الفصل الأول: العلاقات والدوال النسبية

1- الدرس الأول : ضرب العبارات النسبية وطرحها

تسمى النسبة بين كثيرتي حدود بالعبارة النسبية

ضرب العبارات النسبية :

إذا كانت $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ عبارتين نسبيتين , حيث $b\neq 0$, $d\neq 0$ فإن :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

قسمة العبارات النسبية :

إذا كانت $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ عبارتين نسبيتين , حيث $b\neq 0$, $d\neq 0$ فإن :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

مثال / بسط العبارات الاتية

-1 $\frac{6c}{5d} \times \frac{15cd^2}{8a}$

$\frac{90c^2d^2}{40ad}$ (نضرب بسط في بسط ومقام في مقام)

$\frac{9c^2d}{4ad}$ (نختصر)

الكسر المركب : هو كسر يحتوي بسطه ومقامه أو كليهما على كسور

لتبسيط الكسر المركب نكتبه على صورة عبارتين نسبيتين

$$\frac{\frac{a+b}{4}}{\frac{a^2+b^2}{4}} = \frac{a+b}{4} \div \frac{a^2+b^2}{4} = \frac{a+b}{4} \times \frac{4}{a^2+b^2}$$

2- الدرس الثاني : جمع العبارات النسبية وطرحها

المضاعف المشترك الأصغر (LCM) لكثيرات الحدود:

عند جمع عبارتين نسبيتين بمقامين مختلفين أو طرحهما , يجب أن نجد (LCM) للمقامين.

ولإيجاد (LCM) لعددين أو لكثيرتي حدود أو أكثر, يجب أن :

-1 نحلل كلا منهما لعوامل أولية

-2 نضرب جميع العوامل التي لها أكبر قوى (أكبر أس)

مثال / أوجد LCM لكل مجموعة مما يأتي :

$6xy$, $15x^2$, $9xy^4$

$6xy = 2\times 3\, x\, y$

$15x^2 = 3\times 5\, x^2$

$9xy^4 = 3^2Xy^4$

LCM $= 2\times 3^2 \times 5\, x^2\, y^4$

$= 90\, y^4\, x^2$

لأي عبارتين نسبيتين $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ حيث $b\neq 0, d\neq 0$ فإن:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{bd} = \frac{ad\pm cb}{bd}$$

مثال/ بسط العبارة الاتية

$\frac{3y}{2x^3} + \frac{5z}{8xy^2}$

LCM= $8\,x^3y^2$

$(\frac{3y}{2x^3} \times \frac{4y^2}{4y^2}) + (\frac{5z}{8xy^2} \times \frac{x^2}{x^2})$

$\frac{12y^3}{8x^3y^2} + \frac{5zx^2}{8x^3y^2}$

$= \frac{12y^2 + 5zx^2}{8x^3y^2}$

3- الدرس الثالث: تمثيل دوال المقلوب بيانياً

دالة المقلوب : هي الدالة المكتوبة على صورة $f(x) = \frac{1}{a(x)}$

-تمثل دالة المقلوب بيانياً على شكل قطع زائد

خط التقارب : هو مستقيم يقترب منه التمثيل البياني

-تكون الدالة غير معرفة عندما x=0

مثال/ حدد قيمة x التي تجعل المعادلة $f(x) = \frac{3}{2x+5}$ غير معرفة

2x + 5 = 0

2x = -5

X =- 2,5

خطوط التقارب للدالة $y = \frac{a}{x-b} + c$: يوجد خط تقارب رأسي عند قيمة x التي تجعل المقام صفرا

ويكون لها خط تقارب أفقي عند y=c (إذا لم يوجد c في الدالة يكون خط التقارب الأفقي y=0)

مثال/ مثل الدالة بيانيا $\frac{20}{x}$ f(x) ، حيث x تمثل عدد الأشخاص في منطاد هوائي وتمثل f(x) متوسط المساحة المخصصة لكل شخص بالأقدام المربعة

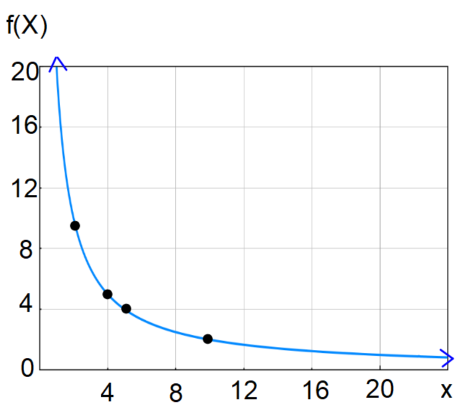
هنا لا يمكن التعويض بقيم سالبة أو صفراً لأنها تمثل أشخاص

نجرب 2 , 4 , 5 , 10

النقاط : (10 , 2) , (5 , 4) , (4 ,5) , (2, 10)

خط التقارب الرأسي : x=0

خط التقارب الأفقي : y=0



الدرس الرابع : تمثيل الدوال النسبية بيانياً

الدالة النسبية : هي دالة على صورة $f(x) = \frac{a(X)}{b(X)}$ حيث a(x) , b(x) كثيرتا حدود و $b(x) \neq 0$

إذا كان $f(x) = \frac{a(X)}{b(X)}$ حيث a(x) , b(x) كثيرتا حدود و $b(x) \neq 0$ فإنه :

- يوجد للدالة f(x) خط تقارب رأسي عندما b(x)= 0
- يوجد للدالة خط تقارب أفقي واحد على الأكثر
- إذا كانت درجة a(x) أكبر من درجة b(x) فلا يوجد خطا تقارب أفقيا
- إذا كانت درجة a(x) أقل من درجة b(x) فإن خط التقارب الأفقي هو المستقيم y = 0
- إذا كانت درجة a(x) تساوي درجة b(x) فإن خط التقارب الأفقي هو المستقيم $y = \frac{\text{المعامل الرئيس ل } a(x)}{\text{المعامل الرئيس ل } b(x)}$

مثال / حدد خطوط التقارب في كل مما يأتي :

1- $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$

خط تقارب رأسي : $x = -1$

خط تقارب أفقي : لا يوجد

2- $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$

خط تقارب رأسي : $x=3$

خط تقارب أفقي : $y= 2$

الدرس الخامس: دوال المتغير

قانون التغير الطردي:-

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_1}$$

قانون التغير المشترك:-

$$\frac{y_1}{x_1\ z_1} = \frac{y_2}{x_2\ z_2}$$

قانون التغير العكسي:-

$$\frac{x_1}{y_2} = \frac{x_2}{y_1}$$

مثال / إذا كانت y تتغير طردياً مع x وكانت y=15 عند x= 5 , أوجد قيمة y عند x=7 .

