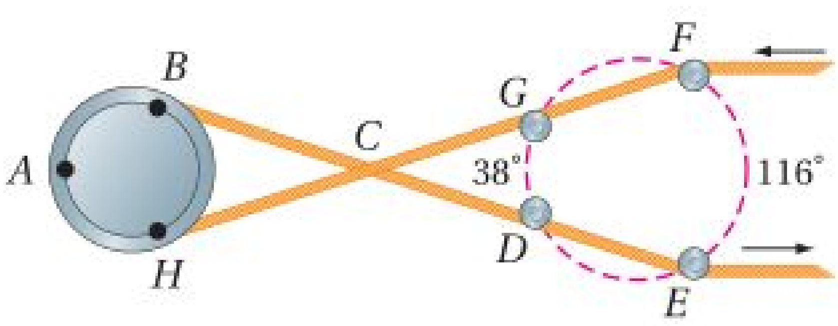


a) اكتب معادلتين تربطان بين $x°$ و $y°$.

b) أوجد قيمة كلٍّ من $x°$ و $y°$.

مراجعة تراكمية

23) نسيج: بعد أن تُغزل خيوط الصوف، يتم صبغها، ثم تُمرّر على مجموعة من البكرات لكي تجف، والشكل المجاور يُظهر إحدى مجموعات البكرات، لاحظ أن خيط الصوف يبدو كأنه يتقاطع بعضه مع بعض عند النقطة C، ولكنه في الواقع غير ذلك. أوجد $m\widehat{BH}$ مستعملاً معلومات الشكل. (الدرس 8-6)



هندسة إحداثية: مثِّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المعطاة في كلٍّ ممَّا يأتي: (الدرس 8-2)

24) $\triangle KLM$ الذي رؤوسه: $K(5, -2), L(-3, -1), M(0, 5)$؛ إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليسار و 4 وحدات إلى أسفل.

25) الشكل الرباعي $PQRS$ الذي رؤوسه: $P(1, 4), Q(-1, 4), R(-2, -4), S(2, -4)$؛ إزاحة مقدارها 5 وحدات إلى اليسار و 3 وحدات إلى أعلى.

استعد للدرس اللاحق

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي عُلِم ميله ومقطع y له في كلٍّ ممَّا يأتي:

26) $m: 3$، المقطع $y = -4$

27) $m = 2, (0, 8)$

28) $m = \frac{5}{8}, (0, -6)$

29) $m: \frac{2}{9}$، المقطع $y = \frac{1}{3}$

30) $m = -1, b: -3$

31) $m = -\frac{1}{12}, b: 1$

رابط الدرس الرقمي

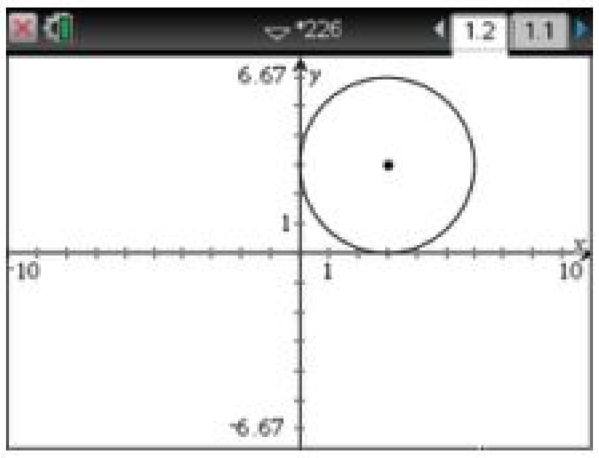
www.ien.edu.sa

استكشاف

8-8 معمل الحاسبة البيانية: معادلة الدائرة
Equation of Circle

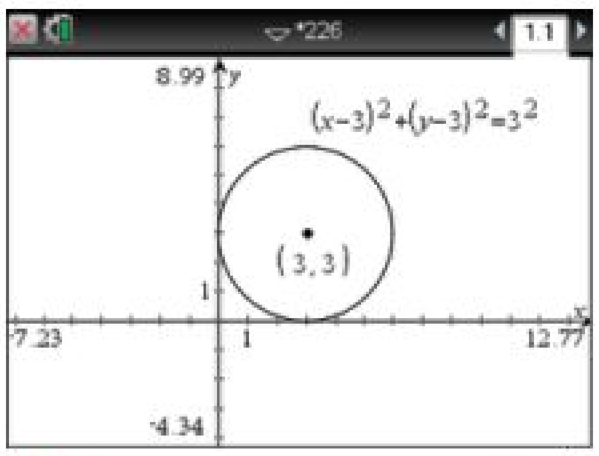
يمكنك استعمال TI−nspire لاستكشاف معادلة الدائرة.

نشاط: رسم دائرة في المستوى الإحداثي



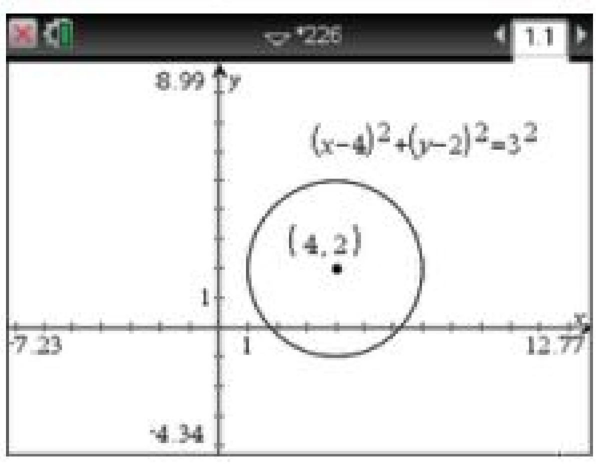
الخطوة 1: ارسم دائرة.

- افتح صفحة تطبيق الرسوم البيانية بالضغط على المفاتيح esc on:
- ارسم دائرة بالضغط على مفتاح menu ثم اختار 8: الهندسة ومنها 2: الأشكال الهندسية واختر 1: الدائرة، ثم ضع المؤشر في أي مكان خالٍ لا يقع على أي من المحورين واضغط لرسم نقطة المركز، ومن ثم اسحب لرسم الدائرة ثم اضغط enter ثم esc.



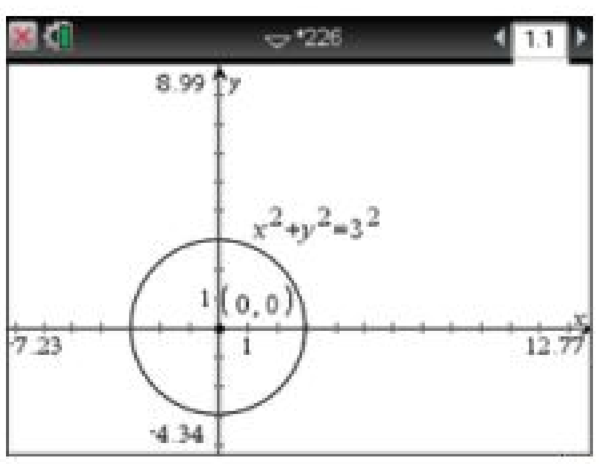
الخطوة 2: اكتب معادلة الدائرة.

- لعرض معادلة الدائرة، اضغط على المفتاح menu، ثم اختر 1: الإجراءات ومنها 1: الإجراءات، ثم الضغط على محيط الدائرة لتظهر المعادلة، قم بوضع المؤشر في مكان مناسب لكتابة المعادلة فيه، ثم اضغط enter.
- بالمثل اضغط على مركز الدائرة، ثم ضع المؤشر في مكانٍ مناسبٍ لكتابة إحداثيَّ مركز الدائرة واضغط enter ثم esc.



الخطوة 3: غيّر معادلة الدائرة.

- استعمل المؤشّر واضغط على مركز الدائرة وحرّك المركز ثم لاحظ كيف تتغير معادلة الدائرة. أو ظلل إحداثيَّ مركز الدائرة واكتب إحداثيَّي آخرين لمركز دائرة آخرى ولاحظ كيف يتغير موقع الدائرة ومعادلتها.
- استعمل الأسهم لسحب الدائرة من نقطة المركز ونقلها للمكان الذي تريد، ثم اضغط enter.



الخطوة 4: ارسم دائرة مركزها نقطة الأصل.

- حرّك الدائرة كما فعلت في الخطوة 3، وضع مركزها عند نقطة الأصل، أو استعمل المؤشر واضغط على محيط الدائرة وفي الوقت نفسه اضغط على الأسهم ثم اطلق المؤشر واستعمل الأسهم لتكبير الدائرة أو تصغيرها ثم اضغط enter ولاحظ أثر ذلك في معادلة الدائرة.

تحليل النتائج:

1) كيف تتغيّر معادلة الدائرة عند تحريك مركزها؟

2) كيف تتغيّر معادلة الدائرة عندما يزيد نصف قطرها أو ينقص؟

3) ما معادلة الدائرة التي يقع مركزها عند نقطة الأصل، ونصف قطرها 4؟ فسِّر إجابتك.

4) ما معادلة الدائرة التي يقع مركزها عند النقطة (h, k)، ونصف قطرها r؟ فسِّر إجابتك.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

8-8 معادلة الدائرة
Equation of Circle

فيما سبق:

درست كتابة معادلة المستقيم وتمثيله بيانيًا في المستوى الإحداثي.

(مهارة سابقة)

والآن:

- أكتب معادلة الدائرة.
- أمثّل الدائرة بيانيًا في المستوى الإحداثي.

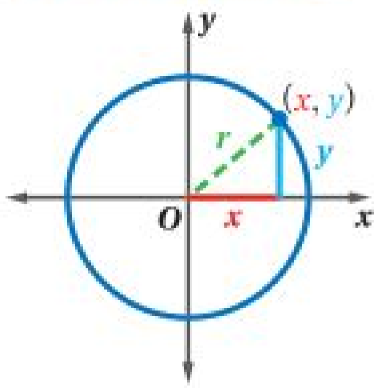
المفردات:

الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة
standard form of an equarion of a circle

لماذا؟

تستعمل أبراج الاتصالات الهاتفية إشارات الراديو لبثِّ مكالمات الهواتف النقالة. ويغطي كل برج منطقةً دائريةً. وتُصمَّم الأبراج بحيث تلتقط إشارات البث في أي مكان ضمن منطقة التغطية.

معادلة الدائرة: بما أن نقاط الدائرة جميعها تبعد مسافات متساوية عن مركزها، فإنه يمكنك إيجاد معادلتها باستعمال صيغة المسافة بين نقطتين أو نظرية فيثاغورس.



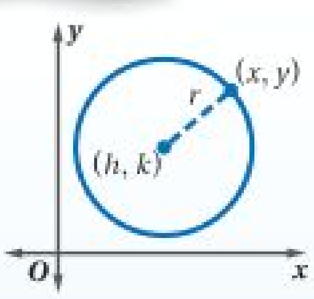
إذا مثّل (x, y) نقطة على دائرة مركزها عند نقطة الأصل كما في الشكل المجاور، فإنه يمكنك أن تستعمل نظرية فيثاغورس؛ لتجد أن معادلة هذه الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$.