نستخدم قانون التغير الطردي

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_1} = \frac{15}{5} = \frac{y_2}{7}$$ (نستخدم حركة المقص)

$$5\ y_2 = 105$$ (نقسم على 5)

$$Y_2 = 21$$

الدرس السادس: حل المعادلات والمتباينات النسبية

تسمى المعالدة التي تحتوى على عبارة نسبية أو أكثر بالمعادلة النسبية .

عند حل المعادلات النسبية نوحد المقامات عن طريق ضرب طرفي المعادلة في LCM للمقامات .

حُلّ المعادلة $\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2-x-10}{x^2+8x+15} = \frac{3}{x+3}$.

LCM للمقامات هو $(x+3)(x+5)$.

$\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2-x-10}{x^2+8x+15} = \frac{3}{x+3}$	المعادلة الأصلية
$\frac{(x+3)(x+5)(2x)}{x+5} - \frac{(x+3)(x+5)(x^2-x-10)}{x^2+8x+15} = \frac{(x+3)(x+5)3}{x+3}$	اضرب المعادلة في LCM للمقامات
$\frac{(x+3)\overset{1}{\cancel{(x+5)}}(2x)}{\underset{1}{\cancel{x+5}}} - \frac{\overset{1}{\cancel{(x+3)}}\overset{1}{\cancel{(x+5)}}(x^2-x-10)}{\underset{1}{\cancel{x^2+8x+15}}} = \frac{\overset{1}{\cancel{(x+3)}}(x+5)3}{\underset{1}{\cancel{x+3}}}$	اختصر العوامل المشتركة
$(x+3)(2x) - (x^2-x-10) = 3(x+5)$	بسّط
$2x^2+6x-x^2+x+10 = 3x+15$	خاصية التوزيع
$x^2+7x+10 = 3x+15$	بسّط
$x^2+4x-5 = 0$	اطرح $3x+15$ من كلا الطرفين
$(x+5)(x-1) = 0$	حلّل إلى عوامل
$x-1=0$ أو $x+5=0$	خاصية الضرب الصفري
$x=1$ أو $x=-5$	

تسمى المتباينة التي تحتوي على عبارة نسبية أو أكثر بالمتباينة النسبية .

عند حل المتباينة النسبية نوجد أولاً القيم المستثناة وهي القيم التي يكون عندها المقام صفر

نقوم بحل المتباينة عن طريق تحويل رمز المتبيانة الى المساوة (نحولها من متباينة الى معادلة)

نستعمل القيم التي حصلنا عليها لتقسيم خط الأعداد الى فترات ونجرب قيمة من كل فترة لتحديد الفترات التي تحقق المتباينة

حل المتباينة النسبية $\frac{x}{3} - \frac{1}{x-2} < \frac{x+1}{4}$.

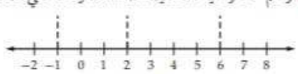
الخطوة 1: القيمة المستثناة في هذه المتباينة هي 2 .

الخطوة 2: حل المعادلة المرتبطة:

$\frac{x}{3} - \frac{1}{x-2} = \frac{x+1}{4}$	المعادلة المرتبطة
$\overset{4}{\cancel{12}}(x-2)\frac{x}{\underset{1}{\cancel{3}}} - \overset{1}{12\cancel{(x-2)}}\frac{1}{\underset{1}{\cancel{x-2}}} = \overset{3}{\cancel{12}}(x-2)\frac{x+1}{\underset{1}{\cancel{4}}}$	اضرب في LCM للمقامات ، $12(x-2)$
$4x^2-8x-12 = 3x^2-3x-6$	خاصية التوزيع
$x^2-5x-6=0$	اطرح $3x^2-3x-6$ من كلا الطرفين
$(x-6)(x+1)=0$	حلّل إلى عوامل
$x=6$ أو $x=-1$	خاصية الضرب الصفري

النسبية

الخطوة 3: ارسم خطًا رأسيًا عند القيمة المستثناة، وعند حلّي المعادلة وذلك لتقسيم خط الأعداد إلى فترات.



الخطوة 4: اختبر قيمة من كل فترة لتحديد ما إذا كانت الأعداد في الفترة تحقق المتباينة.

اختبر $x=-3$	اختبر $x=0$	اختبر $x=4$	اختبر $x=8$
$\frac{-3}{3} - \frac{1}{-3-2} \overset{?}{<} \frac{-3+1}{4}$	$\frac{0}{3} - \frac{1}{0-2} \overset{?}{<} \frac{0+1}{4}$	$\frac{4}{3} - \frac{1}{4-2} \overset{?}{<} \frac{4+1}{4}$	$\frac{8}{3} - \frac{1}{8-2} \overset{?}{<} \frac{8+1}{4}$
$-1 + \frac{1}{5} \overset{?}{<} -\frac{2}{4}$	$0 + \frac{1}{2} \overset{?}{<} \frac{1}{4}$	$\frac{4}{3} - \frac{1}{2} \overset{?}{<} \frac{5}{4}$	$\frac{32}{12} - \frac{2}{12} \overset{?}{<} \frac{27}{12}$
✓ $-\frac{4}{5} < -\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \not< \frac{1}{4}$	✓ $\frac{5}{6} < \frac{5}{4}$	$\frac{30}{12} \not< \frac{27}{12}$

الجملة صحيحة عندما $x=-3$, $x=4$ ؛ لذا فإن الحل هو $x<-1$ أو $2<x<6$.

إذا نتج عن تعويض أحد الحلول صفر في أحد مقامات المعادلة , وجب استثناء هذا الحل

لذا في المثال الأول الحل $x=-5$ يستثنى من الحل لأنه ينتج عن تعويضه صفر في أحد مقامات المعادلة

لذا يكون الحل $x = 1$.

الفصل الثاني: المتتابعات و المتسلسلات

الدرس الأول: المتتابعات بوصفها دوال

المتتابعة: هي مجموعة من الأعداد مرتبة في نمط معين او ترتيب محدد

- يسمى كل عدد في المتتابعة حداً

المتتابعة قد تكون منتهية (أي يكون لها عدد محدد من الحدود) وقد تكون غير منتهية (أي تستمر إلى مالانهاية).

* أنواع المتتابعات الحسابية:-

1- حسابية   2- هندسية

* أساس المتتابعة الحسابية :-

هو الفرق بين كل حدين متتاليين . (يجب أن يكون الفرق ثابت بين كل الحدود)

* أساس المتتابعة الهندسية:-

هو النسبة بين كل حدين متتاليين . (يجب أن تكون النسبة ثابتة بين كل الحدود)

مثال/ حدد إذا كانت المتتابعة هندسية أم حسابية

1)- 16 , 24 , 36 , 54

نوجد الفرق :

$54 - 36 = 18$, $36 - 24 = 12$

ليست حسابية .... إذا نوجد النسبة

$\frac{54}{36} = 1,5 =$, $\frac{36}{24} = 1,5 =$, $\frac{24}{16} = 1,5$

إذا متتابعة هندسية

الدرس الثاني: المتتابعات و المتسلسلات الحسابية

الأوساط : هي الحدود الواقعة بين حدين غير متتالين في المتتابعة .