وإذا لم يقع مركز الدائرة عند نقطة الأصل، ولكن عند النقطة (h, k) كما في الشكل المبيّن في المفهوم الأساسي أدناه، فإنه يمكنك أن تستعمل صيغة المسافة بين نقطتين لتحصل على معادلة الدائرة.

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	صيغة المسافة بين نقطتين
$r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$	$d = r, (x_1, y_1) = (h, k)، (x_2, y_2) = (x, y)$
$r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$	بتربيع كلا الطرفين

مفهوم أساسي — الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة

أضف إلى مطويتك



الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k)، وطول نصف قطرها r هي: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة تُسمّى أيضًا صيغة المركز ونصف القطر.

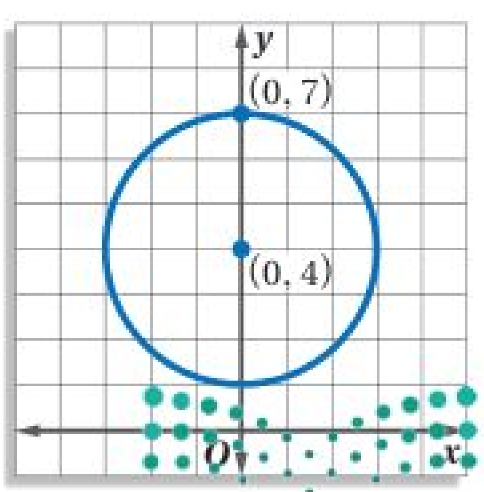
مثال 1 — كتابة معادلة الدائرة باستعمال المركز ونصف القطر

اكتب معادلة الدائرة في كلٍّ ممّا يأتي:

a) مركزها عند $(1, -8)$، وطول نصف قطرها 7

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	معادلة الدائرة
$(x - 1)^2 + [y - (-8)]^2 = 7^2$	$(h, k) = (1, -8)، r = 7$
$(x - 1)^2 + (y + 8)^2 = 49$	بالتبسيط

b) الدائرة الممثلة بيانيًا في الشكل المجاور.



مركز الدائرة عند $(0, 4)$ وطول نصف قطرها 3

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	معادلة الدائرة
$(x - 0)^2 + (y - 4)^2 = 3^2$	$(h, k) = (0, 4)، r = 3$
$x^2 + (y - 4)^2 = 9$	بالتبسيط

إرشادات للدراسة

معادلة الدائرة: في المثال 1، لاحظ أن معادلة الدائرة بقيت على الصورة القياسية، إذ ليس من الضروري فك التربيع.

تحقق من فهمك

1A) مركزها نقطة الأصل، ونصف قطرها $\sqrt{10}$. **1B)** مركزها النقطة $(-4, 1)$، وقطرها 8

مثال 2 كتابة معادلة الدائرة باستعمال مركزها ونقطة عليها

اكتب معادلة الدائرة في كلٍّ ممَّا يأتي:

a) مركزها $(-2, 4)$ ، وتمر بالنقطة $(-6, 7)$.

الخطوة 1: أوجد نصف القطر باستعمال صيغة المسافة بين النقطتين.

$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ صيغة المسافة بين نقطتين

$= \sqrt{[-6 - (-2)]^2 + (7 - 4)^2}$ $(x_1, y_1) = (-2, 4), (x_2, y_2) = (-6, 7)$

$= \sqrt{25} = 5$ بالتبسيط

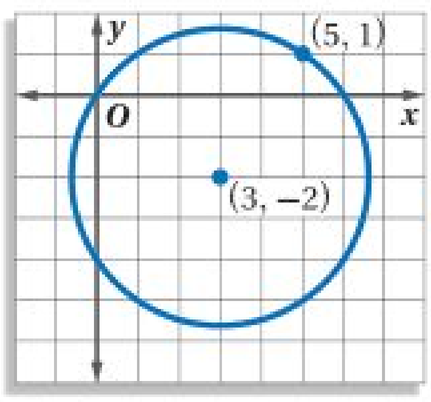
الخطوة 2: اكتب معادلة الدائرة باستعمال: $h = -2, k = 4, r = 5$.

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ معادلة الدائرة

$[x - (-2)]^2 + (y - 4)^2 = 5^2$ $h = -2, k = 4, r = 5$

$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$ بالتبسيط

b) الدائرة الممثلة بيانيًّا جانبًا.



الخطوة 1: أوجد نصف القطر باستعمال صيغة المسافة بين النقطتين

$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ صيغة المسافة بين نقطتين

$= \sqrt{(5 - 3)^2 + [1 - (-2)]^2}$ بالتعويض

$= \sqrt{13}$ بالتبسيط

الخطوة 2: اكتب معادلة الدائرة باستعمال: $h = 3, k = -2, r = \sqrt{13}$.

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ معادلة الدائرة

$(x - 3)^2 + [y - (-2)]^2 = (\sqrt{13})^2$ $h = 3, k = -2, r = \sqrt{13}$

$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 13$ بالتبسيط

تحقق من فهمك

2A) مركزها $(5, 4)$، وتمر بالنقطة $(-3, 4)$.

2B) مركزها $(-3, -5)$، وتمر بالنقطة $(0, 0)$.

إرشادات للدراسة

صيغة الجذور: في المثال 2b، من الأفضل ترك نصف القطر على صورة الجذر؛ لأن نصف القطر سيُربع عند كتابة معادلة الدائرة.

تمثيل الدوائر بيانيًّا: يمكنك تحليل معادلة الدائرة؛ لتجد معلوماتٍ تساعدك على تمثيلها بيانيًّا في المستوى الإحداثي.

مثال 3 تمثيل الدائرة بيانيًّا

أوجد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها: $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$، ثم مثّلها بيانيًّا.

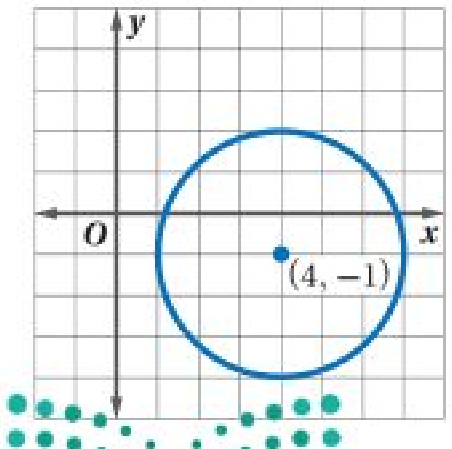
أعد كتابة المعادلة: $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$ بالصيغة القياسية لإيجاد المركز ونصف القطر بسهولة.

$(x - 4)^2 + [y - (-1)]^2 = 3^2$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

لذا فإن: $h = 4, k = -1, r = 3$. أي أن المركز عند النقطة $(4, -1)$ ونصف القطر 3 وحداتٍ.



تحقق من فهمك

أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المعطاة معادلتها في كلٍّ مما يأتي، ثم مثّلها بيانيًّا:

3A) $x^2 + y^2 = 4$

3B) $(x + 4)^2 + (y - 7)^2 = 25$

إرشادات للدراسة

مسلّمات إقليدس: لقد درست ثلاثًا من مسلّمات إقليدس في درس 2–5، وهناك مسلّمة أخرى لإقليدس، وهي أنه يمكنك رسم دائرة وحيدة بنصف قطر معلوم باختيار أي نقطة لتكون مركزًا لهذه الدائرة.

مثال 4 من واقع الحياة — استعمال ثلاث نقاط لكتابة معادلة الدائرة

أعاصير: وُضعت ثلاث صفارات للتحذير من الأعاصير في ثلاثة مواقع استراتيجية على دائرة حول مدينة، اكتب معادلة الدائرة التي وُضعت عليها الصفارات الثلاث إذا كانت إحداثيات مواقعها هي: $A(-8, 3)$, $B(-4, 7)$, $C(-4, -1)$.

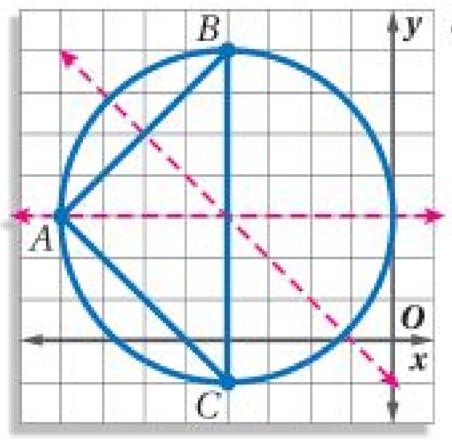
الربط مع الحياة

في الولايات المتحدة يُسجَّل 1000 إعصار تقريبًا خلال السنة الواحدة. أكثر هذه الأعاصير تدميرًا هي الأعاصير التي تبلغ سرعتها 250 mi/h، أو أكثر، فقد يصل عرض مسارها التدميري إلى ميل، ويمتد إلى 50 mi .

افهم: المعطيات: إحداثيات ثلاث نقاط تقع على الدائرة هي:
$A(-8 , 3)$, $B(-4 , 7)$, $C(-4 , -1)$

المطلوب: كتابة معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط الثلاث.

خطط: مثِّل $\triangle ABC$ بيانيًّا، ثم أنشئ عمودين منصّفين لاثنين من أضلاعه؛ لتعيين مركز الدائرة، حيث إن العمود المنصف لوتر في الدائرة هو قطر (أو نصف قطر) لها، وأوجد طول نصف قطر الدائرة، ثم استعمل المركز ونصف القطر لكتابة معادلتها.



حُلّ: أنشئ عمودين منصفين لضلعين، يظهر من الرسم أن مركز الدائرة يقع عند النقطة $(-4, 3)$، ونصف القطر 4

اكتب المعادلة:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$[x - (-4)]^2 + (y - 3)^2 = 4^2$$

$$(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

تحقّق: ارسم دائرة مركزها $(-4 , 3)$ ونصف قطرها 4، ثم تحقق من أنها تمّر بالنقاط الثلاث المعطاة.

تحقق من فهمك

4) اكتب معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط: $R(1, 2)$, $S(-3, 4)$, $T(-5, 0)$.

تأكـد

المثالان 1, 2 اكتب معادلة الدائرة في كلٍّ ممّا يأتي:

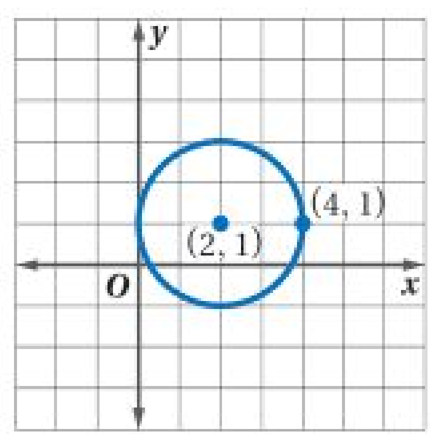
1) مركزها $(9, 0)$، ونصف قطرها 5

2) مركزها $(3, 1)$، وقطرها 14

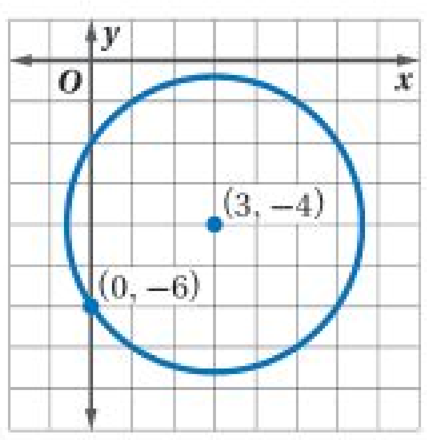
3) مركزها نقطة الأصل، وتمر بالنقطة $(2, 2)$.

4) مركزها $(-5, 3)$ ، وتمر بالنقطة $(1, -4)$.

5)



6)



المثال 3 أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المعطاة معادلتها في كلٍّ ممّا يأتي، ثم مثّلها بيانيًّا.

7) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$

8) $x^2 + (y + 1)^2 = 4$

9) $(x + 3)^2 + y^2 - 9 = 0$

المثال 4

10) **اتصالات:** مُثّلت ثلاثة أبراج هواتف نقالة بالنقاط: $X(6, 0)$, $Y(8, 4)$, $Z(3, 9)$، عيّن موقع برج آخر يبعد مسافات متساوية عن هذه الأبراج الثلاثة، ثم اكتب معادلة الدائرة التي تقع عليها الأبراج الثلاثة.

تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2 اكتب معادلة الدائرة في كلٍّ ممَّا يأتي:

11) مركزها نقطة الأصل، ونصف قطرها 4

12) مركزها $(6, 1)$، ونصف قطرها 7

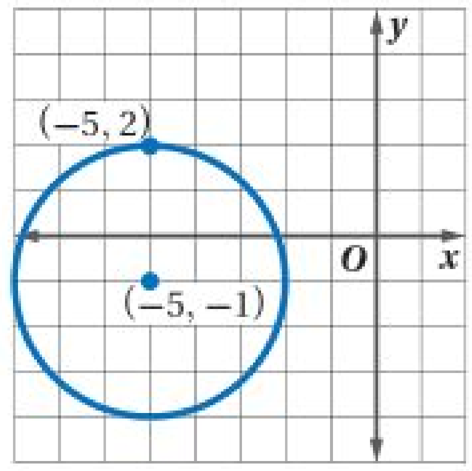
13) مركزها $(-2, 0)$، ونصف قطرها 16

14) مركزها $(-9, 8)$، ونصف قطرها $\sqrt{11}$

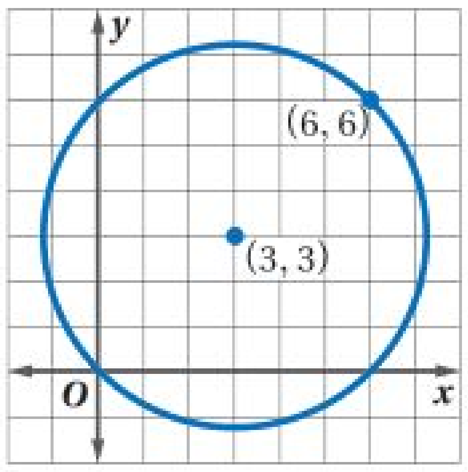
15) مركزها $(-3, 6)$، وتمُّر بالنقطة $(0, 6)$.

16) طرفا قطرٍ فيها $(4, 0)$ و $(-4, 6)$.

17)



18)



19) **طقس:** أظهرت شاشة رادار حلقات دائرية مركزها إعصار. إذا كان مركز شاشة الرادار هو نقطة الأصل، والحلقة الأولى تبعد 15 mi عن المركز، والمسافة بين كل حلقتين متتاليتين 15 mi، فما معادلة الحلقة الثالثة؟

المثال 3 أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المعطاة معادلتها في كلٍّ ممَّا يأتي، ثم مثّلها بيانيًّا.

20) $x^2 + y^2 = 36$

21) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$

22) $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 16$

23) $(x-8)^2 + y^2 = 64$

المثال 4 اكتب معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط المعطاة في كلٍّ من السؤالين الآتيين، ثم مثّلها بيانيًّا.

24) $A(1, 6), B(5, 6), C(5, 0)$

25) $F(3, -3), G(3, 1), H(7, 1)$

26) **صواريخ:** اختلاف حجم محرك الصاروخ، يؤدي إلى وصوله إلى ارتفاعات مختلفة، وكلما زاد الارتفاع الذي يصل إليه الصاروخ، كبرت الدائرة التي سيهبط فيها، وفي ظروف الرياح الطبيعية يكون طول نصف قطر دائرة الهبوط ثلاثة أمثال ارتفاع الصاروخ.

a) اكتب معادلة دائرة هبوط صاروخ وصل إلى ارتفاع 300 ft، مفترضًا أن مركز الدائرة هو نقطة الأصل.

b) ما طول نصف قطر دائرة هبوط صاروخ وصل إلى ارتفاع 1000 ft؟

27) **إذاعة:** تبثّ إذاعةٌ محليةٌ برامجها، فتغطي منطقةً لا يزيد بعدها عن برج البث أكبر من 60 km، إذا كان البرج يقع على بعد 40 km غربًا و 50 km شرقًا من منزل خالد.

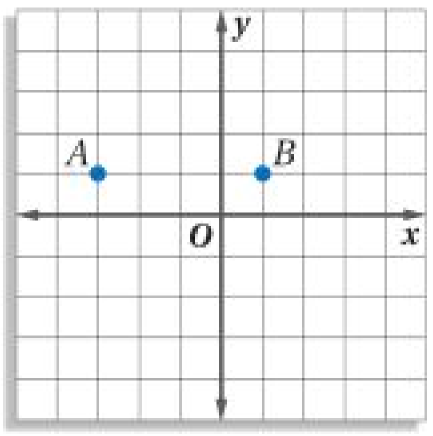
a) إذا كان منزل خالد عند نقطة الأصل في المستوى الإحداثي، فاكتب المعادلة التي تُمثّل الموقف ومثّلها بيانيًّا.

b) ماذا يُمثّل هذا المنحنى؟ وهل يمكن أن يلتقط خالد البث من البرج الإذاعي؟ اشرح إجابتك.

28) أوجد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها: $x^2 + 6x + y^2 - 2y = 15$.

29) اكتب معادلة الدائرة التي قطرها 12، ويقع مركزها في الربع الثاني، وتمسُّ كلًّا من المستقيمين $y = -4, x = 1$.

30) **تمثيلات متعدِّدة:** في هذا السؤال ستستقصي المحل الهندسي المركّب لنقطتين، وهو المحل الهندسي الذي يُحقّق أكثر من شرطٍ مختلفٍ.



a) **جدوليًّا:** اختر نقطتين A و B في المستوى الإحداثي، واكتب إحداثيات 5 نقاطٍ في المستوى تبعد مسافات متساوية عن كلٍّ من A و B.

b) **بيانيًّا:** مثّل المحل الهندسي لهذه النقاط بيانيًّا.

c) **لفظيًّا:** صِفِ المحل الهندسي للنقاط جميعها التي تبعد مسافات متساوية عن زوجٍ من النقاط.

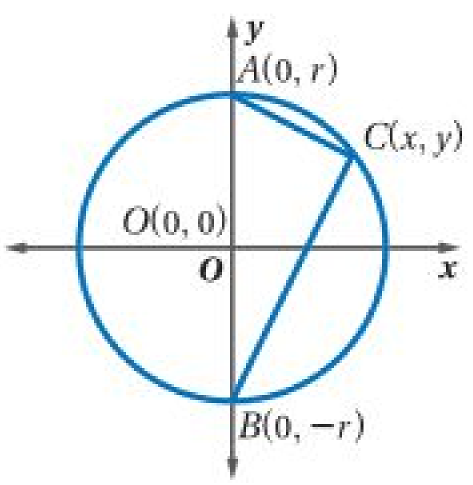
d) **بيانيًّا:** استعمل التمثيل البياني الذي حصلت عليه من الفرع b؛ لتحدد المحل الهندسي لجميع النقاط في المستوى، والتي تبعُد مسافة AB عن النقطة B، ومثّله بيانيًّا.

e) **لفظيًّا:** صِفِ المحل الهندسي لجميع النقاط في المستوى، والتي تبعد مسافات متساوية عن نقطة واحدة. ثم صِفِ المحل الهندسي المركب لجميع النقاط التي تبعُد مسافات متساوية عن A و B، وتبعد مسافة AB عن B. واذكر ماذا يمثل بيانيًّا؟

إرشادات للاختبار

استعمال الصيغ: تذكّر أنه إذا كان السؤال يوظّف المستوى الإحداثي، فاستعمل صيغتي المسافة بين نقطتين ونقطة المنتصف وكذلك صيغة الميل لحل السؤال، وللتأكّد من صحة حلك.

مسائل مهارات التفكير العليا



31) **تحدٍّ:** اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أنه إذا قابلت الزاوية المحيطية قطرًا في الدائرة كما في الشكل المجاور، فإنها قائمة.

32) **تبرير:** معادلة دائرة هي: $(x-5)^2+(y+7)^2=16$.
إذا أُجريت إزاحة لمركزها بمقدار 3 وحداتٍ إلى اليمين و9 وحداتٍ إلى أعلى، فما معادلة الدائرة الجديدة؟ برِّر إجابتك.

33) **مسألة مفتوحة:** عيّن ثلاث نقاط في المستوى الإحداثي ليست على استقامةٍ واحدةٍ، وارسم مثلثًا رؤوسه هذه النقاط، ثم أنشئ الدائرة التي تحيط به.

34) **اكتب:** اشرح العلاقة بين صيغة المسافة بين نقطتين ومعادلة الدائرة.

تدريب على اختبار

35) أيُّ المعادلات الآتية تُمثّل معادلة الدائرة التي مركزها $(6, 5)$، وتمر بالنقطة $(2, 8)$؟

A $(x-6)^2+(y-5)^2=5^2$

B $(x-5)^2+(y-6)^2=7^2$

C $(x+6)^2+(y+5)^2=5^2$

D $(x-2)^2+(y-8)^2=7^2$

36) إذا كان نصف قطر $\odot F$ يساوي 4، وإحداثيًّا مركزها هما $(-4, 0)$، فأي النقاط الآتية تقع على $\odot F$؟

A $(4, 0)$

B $(0, 4)$

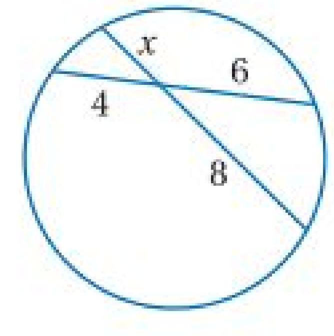
C $(4, 3)$

D $(-4, 4)$

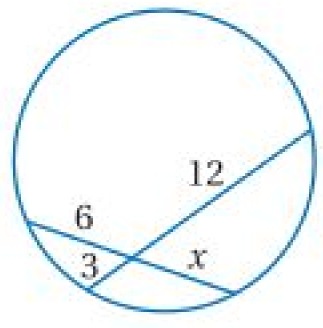
مراجعة تراكمية

أوجد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس 7-8)

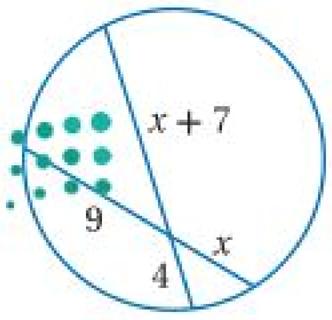
37)



38)



39)



وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

الفصل
8 دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

الدائرة ومحيطها (الدرس 8-1)

- محيط الدائرة يساوي πd أو $2\pi r$.