قانون :- $a_n = a_1 + (n-1) d$

a_n : الحد النوني (الحد المطلوب أو الحد الأخير)

a_1 : الحد الأول

n : عدد الحدود

d : أساس المتتابعة

يستعمل القانون لإيجاد أي حد أو إيجاد الأوساط الحسابية في المتتابعة حسابية .

أوجد قيمة الحدّ الثاني عشر في المتتابعة الحسابية: $9, 16, 23, 30, \ldots$

الخطوة 1: أوجد أساس المتتابعة.

الفرق بين أيّ حدّين متتاليين: $16 - 9 = 7$

إذن $d = 7$

الخطوة 2: أوجد قيمة الحدّ الثاني عشر.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ — الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية

$a_{12} = 9 + (12-1)(7)$ — $a_1 = 9,\ d = 7,\ n = 12$

$= 9 + 77 = 86$ — بسّط

المتسلسلة الحسابية : هي مجموع حدود متتابعة حسابية .. ويرمز لرمز المجموع (S_n)

قانون :- $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

أوجد مجموع حدود المتسلسلة الحسابية $12 + 19 + 26 + \ldots + 180$

الخطوة 1: $a_1 = 12,\ a_n = 180,\ d = 19 - 12 = 7$

يجب إيجاد قيمة n أولًا كي نجد المجموع.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ — الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية

$180 = 12 + (n-1)(7)$ — $a_n = 180, a_1 = 12, d = 7$

$168 = 7n - 7$ — استعمل خاصية التوزيع، ثم بسّط

$25 = n$ — حُلّ المعادلة

الخطوة 2: استعمل إحدى الصيغتين لحساب S_n .

$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ — صيغة المجموع

$S_{25} = \frac{25}{2}[2(12) + (25-1)(7)]$ — $n = 25, a_1 = 12, d = 7$

$S_{25} = 12.5(192) = 2400$ — بسّط

يمكن التعبير عن المتسلسلة بصورة مختصرة باستعمال رمز المجموع :

$$\sum_{k=1}^{n} f(x)$$

حيث n : آخر قيمة ل k

K=1 : أول قيمة ل k

F(X) : صيغة حدود المتسلسلة

الدرس الثالث: المتتابعات و المتسلسلات الهندسية

قانون:- $a_n = a_1 r^{n-1}$

حيث r : أساس المتتابعة

يستخدم لإيجاد أي حد أو الأوساط الهندسية في المتتابعة الهندسية

أوجد ثلاثة أوساط هندسية بين العددين $2, 1250$

الخطوة 1: بما أنه يوجد ثلاثة أوساط هندسية بين الحدّ الأول والحدّ الأخير، فإن عدد حدود المتتابعة هو $3 + 2 = 5$، ولذلك يكون $n = 5$.

الخطوة 2: أوجد قيمة r

$a_n = a_1 r^{n-1}$ — الحدّ النوني في المتتابعة الهندسية

$1250 = 2r^{5-1}$ — $a_n = 1250,\ a_1 = 2,\ n = 5$

$\pm 5 = r$ — اقسم الطرفين على 2، ثم أوجد الجذر الرابع

الخطوة 3: استعمل r لإيجاد الأوساط الهندسية الثلاثة:

$2 \xrightarrow{\times 5} 10 \xrightarrow{\times 5} 50 \xrightarrow{\times 5} 250 \xrightarrow{\times 5} 1250$ أو $2 \xrightarrow{\times -5} -10 \xrightarrow{\times -5} 50 \xrightarrow{\times -5} -250 \xrightarrow{\times -5} 1250$

إذن الأوساط الهندسية هي : $-10, 50, -250$ أو $10, 50, 250$

المتسلسلة الهندسية : بوضع إشارة + بين حدود المتتابعة الهندسية

صيغتها :- $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \quad , \quad r \neq 1$

أوجد a_1 في المتسلسلة الهندسية التي فيها $S_n = 13116,\ n = 7,\ r = 3$

$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r}$	صيغة المجموع
$13116 = \frac{a_1 - a_1(3^7)}{1-3}$	$S_n = 13116,\ r = 3,\ n = 7$
$13116 = \frac{a_1(1-3^7)}{1-3}$	استعمل خاصية التوزيع
$13116 = \frac{-2186a_1}{-2}$	اطرح
$13116 = 1093a_1$	بسّط
$12 = a_1$	اقسم الطرفين على 1093

الدرس الرابع: المتسلسلات الهندسية اللانهائية

تكون المتسلسلة الهندسية متقاربة إذا كان أساسها أقل من 1 , أي $(r < 1)$

تكون المتتابعة الهندسية متباعدة إذا كان أساسها أكبر من أو يساوي 1 , أي $(r \geq 1)$

مثال / حدد إذا كانت المتسلسلة الهندسية متقاربة أم متباعدة :-

1)- 54 + 36 + 24 + ...

$\frac{36}{54} = \frac{2}{3}$

بما أن $\frac{2}{3} < 1$ .. فإنها متقاربة

مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية (المتقاربة) :-

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

حيث : $r < 1$

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين إن وجد:

a) $\frac{2}{3} + \frac{6}{15} + \frac{18}{75} + \dots$

الخطوة 1: أوجد قيمة r للتأكد من وجود المجموع من عدمه.

$r = \frac{6}{15} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$ اقسم الحدّ على الحدّ السابق له مباشرة

بما أن $\frac{3}{5} < 1$ ، فإن للمتسلسلة مجموعًا.

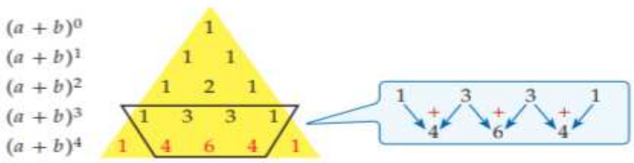
الخطوة 2: استعمل المعادلة لإيجاد المجموع.

$S = \frac{a_1}{1-r}$	صيغة المجموع
$= \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{3}{5}}$	$a_1 = \frac{2}{3},\ r = \frac{3}{5}$
$= \frac{2}{3} \div \frac{2}{5} = \frac{5}{3}$	بسّط

الدرس الخامس : نظرية ذات الحدين

مثلث باسكال: يتكون من صفوف بداية كل صف فيه ونهايته 1 وباقي الأعداد هي مجموع العددين اللذان فوقه .