الزوايا والأقواس والأوتار والزوايا المحيطية
(الدروس 8-2 إلى 8-4)

- مجموع قياسات الزوايا المركزية في الدائرة يساوي $360°$
- طول القوس يتناسب تناسبًا طرديًّا مع محيط الدائرة.
- قطر الدائرة العمودي على وترٍ فيها، ينصفه وينصف القوسين المقابلين لهذا الوتر.
- قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس الذي تقابله.

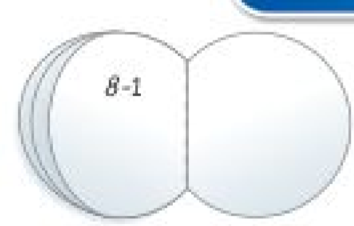
المماس والقاطع وقياسات الزوايا
(الدرسان 8-5 , 8-6)

- يقطع المماس الدائرة في نقطةٍ واحدةٍ بالضبط، ويكون عموديًّا على نصف القطر المار بنقطة التماس.
- مماسَّا الدائرة المرسومان من نقطة واحدة خارجها يكونان متطابقين.
- قياس الزاوية المتكوّنة من تلاقي قاطعين خارج الدائرة، يساوي نصف الفرق الموجب بين قياسَي القوسين المقابلين لها.
- قياس الزاوية المتكوّنة من قاطعٍ ومماسٍّ يساوي نصف قياس القوس المقابل لهذه الزاوية.

قطع مستقيمة خاصة في الدائرة ومعادلة الدائرة
(الدرسان 8-7, 8-8)

- يمكن إيجاد أطوال الأوتار المتقاطعة في الدائرة باستعمال حاصل ضرب أطوال أجزاء هذه الأوتار.
- معادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

المطويات منظم أفكار



تأكد من أن **المفاهيم الأساسية** مدوَّنة في مطويتك.

مفردات أساسية

- **الدائرة** (ص. 450)
- **المركز** (ص. 450)
- **نصف القطر** (ص. 450)
- **الوتر** (ص. 450)
- **القطر** (ص. 450)
- **الدوائر المتطابقة** (ص.451)
- **الدائرتان المتحدتان في المركز** (ص. 451)
- **محيط الدائرة** (ص. 452)
- **باي (π)** (ص. 452)
- **المضلع المحاط بدائرة** (ص. 453)
- **الدائرة الخارجية** (ص. 453)
- **الزاوية المركزية** (ص. 458)
- **القوس** (ص. 458)
- **القوس الأصغر** (ص. 459)
- **القوس الأكبر** (ص. 459)
- **نصف دائرة** (ص. 459)
- **الأقواس المتطابقة** (ص.459)
- **الأقواس المتجاورة** (ص. 460)
- **طول القوس** (ص. 461)
- **الزاوية المحيطية** (ص. 473)
- **القوس المقابل** (ص. 473)
- **المماس** (ص. 481)
- **نقطة التماس** (ص. 481)
- **المماس المشترك** (ص. 481)
- **القاطع** (ص. 488)

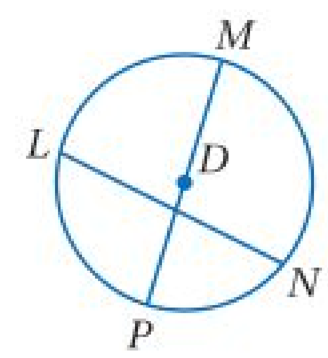
اختبار المفردات

بين ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة أو غير صحيحة، وإذا كانت غير صحيحة فضع كلمة من القائمة أعلاه مكان الكلمة التي تحتها خط؛ لتجعل الجملة صحيحة:

1) أيُّ قطعة مستقيمة يقع طرفاها على الدائرة فهي نصف قطر للدائرة.
2) الوتر المارُّ بمركز الدائرة هو قطر فيها.
3) يقع رأس الزاوية المركزية عند مركز الدائرة، ويحتوي ضلعاها على نصفَي قطرين للدائرة.
4) القوس الذي قياسه أقل من $180°$ هو قوس أكبر.
5) القوس المقابل للزاوية المحيطية هو القوس الذي يقع طرفاه على ضلعَي الزاوية المحيطية، ويقع داخلها.
6) النقطة الوحيدة التي يتقاطع فيها مستقيمٌ مع دائرةٍ في المستوى نفسه هي المماس المشترك.
7) القاطع هو المستقيم الذي يقطع الدائرة في نقطة واحدة بالضبط.
8) تكون الدائرتان متحدتين في المركز، إذا وفقط إذا كان نصفا قطريهما متطابقين.

8-1 الدائرة ومحيطها (ص 450–457)

استعمل الدائرة في الشكل أدناه للإجابة عن الأسئلة 11–9:



9) سمِّ الدائرة.

10) سمِّ نصف قطر للدائرة.

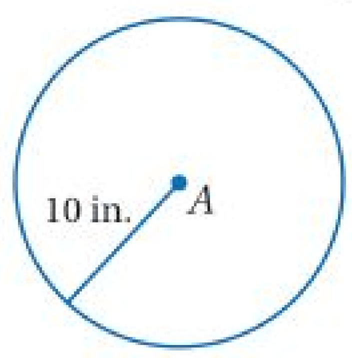
11) سمِّ وترًا لا يكون قطرًا.

أوجد القطر ونصف القطر للدائرة المُعطى محيطها في كلٍّ ممَّا يأتي، مقرِّبًا إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ.

12) $C = 43$ cm
13) $C = 26.7$ yd
14) $C = 108.5$ ft
15) $C = 225.9$ mm

مثال 1

أوجد محيط $\odot A$.



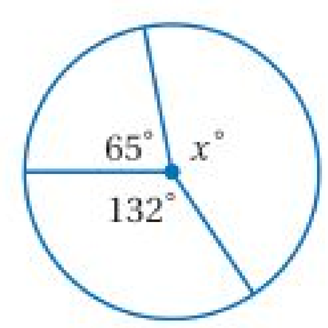
$C = 2\pi r$	صيغة محيط الدائرة
$= 2\pi(10)$	بالتعويض
≈ 62.83	باستعمال الحاسبة

محيط $\odot A$ يساوي 62.83 in تقريبًا.

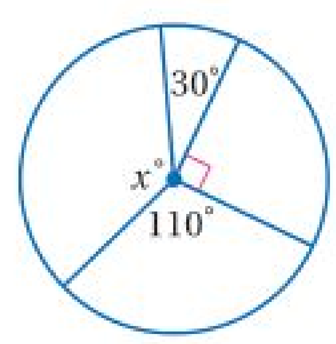
8-2 قياس الزوايا والأقواس (ص 458–465)

أوجد قيمة $x°$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

16)

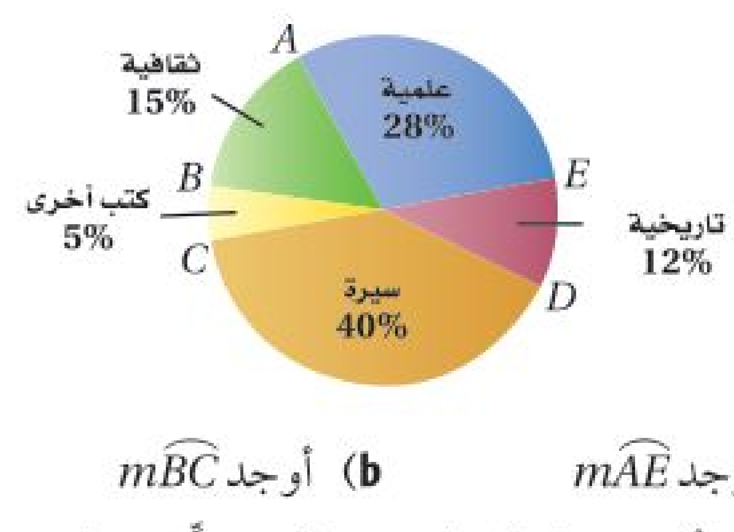


17)



18) **كتب:** أجرى مُعلم مسحًا حول الكتب التي يفضّل طلابه قراءتها، ومثّل النتائج التي حصل عليها بالقطاعات الدائرية كما في الشكل أدناه، أجب عمّا يأتي:

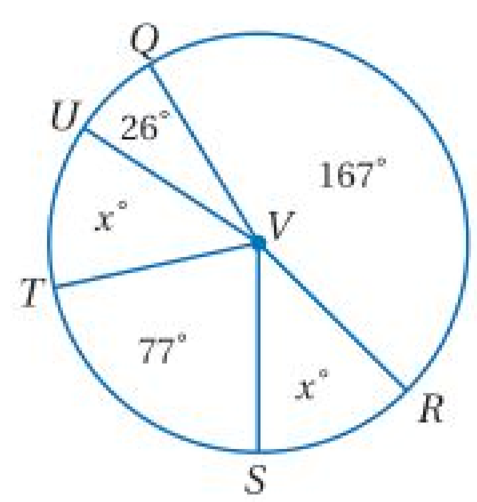
الكتب التي يُفضّلها الطلاب



a) أوجد $m\widehat{AE}$
b) أوجد $m\widehat{BC}$
c) صِفْ قوس القطاع الدائري الذي يمثّل فئة السيرة.

مثال 2

أوجد قيمة $x°$ في الشكل الآتي:

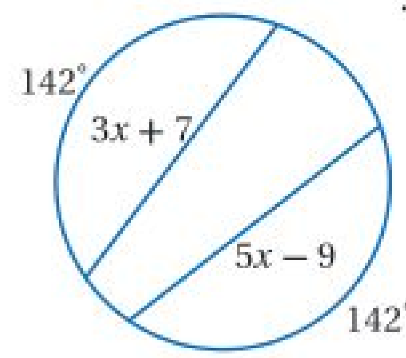


$m\angle QVR + m\angle RVS + m\angle SVT + m\angle TVU + m\angle UVQ = 360°$	مجموع قياسات الزوايا المركزية
$167° + x° + 77° + x° + 26° = 360°$	بالتعويض
$270° + 2x° = 360°$	بالتبسيط
$2x° = 90°$	بالطرح
$x° = 45°$	بالقسمة

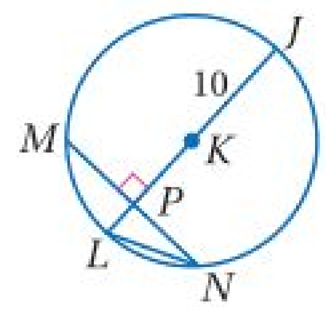
الفصل 8 دليل الدراسة والمراجعة

8-3 الأقواس والأوتار (ص 466–472)

19) أوجد قيمة x في الشكل المجاور.