ينسب هذا المثلث للعالم الفرنسي بليز باسكال



فيكون مفكوك $(a+b)^4$ هو

الأس تبدأ من 4 وتتناقص إلى صفر

$$(a+b)^4 = 1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4$$

الأس تبدأ من صفر وتتزايد إلى 4

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

لاحظ أن عدد الحدود في مفكوك $(a+b)^4$ هو 5 حدود، ومجموع الأسس في كل حدٍّ هو 4

نظرية ذات الحدَّين: يمكن استعمال **نظرية ذات الحدَّين**؛ لإيجاد مفكوك ذات الحدَّين بدلًا من استعمال مثلَّث باسكال.

مفهوم أساسي — **نظرية ذات الحدين** — أضف إلى مطويتك

إذا كان n عددًا طبيعيًا، فإن :

$$(a+b)^n = {}_nC_0\, a^n b^0 + {}_nC_1\, a^{n-1} b^1 + {}_nC_2\, a^{n-2} b^2 + \dots + {}_nC_n\, a^0 b^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k$$

عند استعمال النظرية عوِّض عن n بقيمة الأسِّ. ولاحظ كيف ستتبع الحدود النمطَ نفسَه في مثلَّث باسكال، وكيف تتماثل المعاملات، وإذا كانت الإشارة بين الحدَّين سالبة $(a-b)^n$، فاكتبها بالشكل $(a+(-b))^n$ قبل إيجاد المفكوك.

الدرس السادس: البرهان باستعمال مبدأ العد الاستقراء الرياضي

مبدأ الاستقراء الرياضي : هو أسلوب لبرهنة الجمل الرياضيى المتعلقة بالأعداد الحقيقة .

نتبع هذه الخطوات عند الحل :

أولاً نبرهن أن الجملة صحيحة عندما نضع 1 بدل n .

ثانياً نفترض أن n = k (k عدد طبيعي) (نفترض بدون حل) وهذا الفرض يسمى فرضية الاستقراء .

ثالثاً نبرهن أن الجملة صحيحة عندما نستبدل n ب k +1.

برهن أن: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

الخطوة 1، عندما $n = 1$ ، فإن الطرف الأيسر من المعادلة هو $1^3 = 1$

والطرف الأيمن هو $1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$ ، إذن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2، افترض أن $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$ صحيحة، حيث k عدد طبيعي .

الخطوة 3، برهن أن الجملة صحيحة عندما $n = k + 1$.

أيْ برهن أن الجملة $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$ صحيحة.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$ فرضية الاستقراء

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$ اجمع $(k+1)^3$ لكلا الطرفين

$$= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4}$$ اجمع

$$= \frac{(k+1)^2[k^2 + 4(k+1)]}{4}$$ حلل

$$= \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4}$$ بسّط

$$= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$ حلل

العبارة الأخيرة هي الطرف الأيمن من المعادلة المطلوب إثباتها عندما $n = k + 1$ ، وبهذا فإن العلاقة صحيحة عند جميع الأعداد الطبيعية n

الفصل الثالث : الاحتمالات

الدرس الأول : تمثيل فضاء العينة

الحادثة : هي نتيجة أو أكثر لتجربة

النواتج : هي كل ما يمكن أن ينتج عن تجربة ما

التجربة العشوائية : هي إجراء نعرف مسبقاً جميع نواتجه الممكنة

فضاء العينة : هي جميع النواتج الممكنة لتجربة ما

يمكن تمثيل فضاء العينة عن طريق الجدول أو القائمة المنظمة أو الرسم الشجري

أُلقيت قطعة نقد مرتين، مثِّل فضاء العيّنة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري.

هنالك ناتجان ممكنان لكل رمية لقطعة النقد هما: الشعار (L) والكتابة (T).

القائمة المنظمة

اقرن كل ناتج ممكنٍ من الرمية الأولى بكل النواتج الممكنة من الرمية الثانية.

L , L   T , L

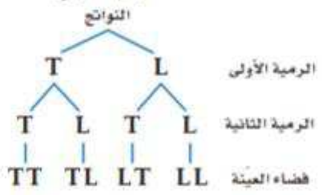
L , T   T , T

الجدول

دوّن النواتج الممكنة للرمية الأولى في العمود الأيمن، والنواتج الممكنة للرمية الثانية في الصف العلوي.

النواتج	شعار (L)	كتابة (T)
شعار (L)	L, L	L, T
كتابة (T)	T, L	T, T

الرسم الشجري



مبدأ العد الأساسي : يستخدم لإيجاد جميع النواتج الممكنة , ويكون عن طريق ضرب عدد النواتج من كل مرحلة من التجربة .

مثال / يريد أحمد شراء قميص , وهناك 5 أنواع من القماش , و 10 ألوان .... فما عدد الخيارات المتاحة لأحمد لاختيار قميصه ؟

نستخدم مبدأ العد الأساسي

القماش الألوان

$5 \times 10 = 50$

إذاً لديه 50 اختياراً ليختار قميصه

الدرس الثاني :الاحتمال باستعمال التباديل و التوافيق

مضروب العدد : يكتب مضروب العدد الصحيح الموجب n على صورة n! , و هو حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة التي هي أصغر من أو تساوي n .

التباديل : يرمز إلى عدد تباديل n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة بالرمز ${}_nP_r$

حيث : ${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

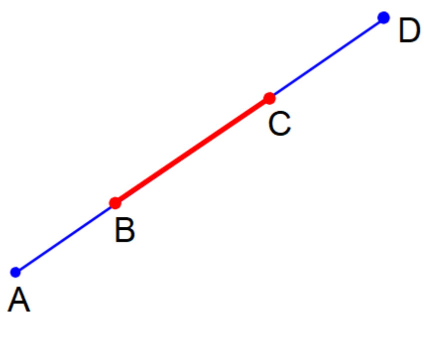
ملحوظة * عدد التباديل المختلفة لعناصر عددها n عندما يتكرر منها عنصر r_1 من المرات , وعنصر آخر r_2 من المرات و هكذا .... فإنه يساوي : $\frac{n!}{r_1!\times r_2!\times \dots\dots r_k!}$

التباديل الدائرية (أي على شكل دائرة): $\frac{n!}{n} = (n-1)!$

التوافيق : يرمز لعدد توافيق n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة يؤمز لها بالرمز ${}_nC_r$ حيث :

${}_nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

الدرس الرابع : الاحتمالات الهندسية

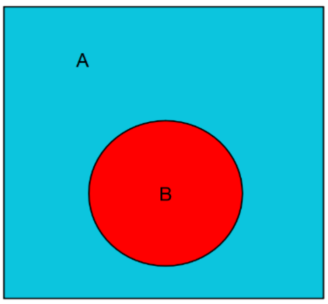


إذا احتوى المستقيم AD على مستقيم BC واخترنا نقطة عشوائية E من المستقيم AD فاحتمال أن تكون هذه النقطة E على المستقيم BC هي :

$$\frac{\text{طول المستقيم } BC}{\text{طول المستقيم } AD}$$

بالرموز : $P(E \in BC) = \frac{BC}{AD}$

كذلك الأمر بالنسبة للمساحات



إذا احتوت المنطقة A على المنطقة B واختيرت E نقطة عشوائية من A

احتمال ان تقع هذه النقطة في المنطقة B هي :

P (وقوع النقطة E في المنطقة B) = $\frac{\text{مساحة } B}{\text{مساحة } A}$

الدرس الرابع : احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث الغير مستقلة

الحادثة المركبة : تتكون من حادثتين بسيطتين أو أكثر

حادثتين مستقلتين : إذا كان احتمال حدوث A , لا يؤثر في احتمال حدوث B.

وعلى العكس فإن الحادثتين الغير مستقلتين يؤثر حدوث A في حدوث B .

احتمال وقوع حادثتين مستقلتين A و B معاً , يساوي حصل ضرب احتمالي الحادثتين .

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

احتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين A و B معاً , يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع A في احتمال وقوع B بعد وقوع A فعلاً .

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

الاحتمال المشروط : هو وقوع حادثة بشرط وقوع حادثة أخرى قبلها .

الاحتمال المشروط لوقوع B إذا وقع A هو : $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

حيث : $P(A) \neq 0$

الدرس الخامس : احتمالات الحوادث المتنافية

إذا كان وقوع حادثتين في الوقت نفسه غير ممكن , يقال إنهما حادثتان متنافيتان .

لو أن A و B حادثتين متنافيتين فاحتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتمال كل منهما .

$$P(A \cup B)= P(A) + P(B)$$

لو كانت هاتين الحادثتين غير متنافيتين , فاحتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتماليهما مطروحاً منه احتمال وقوعهما معاً .

$$P(A \cup B)= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

الحادثة المتممة ل A : تتكون من جميع نواتج فضاء العينة الغير موجودة في الحادثة A.

احتمال وقوع حادثة يساوي 1 – احتمال وقوع الحادثة .

$$P(\acute{A}) = 1 - P(A)$$

ملخص المفاهيم

أضف إلى مطويتك

قوانين الاحتمال

نوع الحوادث	الوصف	القانون
الحادثتان المستقلتان	احتمال وقوع الحادثة الأولى لا يؤثر في احتمال وقوع الحادثة الثانية.	إذا كانت A , B حادثتين مستقلتين، فإن: $P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B)$
الحادثتان غير المستقلتين	احتمال وقوع إحدى الحادثتين يؤثر في احتمال وقوع الأخرى.	إذا كانت A , B حادثتين غير مستقلتين، فإن: $P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B\|A)$
الحادثة المشروطة	إعطاء معلومات إضافية عن احتمال حادثة ما .	يكون احتمال الحادثة A بشرط وقوع حادثة B : $P(A\|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ بشرط $P(B) \neq 0$
الحادثتان المتنافيتان	حادثتان لا توجد بينها نواتج مشتركة.	إذا كانت A , B حادثتين متنافيتين فإن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
الحادثتان غير المتنافيتين	حادثتان توجد بينها نواتج مشتركة.	إذا كانت A و B حادثتين غير متنافيتين فإن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
الحادثة المتممة	تتكون نواتج الحادثة المتممة من جميع نواتج فضاء العيّنة التي ليست من نواتج الحادثة الأصلية.	لأيّ حادثة A: $P(A') = 1 - P(A)$

الفصل الرابع : حساب المثلثات

الدرس الأول : الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

حساب المثلثات : دراسة العلاقة بين زوايا المثلث وأضلاعه .

النسب المثلثية : هي النسبة بين طولي ضلعين في المثلث قائم الزاوية .

الدالة المثلثية : تعرف من خلال النسب المثلثية .

ترمز للزوايا برمز θ (ثيتا)

دوال المقلوب		دوال أساسية
$\csc\theta$ (قاطع تمام)= $\frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$	مقلوبها	$\sin\theta$ (جيب) = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$
$\sec\theta$ (قاطع) = $\frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$	مقلوبها	$\cos\theta$ (جيب تمام) = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$
$\cot\theta$ (ظل تمام) = $\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$	مقلوبها	$\tan\theta$ (ظل) = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

ملحوظة * $\tan = \frac{\sin}{\cos}$

بعض قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

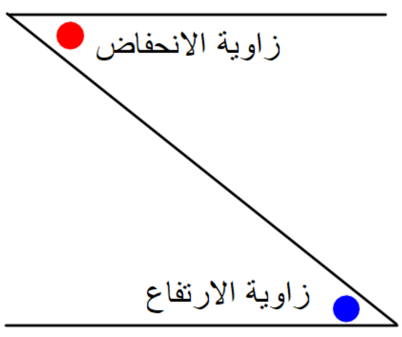
60°	45°	30°
$\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin 30 = \frac{1}{2}$
$\cos 60 = \frac{1}{2}$	$\cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan 60 = \sqrt{3}$	$\tan 45 = 1$	$\tan 30 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

إذا كانت A زاوية حادة وجيبها x فإن : معكوس جيب x هو قياس الزاوية A (قياس $\sin^{-1} x = A$).

إذا كانت A زاوية حادة وجيب التمام لها يساوي x فإن : معكوس جيب التمام x هو قياس A

(قياس $\cos^{-1} x = A$)

إذا كانت A زاوية حادة وظلها يساوي x فإن : معكوس ظل x هو قياس A (قياس $\tan^{-1} x = A$)

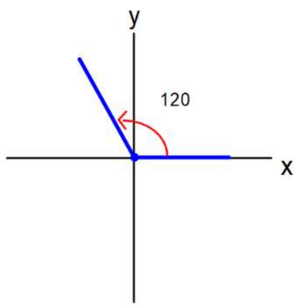


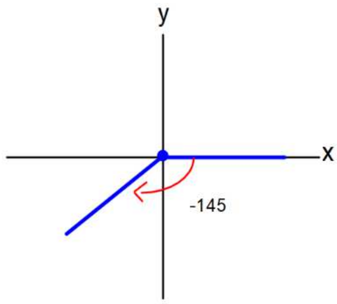
النقطة الزرقاء تسمى زاوية ارتفاع لأنها للأعلى

النقطة الحمراء تسمى زاية الانخفاض لأنها للأسفل

الدرس الثاني : الزوايا وقياساتها

تكون الزاوية مرسومة في المستوى الاحداثي في (الوضع القياسي) إذا كان رأسها نقطة الأصل , وأحد ضلعيها منطبقاً على الجزء الموجب من المحور x .





الضلع المنطبق على المحور x الموجب يسمى ضلع الابتداء للزاوية .

ضلع الانتهاء : هو الضلع الذي يدور حول نقطة الأصل .

تكون قياس الزاوية موجبة عكس اتجاه عقارب الساعة

وتكون سالبة مع اتجاه عقارب الساعة .