في $\odot K$، إذا كان: $MN = 16, m\widehat{MLN} = 98^\circ$ ، فأوجد كلّ قياس ممّا يأتي مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.

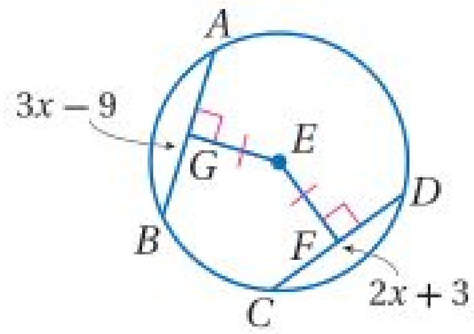


20) $m\widehat{NJ}$ **21)** LN

22) **بَسْتَنة:** يُبيّن الشكل عريشًا يعلوه قوس من دائرة، إذا كان $\overline{CD}$ جزءًا من قطرها و $m\widehat{AB}$ يساوي 28% من الدائرة كاملةً، فأوجد $m\widehat{CB}$.

مثال 3

جبر: في $\odot E$، إذا كان $EG = EF$ ، فأوجد AB .



الوتران $\overline{EG}, \overline{EF}$ متطابقان، لأن بُعدَيهما عن E متساويان.

إذن:

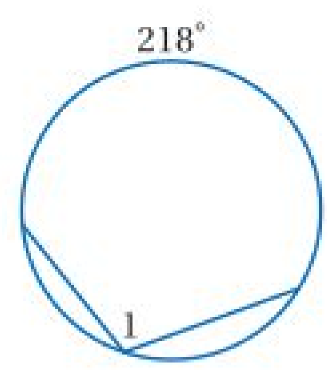
$AB = CD$	النظرية 8.5
$3x - 9 = 2x + 3$	بالتعويض
$3x = 2x + 12$	بإضافة 9 لكلا الطرفين
$x = 12$	بطرح $2x$ من كلا الطرفين

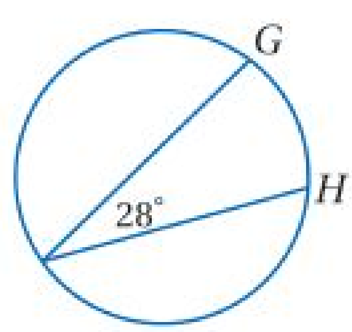
إذن: $AB = 3(12) - 9 = 27$.

8-4 الزوايا المحيطية (ص 473–479)

أوجد كلًّا من القياسين الآتيين:

23) $m\angle 1$ **24)** $m\widehat{GH}$

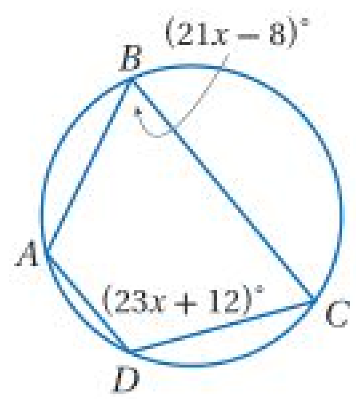




25) **شعارات:** إذا كان $m\angle 1 = 42^\circ$ في الشعار المجاور ، فأوجد $m\angle 5$.

مثال 4

أوجد $m\angle D$ و $m\angle B$.



بما أن $ABCD$ محاط بدائرة، إذن الزاويتان المتقابلتان متكاملتان.

$m\angle D + m\angle B = 180^\circ$	تعريف الزوايا المتكاملة
$(23x + 12)^\circ + (21x - 8)^\circ = 180^\circ$	بالتعويض
$(44x + 4)^\circ = 180^\circ$	بالتبسيط
$44x = 176$	بالطرح
$x = 4$	بالقسمة

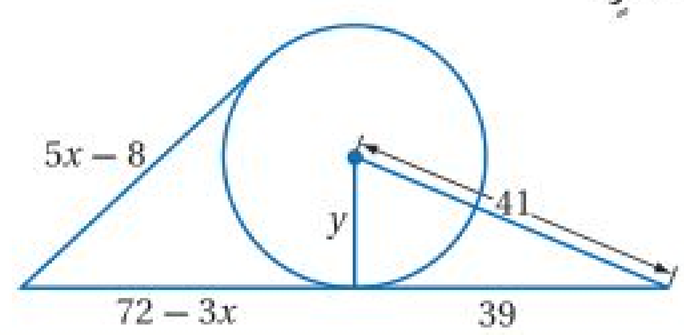
إذن: $m\angle D = (23(4) + 12)^\circ = 104^\circ$

و $m\angle B = (21(4) - 8)^\circ = 76^\circ$.

8-5 المماسات (ص 481–487)

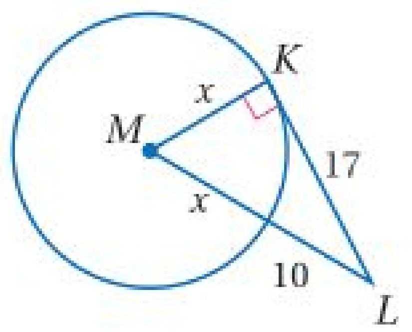
26) خيال علمي: كتب جابر قصةً قصيرةً، وذكر فيها أن الانتقال أو السفر الفوريَّ بين كوكب معيّن ثنائي الأبعاد وقمره، يكون ممكنًا إذا كان مسار الانتقال مماسًّا لها. ارسم المسارات الممكنة جميعها.

27) أوجد قيمة كلٍّ من x و y مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا، مقربًا إجابتك إلى أقرب عُشرٍ.



مثال 5

إذا كانت $\overline{KL}$ مماسًّا لـ $\odot M$ عند K كما في الشكل المجاور، فأوجد قيمة x.



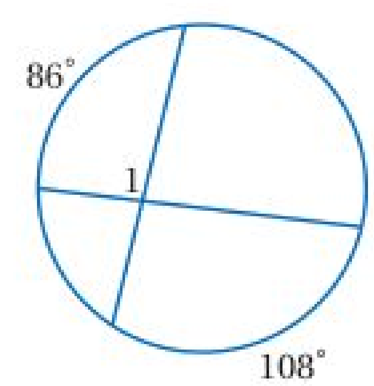
من النظرية 8.10: $\overline{MK} \perp \overline{KL}$ ؛ إذن $\triangle MKL$ مثلث قائم الزاوية.

$KM^2 + KL^2 = ML^2$	نظرية فيثاغورس
$x^2 + 17^2 = (x+10)^2$	بالتعويض
$x^2 + 289 = x^2 + 20x + 100$	بالضرب
$289 = 20x + 100$	بالتبسيط
$189 = 20x$	بالطرح
$9.45 = x$	بالقسمة

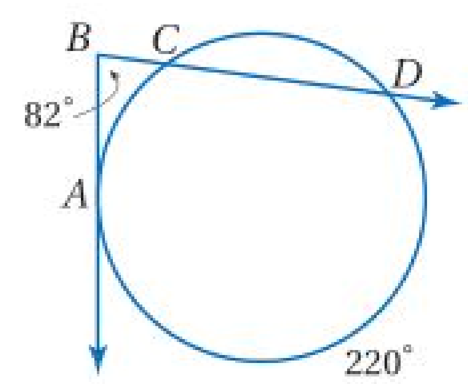
8-6 القاطع والمماس وقياسات الزوايا (ص 488–495)

أوجد القياسين الآتيين:

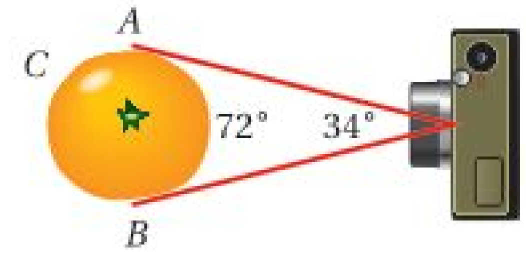
28) $m\angle 1$



29) $m\widehat{AC}$

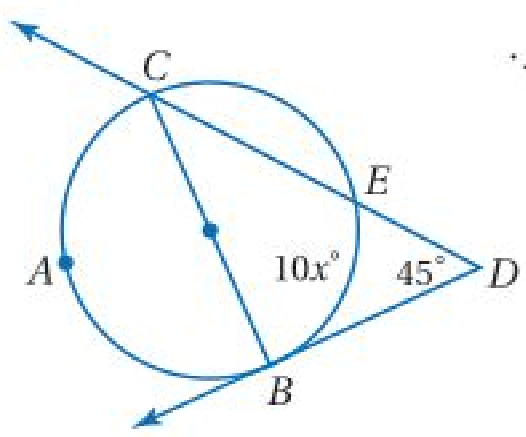


30) تصوير: أراد أحمد أن يلتقط صورةً لبرتقالة، فأخذ اللقطة كما في الشكل أدناه، حيث كان خطَّا النظر مماسين لها. إذا كان قياس زاوية الرؤية لآلة التصوير °34 ، فأوجد $m\widehat{ACB}$.



مثال 6

أوجد قيمة x في الشكل المجاور.



$\widehat{CAB}$ نصف دائرة؛ لأن $\overline{CB}$ قطرٌ فيها.

إذن: $m\widehat{CAB} = 180°$.