تشترك جميع الزوايا في الوضع القياسي في ضلع الإبتداء لأن ضلع الابتداء هو المحور الوجب لx

لكن تختلف في ضلع الانتهاء حسب قياس الزاوية ولكن قد تشترك زوايا مختلفة في ضلع الانتهاء ويكون ذلك عن طريق جمع او طرح معاملات 360 (دورة كاملة) فمثلا الزوايا 60 , 420 , -300 لها جميعاً نفس ضلع الانتهاء ويمكن التأكد بالجمع والطرح

60 + 360 = 420 , 60 – 360 = -300

أيضاً الزاوية 780 تشترك في ضلع الانتهاء 780 = (2 ×360) + 60 وهكذا .. وكذلك نفس الأمر في السالب

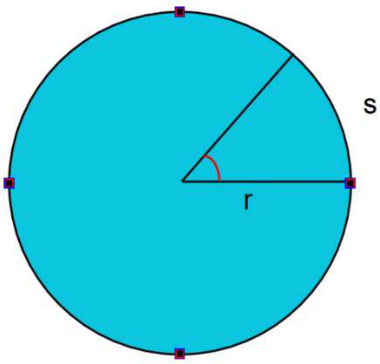
الراديان : وحدة قياس الزوايا في الدائرة تستند إلى طول القوس .

نصف القطر =1rad و بالتقريب π = 3.14

π rad = 180˚ , 2π rad = 360˚

للتحويل من القياس بالدرجات إلى الراديان نضرب في $\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}$

وبالعكس للتحويل من الراديان إلى الدرجات نضرب في $\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}}$



الزاوية المركزية : هي الزاوية التي يقع رأسها على مركز الدائرة .

إذا كانت S هي طول القوس المقابل للزاوية المركزية θ

و r نصف القطر فإن : $S = r\theta$

ملحوظة * يكون قياس الزاوية بالراديان

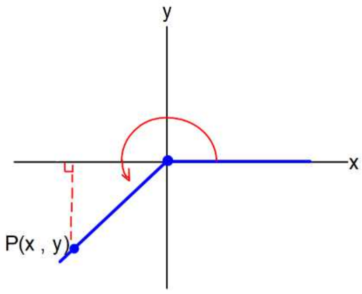
الدرس الثالث : الدوال المثلثية للزوايا

إذا كانت θ مرسومة في الوضع القياسي والنقطة P(x , y) تقع على ضلع انتهاء θ .. فيمكن باستعمال نظرية فيثاغورس إيجاد r التي تمثل البعد بين نقطة الأصل والنقطة P .

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$, وتكون الدوال الست لها هي :

$\sin\theta = \frac{y}{r}$, $\cos\theta = \frac{x}{r}$, $\tan\theta = \frac{y}{x}, x \neq 0$

$\csc\theta = \frac{r}{y}, y \neq 0$, $\sec\theta = \frac{r}{x}, x \neq 0$, $\cot\theta = \frac{x}{y}, y \neq 0$



الزاوية الربعية : هي التي يقع ضلع الانتهاء لها في الوضع القياسي على المحور x أو المحور y .

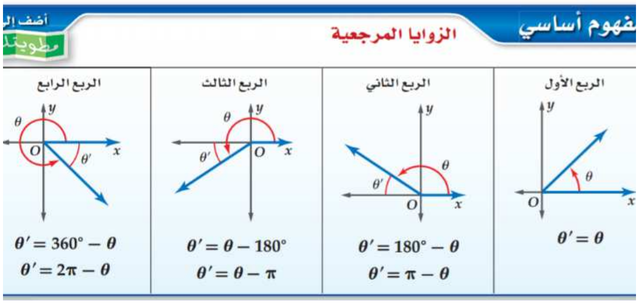
قياس الزاوية الربعية يكون من مضاعفات °90 , مثل 90 , 180 , 270 , 360

إذا كان ضلع الانتهاء هو نفسه ضلع الابتداء فإن قياس الزاوية = °0 أو 0 rad

إذا كان ضلع الانتهاء على المحور y الموجب فإن قياس الزاوية = °90 أو $\frac{\pi}{2}$ rad

إذا كان ضلع الانتهاء على المحور x السالب فإن قياس الزاوية = °180 أو π rad

إذا كان ضلع الانتهاء على المحور y السالب فإن قياس الزاوية = °270 أو $\frac{3\pi}{2}$ rad



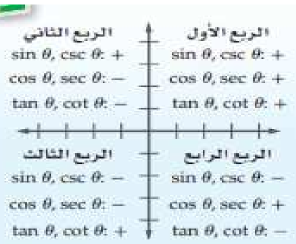
الزاوية الرجعية : هي الزاوية المحصورة بين ضلع انتهاء الزاوية والمحور x .

يجب أن تكون زاوية غير ربعية ومرسومة في الوضع القياسي .

الخطوة 1: أوجد قياس الزاوية المرجعية θ'.

الخطوة 2: أوجد قيمة الدالّة المثلّثية للزاوية θ'.

الخطوة 3: حدّد إشارة قيمة الدالّة المثلّثية للزاوية θ باستعمال الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية θ .

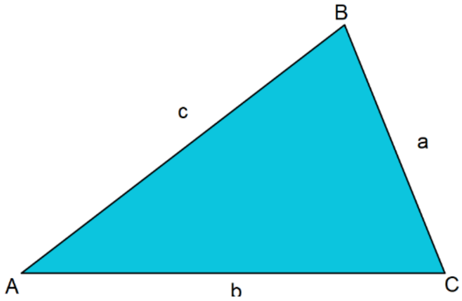


يمكنك استعمال قيم الدوالّ المثلّثية للزوايا التي قياساتها °30 , °45 , °60 التي تعلّمتها في الدرس 1-4.

قيم الدوالّ المثلّثية للزوايا الخاصة

الجيب	جيب التمام	الظل	قاطع التمام	القاطع	ظل التمام
$\sin 30° = \frac{1}{2}$	$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\csc 30° = 2$	$\sec 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cot 30° = \sqrt{3}$
$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan 45° = 1$	$\csc 45° = \sqrt{2}$	$\sec 45° = \sqrt{2}$	$\cot 45° = 1$
$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\tan 60° = \sqrt{3}$	$\csc 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sec 60° = 2$	$\cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

الدرس الرابع : قانون الجيوب



مساحة المثلث k يساوي حاصل ضرب طولي ضلعين

في جيب الزاوية المحصورة بينهما

$k = \frac{1}{2} a \times b \sin C$

$k = \frac{1}{2} a \times c \sin B$

$K = \frac{1}{2} b \times c \sin A$ (نرمز للزوايا بالأحرف الكبيرة والأضلاع بالأحرف الصغيرة)

قانون الجيوب : هو الذي يبين العلاقات بين أطوال الأضلاع وجيوب الزوايا المقابلة لها .