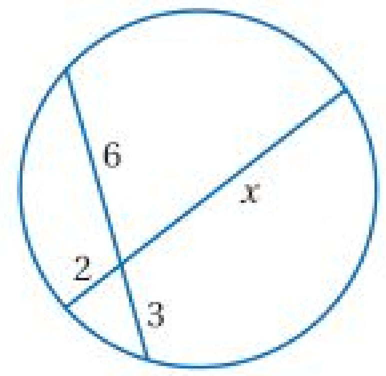
$m\angle D = \frac{1}{2}(m\widehat{CB} - m\widehat{EB})$	النظرية 8.14
$45° = \frac{1}{2}(180 - 10x)°$	بالتعويض
$90 = 180 - 10x$	بالضرب
$-90 = -10x$	بالطرح
$9 = x$	بالقسمة

الفصل 8 دليل الدراسة والمراجعة

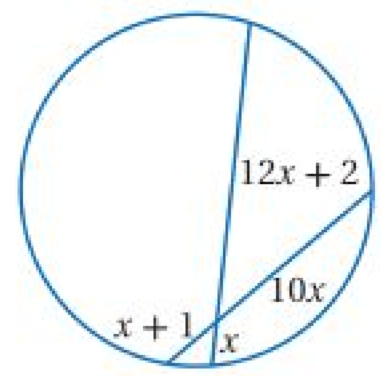
8-7 قطع مستقيمة خاصة في الدائرة (ص 496–501)

أوجد قيمة x في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

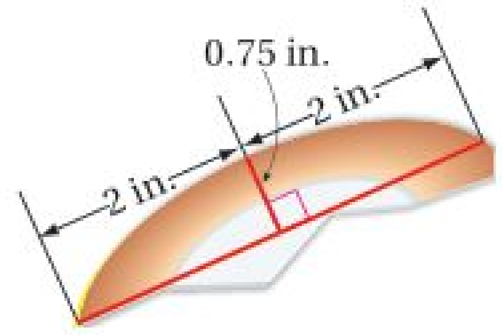
31)



32)

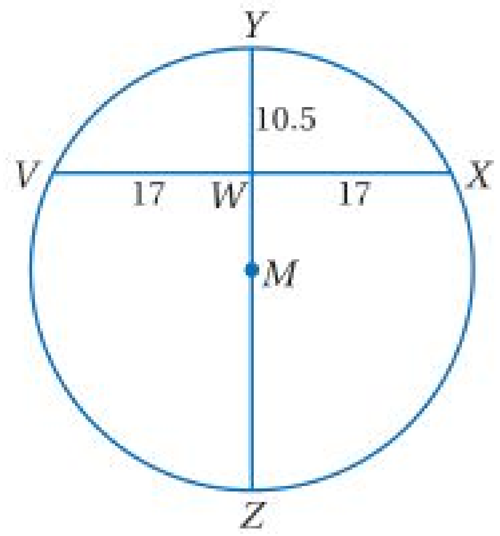


33) **آثار:** وجد حمزة جزءًا من طبقٍ أثريٍّ مكسورٍ في أثناء حَفره حفرةً لزراعة شجرة. ما محيط الطبق الأصلي؟ قرِّب إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ.



مثال 7

أوجد قطر الدائرة M.



$VW \cdot WX = YW \cdot WZ$	النظرية 8.15
$17 \cdot 17 = 10.5 \cdot WZ$	بالتعويض
$289 = 10.5 \cdot WZ$	بالتبسيط
$27.5 \approx WZ$	بقسمة كلا الطرفين على 10.5
$YZ = YW + WZ$	مسلّمة جمع القطع المستقيمة
$YZ = 10.5 + 27.5$	بالتعويض
$YZ = 38$	بالتبسيط

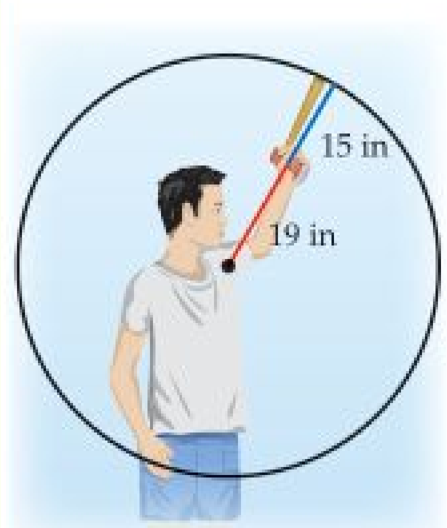
8-8 معادلة الدائرة (ص 503–507)

اكتب معادلة الدائرة في كلٍّ ممّا يأتي:

34) مركزها $(-2, 4)$ ونصف قطرها 5

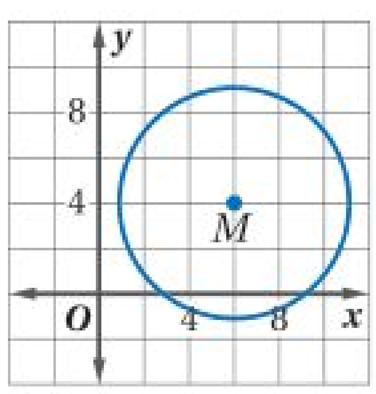
35) مركزها $(1, 2)$ وقطرها 14

36) **أخشاب:** يتعلم عادل في موقع تدريب خارج البيت إجراءات السلامة عند قطع الأخشاب، يتضمّن هذا التدريب تكوين دائرة بذراعه الممدودة؛ للتأكد من عدم إصابة أي شيء فوقه عندما يقطع الأخشاب. إذا كان امتداد ذراعه يصل إلى 19 in وطول مقبض آلة قطع الخشب 15 in، فما معادلة دائرة السلامة بالنسبة لعادل مفترضًا أن مركز الدائرة هو نقطة الأصل؟



مثال 8

اكتب معادلة الدائرة الممثّلة بيانيًّا أدناه.

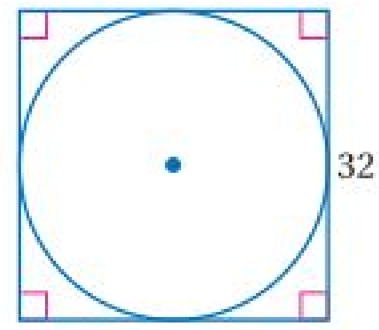


مركز الدائرة $(6, 4)$ ونصف قطرها 5

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	معادلة الدائرة
$(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 5^2$	$r = 5, (h, k) = (6, 4)$
$(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 25$	بالتبسيط

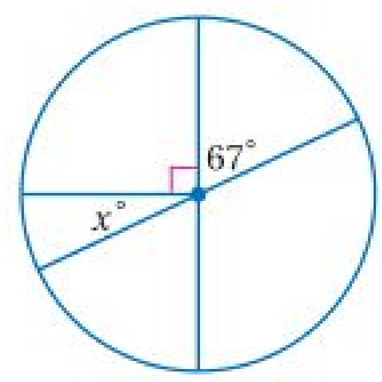
1) **برك سباحة:** عمق بركة سباحة سطحها دائري الشكل 4 ft، وطول قطر سطحها 25 ft، أوجد محيط سطح هذه البركة مقربًا إلى أقرب قدم؟

2) أوجد القيمة الدقيقة لمحيط الدائرة الآتية:

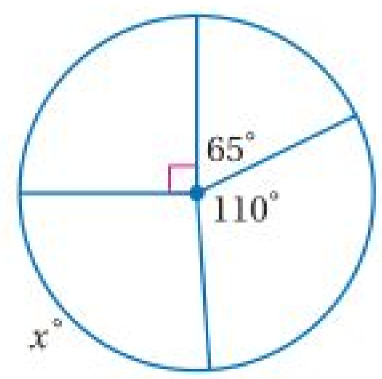


أوجد قيمة x في كلٍّ ممَّا يأتي:

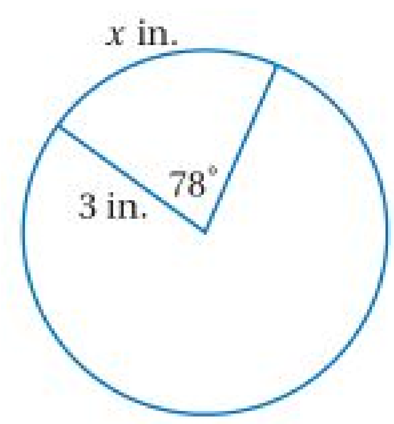
(3



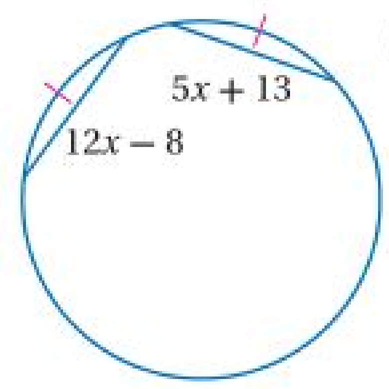
(4



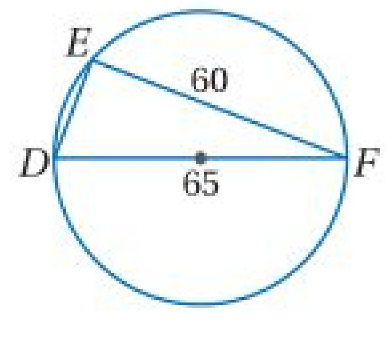
(5



(6

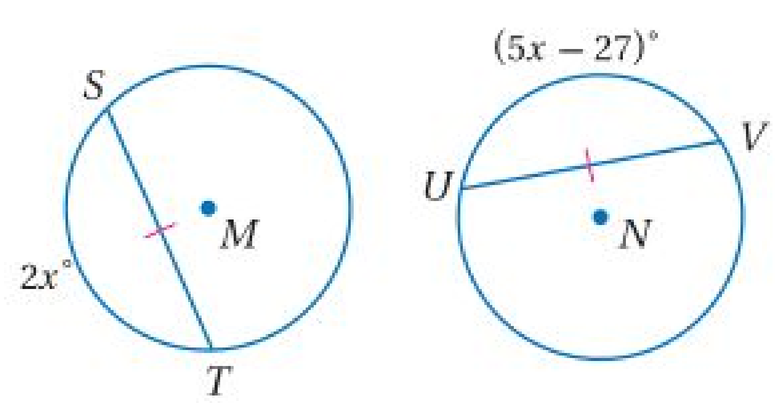


7) **اختيار من متعدد:** ما طول $\overline{ED}$ في الشكل أدناه؟



A 5	C 25
B 15	D 88.5

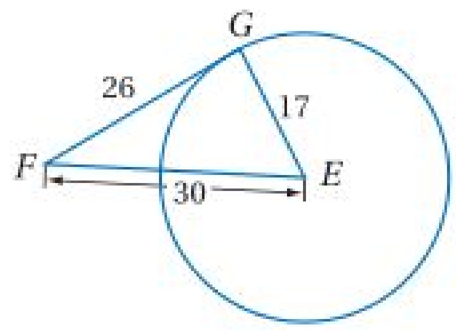
8) إذا كانت $\odot N \cong \odot M$، فأوجد قيمة x.



9) **اختيار من متعدِّد:** ما عدد النقاط المشتركة بين الدائرتين المتحدتين في المركز؟

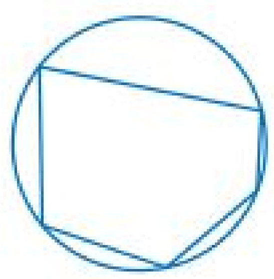
A 0	C 2
B 1	D 3

10) حدّد ما إذا كانت $\overline{FG}$ مماسًّا لِـ $\odot E$. برّر إجابتك.

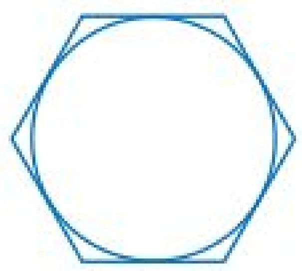


11) **اختيار من متعدد:** أيُّ الأشكال أدناه يُمثّل دائرة تحيط بمضلع؟

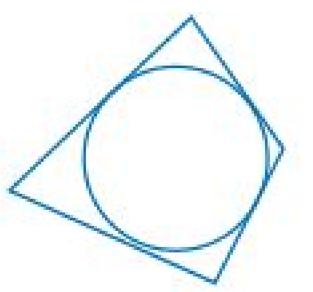
A



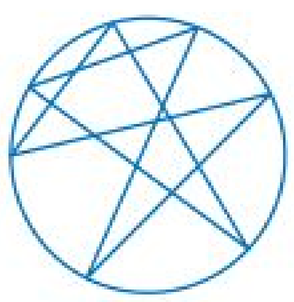
C



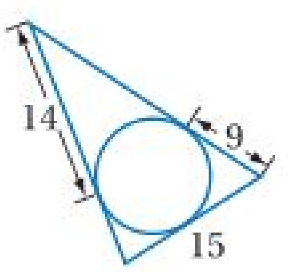
B



D

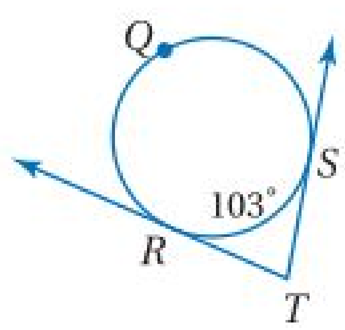


12) أوجد محيط المثلث في الشكل المجاور، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو كأنها مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا.

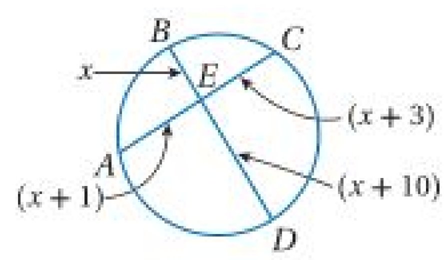


أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

13) $m\angle T$



14) x



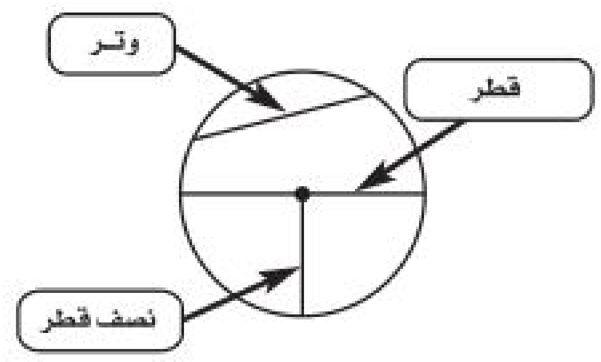
15) **أزهار:** أرادت هند أن تحوّط جذع شجرة بحوض من الأزهار. إذا كان مركز جذع الشجرة هو نقطة الأصل، وأرادت هند أن يمتد الحوض 3 ft من مركز الشجرة، فما المعادلة التي تُمثّل الحد الخارجي لحوض الأزهار؟

الإعداد للاختبارات

خصائص الدائرة

الدائرة هي الشكل الوحيد الذي تكون فيه للزوايا والأقواس والقطع المستقيمة التي تقطع الدائرة خصائص وعلاقات خاصة.

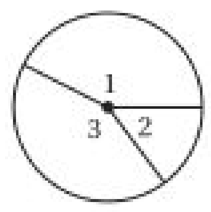
ويُفترض أن تكون قادرًا على تعيين عناصر الدائرة وكتابة معادلتها، وإيجاد قياسات الأقواس والزوايا والقطع المستقيمة في الدائرة.



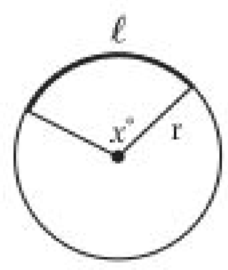
$r = \frac{1}{2}d$

$d = 2r$

$C = 2\pi r$ أو πd



$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 360^\circ$



$\ell = \frac{x^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r$

استراتيجية لتطبيق خصائص الدائرة

الخطوة 1

مراجعة عناصر الدائرة والعلاقات بينها.

- تتضمّن العناصر الأساسية: **نصف القطر والقطر والوتر والقوس والمماس والقاطع.**
- ادرس النظريات الأساسية للدائرة وخصائصها، بالإضافة إلى العلاقة بين عناصر الدائرة.

الخطوة 2

اقرأ نص المسألة، وادرس أيَّ شكلٍ مُعطًى بدقةٍ وعنايةٍ.

- حددّ المطلوب من المسألة.
- ضع على الشكل المعلومات التي تتضمّنها المسألة، وأيّ معلومات أخرى يمكن أن تُحدّدها.
- حدّد أي النظريات أو الخصائص التي يمكن تطبيقها في حالة هذه المسألة.

الخطوة 3

حُلّ المسألة، ثم تحقّق من حلّك.

- طبّق النظريات أو الخصائص لحل المسألة.
- تحقّق من إجابتك، وتأكّد من كونها مقبولة ومنطقية.

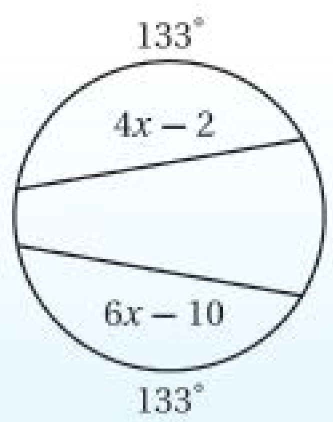
مثال

اقرأ المسالة جيدًا، وحدّد المطلوب فيها ، ثم استعمل المعطيات لحلّها.

أوجد قيمة x في الشكل المجاور:

A 2   **C** 4

B 3   **D** 6



اقرأ المسألة وادرس الشكل جيدًا. أعطيت دائرة فيها وتران مقابلان لقوسين متطابقين. يكون الوتران متطابقين إذا وفقط إذا كان القوسان الأصغران المقابلان لهما متطابقين. يمكنك استعمال هذه الخاصية لتكوين معادلة بدلالة x، ومن ثم حلّها.

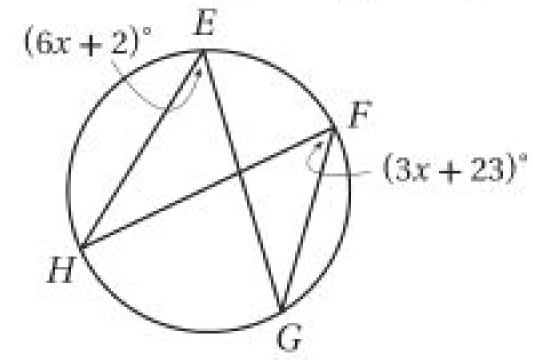
$4x - 2 = 6x - 10$	**تعريف القطع المتطابقة**
$4x - 6x = -10 + 2$	**بالطرح**
$-2x = -8$	**بالتبسيط**
$\frac{-2x}{-2} = \frac{-8}{-2}$	**بقسمة كلا الطرفين على −2**
$x = 4$	**بالتبسيط**

إذن قيمة x تساوي 4، فالإجابة هي C، تحقّق من إجابتك بتعويض 4 في كلٍّ من عبارتَي الوترين، ستجد أن طولَي الوترين متساويان.

تمارين ومسائل

اقرأ كل سؤالٍ ممّا يأتي. ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة.

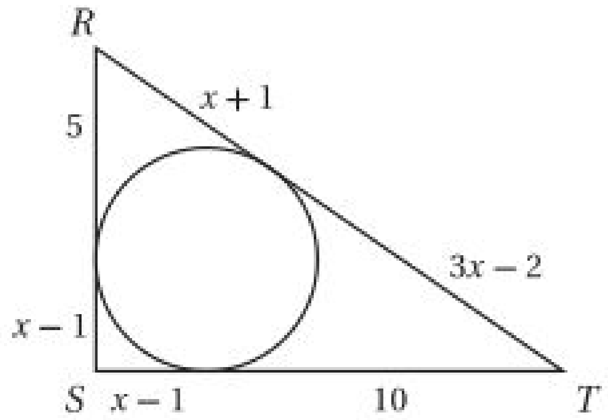
1) أوجد قيمة x في الشكل أدناه:



A 4   **C** 6

B 5   **D** 7

2) يُحيط المثلث RST بالدائرة في الشكل أدناه، ما محيط هذا المثلث؟



A 33 وحدةً   **C** 37 وحدةً

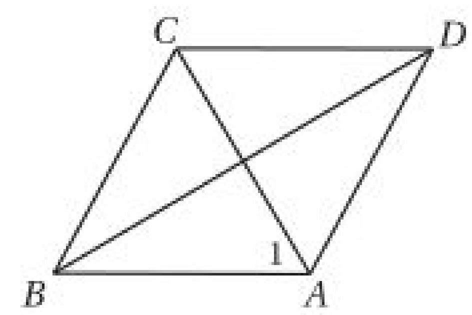
B 36 وحدةً   **D** 40 وحدةً

اختبار تراكمي

أسئلة الاختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال مما يأتي، ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة.

1) إذا كان $ABCD$ معينًا، وكان $m\angle ABC = 70°$ ، فأوجد $m\angle 1$؟



A $45°$ **B** $55°$ **C** $70°$ **D** $125°$

2) يقول محمد: "إذا كنت تقيم في جدة، فإنك تقيم في المملكة العربية السعودية"، أيّ الافتراضات الآتية تبدأ به برهانًا غير مباشر لهذه العبارة؟

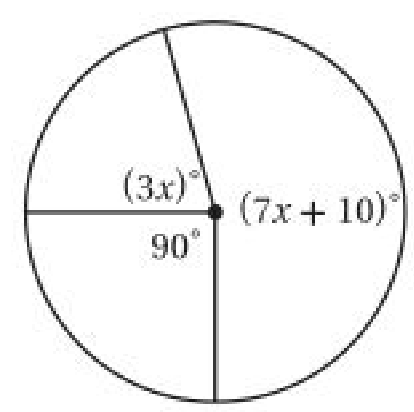
A افترض أن شخصًا لا يقيم في جدة.

B افترض أن شخصًا لا يقيم في المملكة العربية السعودية.

C افترض أن شخصًا لا يقيم في المملكة العربية السعودية، ولا يقيم في جدة.

D افترض أن شخصًا يقيم في السعودية، ويقيم في جدة.

3) أوجد قيمة x في الشكل أدناه:

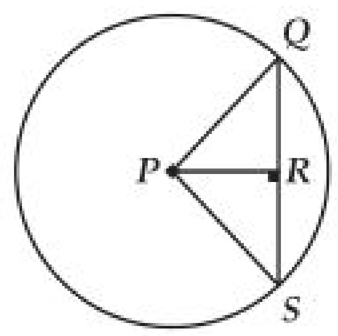


A 19 **B** 23 **C** 26 **D** 28

إرشادات للاختبار

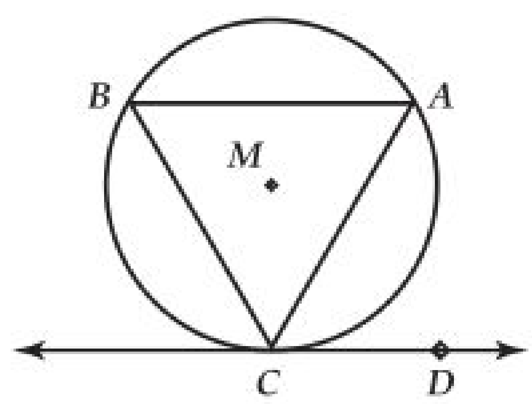
السؤال 3: استعمل خصائص الدائرة، لكتابة المعادلة وحلّها لإيجاد قيمة x.