إذا كانت أضلاع المثلث ABC التي أطوال أضلاعه a , b , c تقابل الزوايا التي قياساتها A , B , C على الترتيب , فإن العلاقات الاتية صحيحة :

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

يستعمل هذا القانون عند معرفة :

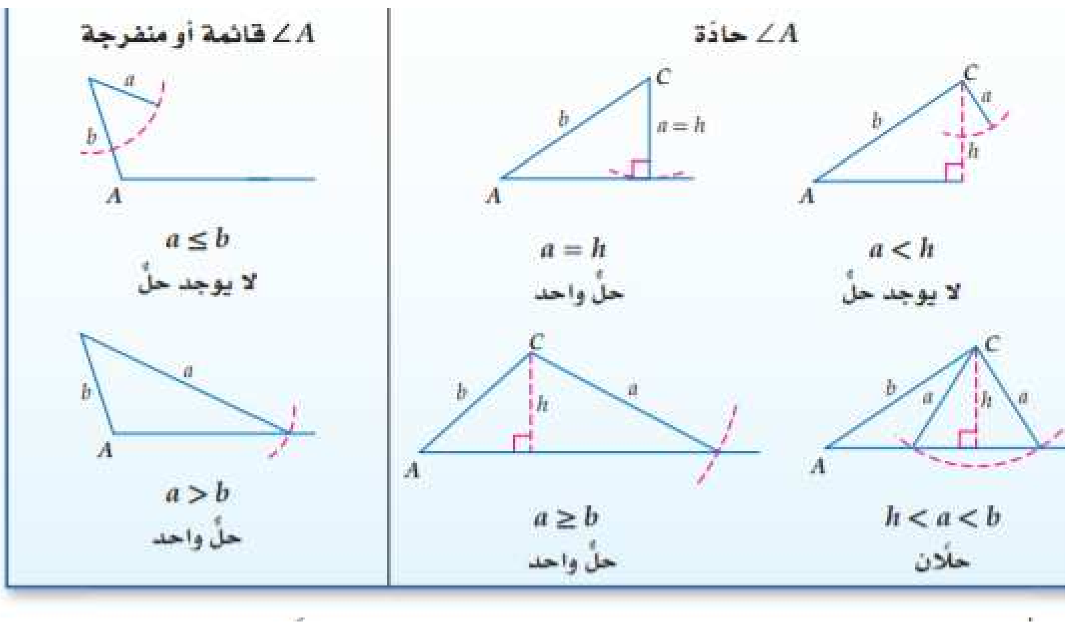
زاوية – زاوية – ضلع حالة (AAS)

زاوية – ضلع – زاوية حالة (ASA)

ضلع – ضلع – زاوية حالة (SSA)

حَلُّ المثلث : هو استعمال القياسات المعطاة في إيجاد المجهول من أطوال المثلث وقياس زواياه .

المثلثات المممكنة في حالة (SSA)



حيث h هو الارتفاع

الدرس الخامس : قانون جيوب التمام

قانون جيوب التمام :-

إذا كانت أضلاع المثلث ABC التي اطوال أضلاعه a , b , c تقابل الزوايا A , B , C على الترتيب .

فإن العلاقت اللآتية صحيحة :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2a \times b \cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \times c \cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \times b \cos C$

يستعمل هذا القانون عند معرفة :

ضلع – زاوية – ضلع الحالة (SAS)

ضلع – ضلع – ضلع الحالة (SSS)

متى نستخدم قانون الجيوب وقانون جيوب التمام عند حل المثلثات غير القائمة الزاوية ؟

إذا أُعطيت	فابدأ الحلّ باستعمال
قياسا زاويتين وطول أيّ ضلع	قانون الجيوب
طولا ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما	قانون الجيوب
طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما	قانون جيوب التمام
أطوال الأضلاع الثلاثة	قانون جيوب التمام

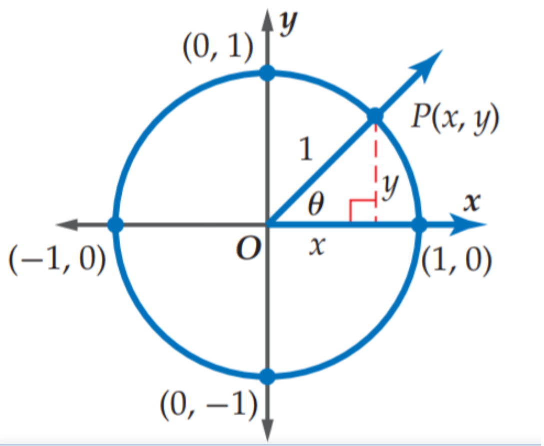
الدرس السادس : الدوال الدائرية

دائرة الوحدة : هي دائرة مرسومة في المستوى الاحداثي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها وحدة واحدة .

ويمكن استعمال النقطة P الواقعة على دائرة الوحدة لتعريف دالتي الجيب , وجيب التمام .

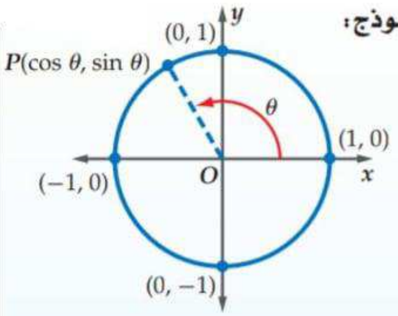
$\text{Cos } \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$, $\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$

$\text{Cos } \theta = x$, $\sin \theta = y$



التعبير اللفظي: إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة $P(x,y)$، فإن: $\cos\theta = x, \sin\theta = y$

النموذج:



الرموز: $P(x, y) = P(\cos\theta, \sin\theta)$

مثال: إذا كانت: $\theta = 120^\circ$ فإن:
$P(x, y) = P(\cos 120^\circ, \sin 120^\circ)$

تسمى كل من $\cos\theta$, $\sin\theta$ دالة دائرية لأن تعريف كل منهما اعتمد على دائرة الوحدة .

الدوال الدورية : يكون شكل الدالة وقيمها y عبارة عن تكرار نمط على فترات نتظمة متتالية .

يسمى النمط الواحد الكامل منها دورة .

تسمى المسافة الأفقية في الدورة طول الدورة .

يمكن أن تبدأ الدورة عند أي نقطة في منحنى الدالة الدورية .

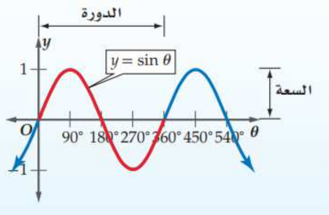
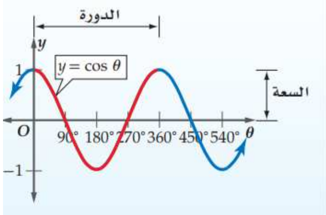
الدرس السابع : تمثيل الدوال المثلثية بيانياً

يمكن تمثيل الرحكة الموجية بالمعادلة :

$y = A \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$ حيث تمثل A سعة الموجة , λ تمثل الطول الموجي .