4) نصف قطر $\odot P$ في الشكل أدناه يساوي 5 ، إذا كان $PR = 3$، فما طول $\overline{QS}$ ؟



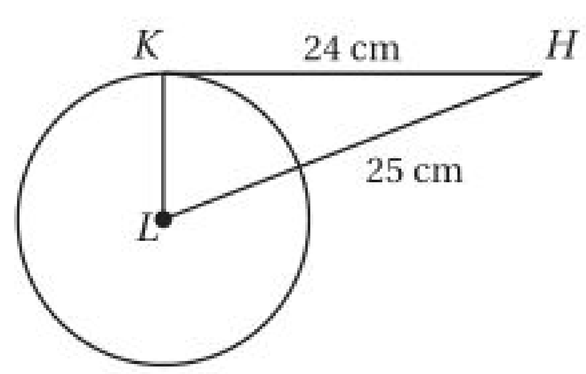
A 4 **B** 5 **C** 8 **D** 10

5) في $\odot M$ ، إذا كان: $\widehat{AB} \cong \widehat{BC} \cong \widehat{CA}$ ، وكان $\overleftrightarrow{CD}$ مماسًّا لـ $\odot M$ عند النقطة C كما في الشكل أدناه، فما قياس $\angle ACD$ ؟



A $30°$ **B** $60°$ **C** $90°$ **D** $120°$

6) إذا كانت $\overline{HK}$ مماسًّا للدائرة L في الشكل أدناه، فأوجد القيمة الدقيقة لمحيط $\odot L$.

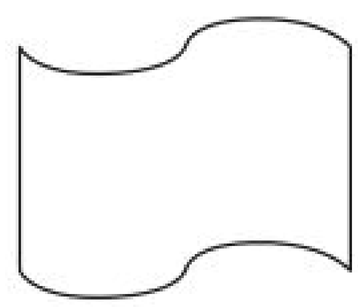


A 7π cm **B** 14π cm **C** 43.96 cm **D** 20π cm

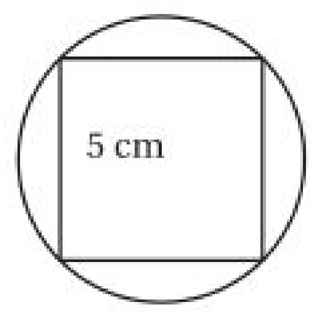
أسئلة ذات إجابات قصيرة

اكتب إجاباتك في ورقة الإجابة.

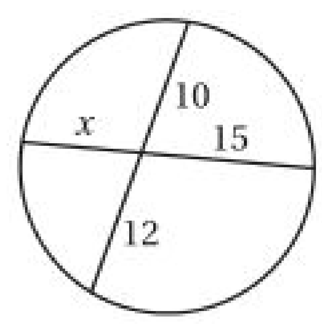
7) هل للشكل الآتي تماثل دوراني؟
وإذا كان كذلك، فأوجد رتبة هذا التماثل.



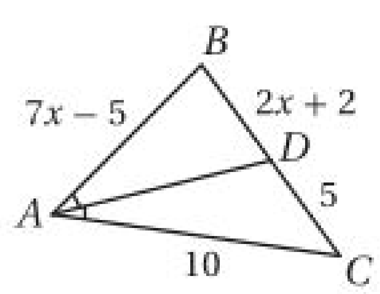
8) الشكل أدناه مربع محاط بدائرة طول ضلعه 5 cm،
ما محيط هذه الدائرة؟ قرّب إجابتك إلى أقرب عُشر سنتمتر.



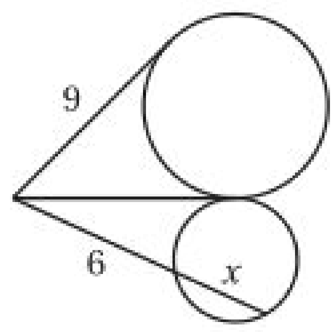
9) أوجد قيمة x في الشكل الآتي، مبيّنًا خطوات الحل.



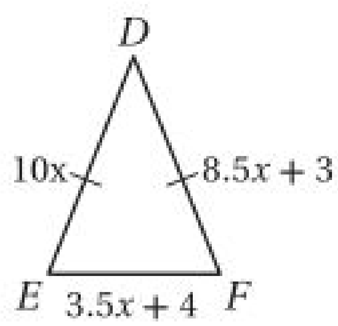
10) $\overline{AD}$ تنصف $\angle CAB$ كما في الشكل المجاور، أوجد قيمة x.



11) أوجد قيمة x في الشكل أدناه مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا.



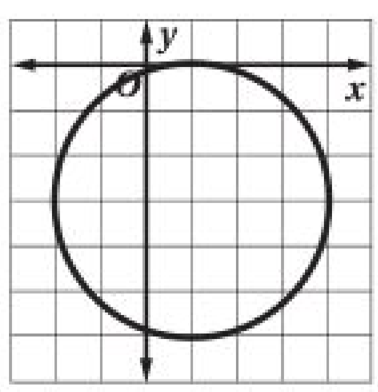
12) ما طول $\overline{EF}$ في المثلث أدناه؟



أسئلة ذات إجابات مطولة

اكتب إجابتك في ورقة الإجابة مبينًا خطوات الحل.

13) استعمل الدائرة في الشكل أدناه لحل الأسئلة الآتية:



a) ما مركز الدائرة؟

b) ما نصف قطر الدائرة؟

c) اكتب معادلة الدائرة.

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

إذا لم تستطع الإجابة عن...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
فعد إلى الدرس...	مهارة سابقة	مهارة سابقة	8-2	8-3	8-6	8-5	7-5	8-4	8-7	6-4	8-5	مهارة سابقة	8-8

مراجعة بعض المصطلحات والرموز

المصطلح باللغة العربية	الرمز في المرحلة المتوسطة	الرمز في المرحلة الثانوية
الإحداثي السيني	س	x
الإحداثي الصادي	ص	y
ارتفاع	ل	h
الجذر التربيعي	⎷	$\sqrt{\ }$
قياس زاوية	ق ∠ أ ب جـ	$m\angle ABC$
زاوية	∠	$\angle$
زوج مرتب	(أ ، ب)	(a, b)
قاعدة	ق	b
قطر دائرة	٢ نق	d
قطعة مستقيمة	أب قطعة مستقيمة طرفاها أ ، ب	$\overline{AB}$ قطعة مستقيمة طرفاها A, B
محيط الدائرة	مح	C
مركز الدائرة	م	C
مساحة	م	A
مستقيم	$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مستقيم يمر بالنقطتين أ وَ ب	$\overleftrightarrow{AB}$ مستقيم يمر بالنقطتين A, B
المسافة بين نقطتين	ف	d
نصف قطر الدائرة	نق	r
نصف مستقيم	$\overleftarrow{\text{أب}}$	$\overrightarrow{AB}$ نصف مستقيم يمر بالنقطة B وطرفه A
نقطة الأصل	م	o

الصيغ

الهندسة الإحداثية

نقطة المنتصف	على خط الأعداد: $M = \frac{a+b}{2}$ في المستوى الإحداثي: $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ في الفراغ: $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$	المسافة بين نقطتين	على خط الأعداد: $d = \lvert a - b \rvert$ في المستوى الإحداثي: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ في الفراغ: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
		الميل	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_2 \neq x_1$

المحيط

المربع	$P = 4s$	الدائرة	$C = \pi d$ أو $C = 2\pi r$
المستطيل	$P = 2\ell + 2w$		

المساحة

المربع	$^2A = s$	المُعيَّن	$A = bh$ أو $A = \frac{1}{2} d_1 d_2$
المستطيل	$A = bh$ أو $A = \ell w$	المثلث	$A = \frac{1}{2} bh$
متوازي الأضلاع	$A = bh$	الدائرة	$A = \pi r^2$
شبه المنحرف	$A = \frac{1}{2} h(b_1 + b_2)$	القطاع الدائري	$A = \frac{N}{360} \cdot \pi r^2$

المساحة الجانبية

المنشور	$L = Ph$	الهرم	$L = \frac{1}{2} P\ell$
الأسطوانة	$L = 2\pi rh$	المخروط	$L = \pi r \ell$

المساحة الكلية للسطح

المنشور	$T = Ph + 2B$	المخروط	$T = \pi r \ell + \pi r^2$
الأسطوانة	$T = 2\pi rh + 2\pi r^2$	الكرة	$T = 4\pi r^2$
الهرم	$T = \frac{1}{2} P\ell + B$		

الحجم

المكعب	$V = s^3$	الهرم	$V = \frac{1}{3} Bh$
متوازي المستطيلات	$V = \ell wh$	المخروط	$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$
المنشور	$V = Bh$	الكرة	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$
الأسطوانة	$V = \pi r^2 h$		

الصيـغ

المعادلات في المستوى الإحداثي

معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع	$y = mx + b$	معادلة الدائرة	$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$
معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة	$y - y_1 = m(x - x_1)$	الصيغة التربيعية	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

حساب المثلثات

قانون الجيب	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$	نظرية فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$
قانون جيب التمام	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$		

الرموز

a	العامِد
$\approx$	مساوٍ تقريبًا لـِ
$\widehat{AB}$	القوس الأصغر الذي طرفاه A وَ B
$\widehat{ABC}$	القوس الأكبر الذي طرفاه A وَ C
A	مساحة المضلع أو الدائرة أو القطاع الدائري
B	مساحة قاعدة المنشور أو الأسطوانة أو الهرم أو المخروط
$p \leftrightarrow q$	العبارة الشرطية الثنائية: p إذا وفقط إذا q
$\odot P$	دائرة مركزها P
C	محيط الدائرة
$p \to q$	العبارة الشرطية: إذا كان p فإن q
$\cong$	مطابق لـِ
$p \wedge q$	p وَ q
cos	جيب التمام
$°$	درجة
$p \vee q$	p أو q
AB	المسافة بين النقطتين A وَ B
$=$	يساوي
$\neq$	لا يساوي
$>$	أكبر من
$\geq$	أكبر من أو يساوي
A'	صورة A
$<$	أقل من
$\leq$	أقل من أو يساوي
L	المساحة الجانبية
$m\widehat{AB}$	قياس القوس AB بالدرجات
M	نقطة المنتصف
$\sim p$	نفي العبارة p
(x, y, z)	الثلاثي المرتب
$\parallel$	موازٍ لـِ
$\nparallel$	ليس موازيًا لـِ
▱	متوازي أضلاع
P	المحيط
$\perp$	عمودي على
π	باي (ط) النسبة التقريبية
s	طول ضلع من مضلع
$\sim$	مشابه
sin	الجيب
ℓ	المستقيم ℓ ، طول المستطيل، طول القوس، الارتفاع الجانبي
m	الميل
tan	الظل
T	مساحة السطح الكلية
$\triangle$	المثلث
V	الحجم
w	عرض المستطيل

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445