سعة دالة الجيب أو جيب التمام : تساوي نصف الفرق بين القيمى العظمى والقيمة الصغرى .

تمثيل دالتا الجيب و جيب التمام

الدالّة المولدة (الأم)	$y = \sin\theta$	$y = \cos\theta$
التمثيل البياني		
المجال	مجموعة الأعداد الحقيقية	مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$
السعة	1	1
طول الدورة	360°	360°

$y = a \sin b\theta$	$y = a \cos b\theta$
$(0, 0), \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right) \left(\frac{360^\circ}{b}, 0\right)$	$\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right), \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right)$

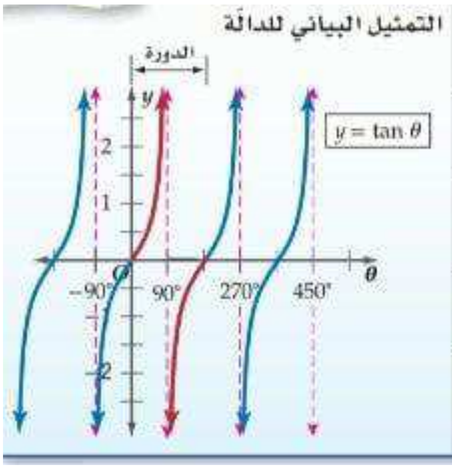
حيث تمثل a السعة , و b تمثل عدد الدورات في 360°

وتكون القيمة العظمي هي $y = |a|$ والقيمة الصغرى هي $y = -|a|$

التردد : هو عدد الدورات في وحدة الزمن .

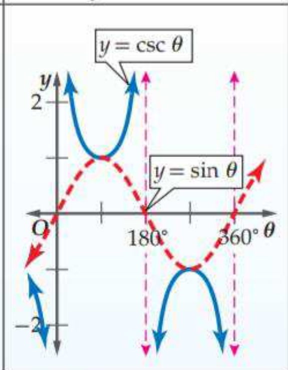
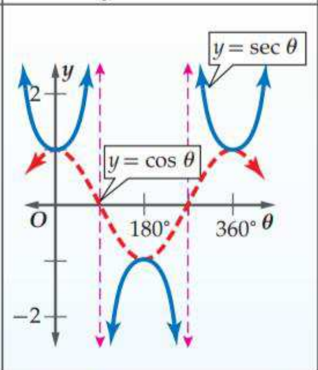
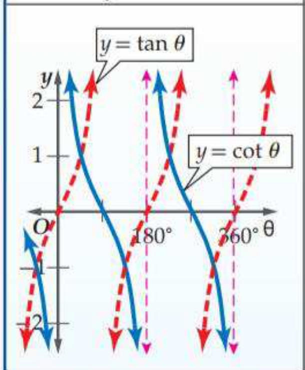
ملحوظة* السعة تؤثر في منحنى الدالة في اتجاه المحور y , أما طول الدورة فيؤثر في محور الاتجاه x.

تمثيل دالة الظل

الدالة المولّدة (الأم)	$y = \tan\theta$	التمثيل البياني للدالة
المجال	$\{\theta \mid \theta \neq 90^\circ + 180^\circ n,\ n \in Z\}$	
المدى	مجموعة الأعداد الحقيقية	
السعة	غير معرَّفة	
طول الدورة	180°	

لا يوجد سعة لدالة الظل بسبب عدم وجود قيم عظمى أو صغرى لها .

تمثيل دوال المقلوب (قاطع تمام و القاطع وظل التمام)

الدالة المولّدة (الأم)	$y = \csc\theta$	$y = \sec\theta$	$y = \cot\theta$
التمثيل البياني			
المجال	$\{\theta \mid \theta \neq 180n,\ n \in Z\}$	$\{\theta \mid \theta \neq 90 + 180n,\ n \in Z\}$	$\{\theta \mid \theta \neq 180n,\ n \in Z\}$
المدى	$\{y \mid 1 \leq y \vee y \leq -1\}$	$\{y \mid 1 \leq y \vee y \leq -1\}$	مجموعة الأعداد الحقيقية
السعة	غير معرَّفة	غير معرَّفة	غير معرَّفة
طول الدورة	360°	360°	180°

يمكن استعمال الدوال الأساسية (sin , cos , tan) لتمثيل منحنيات دوال المقلوب

ملحوظة* الرمز V يقرأ "أو" ويعني هنا اتحاد فترتين .

<u>الدرس الثامن : الدوال المثلثية العكسية</u>

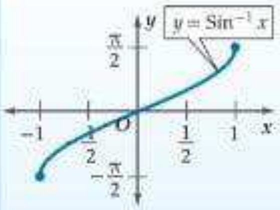
يمكن استعمال الدوال ذات المجالات المحددة في تعريف دوال عكسية.. فمثلاً :

الدالة العكسية لدالة الجيب هي : دالة الجيب العكسية $\sin^{-1}$ أو Arcsin

الدالة العكسية لدالة جيب التمام هي : دالة جيب التمام العكسية $\cos^{-1}$ أو Arccos

الدالة العكسية لدالة الظل هي : دالة الظل العكسية $\tan^{-1}$ أو Arctan

وفي هذا الجدول توضيح لهذه الدوال

الدالة العكسية	الرموز	المجال	المدى	نموذج
دالة الجيب العكسية	$y = \mathrm{Sin}^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ $-90^\circ \le y \le 90^\circ$	
دالة جيب التمام العكسية	$y = \mathrm{Cos}^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	$0 \le y \le \pi$ $0^\circ \le y \le 180^\circ$	
دالة الظل العكسية	$y = \mathrm{Tan}^{-1} x$	مجموعة الأعداد الحقيقية	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ $-90^\circ < y < 90^\circ$	

عند حساب قيمة معكوس الدالة المثلثية , فإن الناتج هو قياس زاوية .

المعادلة المثلثية : هي معادلة تحتوي على دوال مثلثية بزوايا مجهولة القياس .

وحل هذه المعادلة يكون بإيجاد قياس الزوايا المجهولة والتي دوالها المثلثية تجعل المعادلة صحيحة ,

ونقوم بإعادة كتابتها باستعمال الدوال المثلثية العكسية .

مثال/ إذا كانت $0,2 = \tan\theta = \frac{15}{75}$ فأوجد قياس الزاوية .

باستعمال دالة الظل العكسية $\tan^{-1}$

باستخدام الآلة الحاسبة : shift--→ tan --→ 0,2 -→ =

الناتج = 11,30993247 بالتقريب 11°